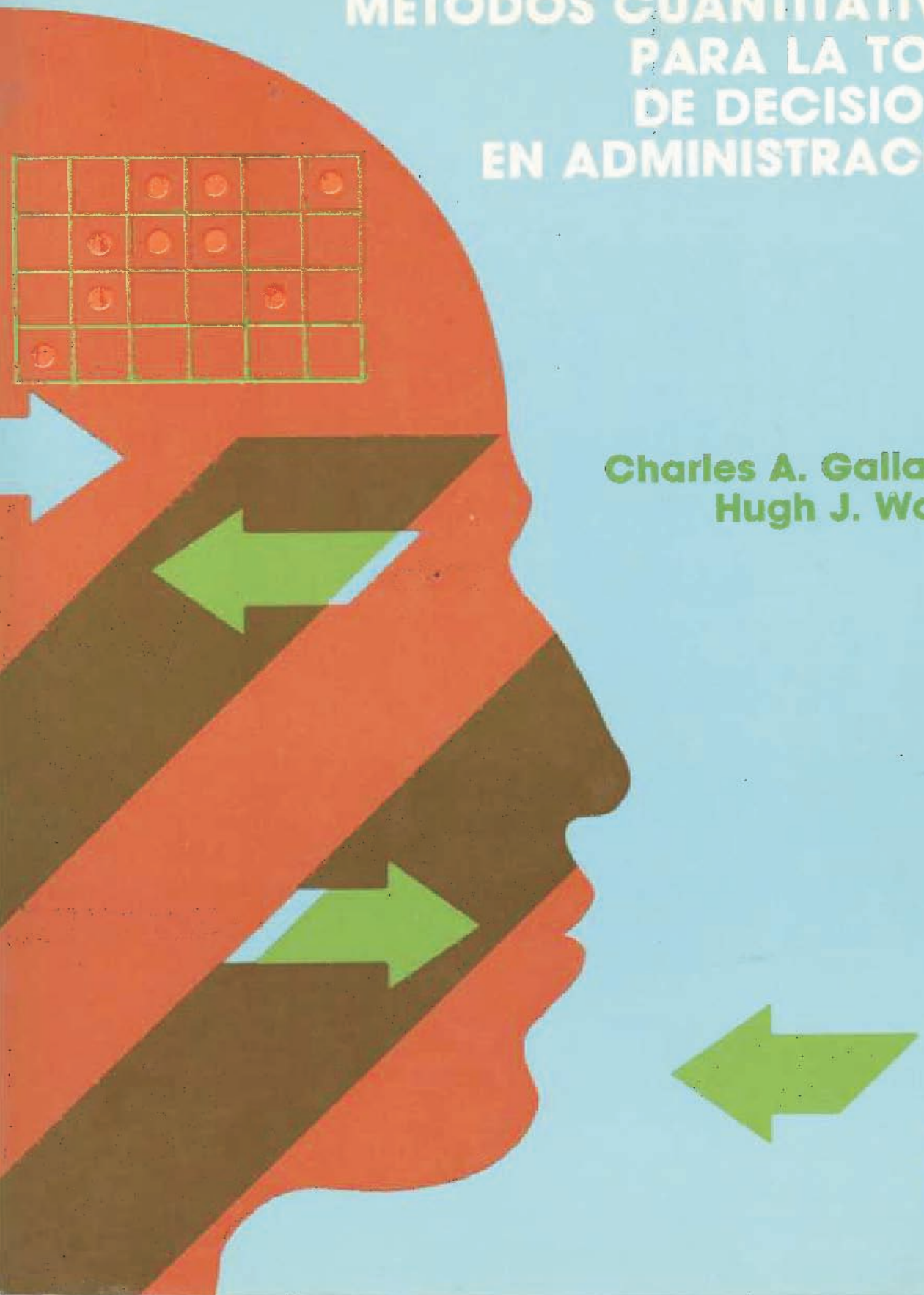
MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN ADMINISTRACIÓN



Charles A. Gallagher
Hugh J. Watson

Mc Graw Hill

MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN ADMINISTRACIÓN

MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN ADMINISTRACIÓN

Charles A. Gallagher
College of Business Administration
University of Central Florida

Hugh J. Watson
College of Business Administration
University of Georgia

TRADUCCIÓN:
Marcia González Osuna
Matemática
Facultad de Ciencias, U.N.AM
Maestra en Ciencias
University of Arizona
Profesora de Carrera de la Facultad de Ingeniería
U.N.A.M.

REVISIÓN TÉCNICA:
Julio Alonso Cruz
Maestro en Ciencias
Titular en la Sección de Graduados, E.S.I.M.E.
Profesor titular de la U.A.M., Unidad Azcapotzalco

McGRAW-HILL

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SAO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • JOHANNESBURGO • LONDRES • MONTREAL
NUEVA DELHI • PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR
ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN ADMINISTRACIÓN

Prohibida la reproducción tota! o parcial de esta obra, por
cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS © 1982, respecto a la primera edición en español por
LIBROS McGRAW-HILL DE MÉXICO, S. A. DE C. V.
Atlacomulco 499-501, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cánara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 465

ISBN 968-451 312-7

Traducido de la primera edición en inglés de
QUANTITATIVE METHODS FOR BUSINESS DECISIONS

Copyright © 1980, by McGraw-Hill Book Co., U.S. A.

ISBN 0-07-022751 9

8013456792

Impreso en México

Printed in México

Esta obra se terminó en junio de 1982 en
Programas Educativos, S. A. Calz. de
Chabacano No. 65-A México 8, D. F.

Se tiraron 6 300 ejemplares

A nuestros padres

CONTENIDO

Prefacio XVII

PARTE I FUNDAMENTOS DE LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS

1 USO DE LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS 2

Objetivos de aprendizaje 3
El proceso de toma de decisiones racional 4
Cómo se resuelven los problemas en la realidad 6
El papel de los métodos cuantitativos 8
Uso de los métodos cuantitativos en las organizaciones 9
Redondeo: precisión contra exactitud 9
La perspectiva de la magnitud 11
Calculadoras y computadoras 11
Breve historia de los métodos cuantitativos 12
Resumen 13
Ejercicios 13
Bibliografía 14

2 CONSTRUCCIÓN DE MODELOS CUANTITATIVOS 15

Objetivos de aprendizaje 16
Características de los sistemas administrativos 17
Modelos 19
Dimensionalidad en los modelos 20
Modelos de toma de decisión 21
Toma de decisiones bajo certidumbre 21
Toma de decisiones bajo riesgo 22
Toma de decisiones bajo incertidumbre 24
Toma de decisiones bajo conflicto 25
Resumen 25
Ejercicios 26
Bibliografía 27

3 USO DE DATOS PARA LA TOMA DE DECISIONES 28

Objetivos de aprendizaje 29
¿Qué son los datos? 30
Tipos de datos 30
Requerimientos de datos en diferentes niveles de la organización 31
Fuentes de datos 32
Los datos como entrada a los modelos 33
Constribuciones de los contadores 33
Relaciones de tipo contable 34
Análisis de punto de equilibrio lineal 37
Ejercicio de práctica (3-1) 41
Análisis de punto de equilibrio no lineal 41
Ejercicios de práctica (3-2) 43
Análisis de punto de equilibrio con productos múltiples 43
Ejercicio de práctica (3-3) 45
Decisiones de hacer o comprar 45
Ejercicio de práctica (3-4) 48
Exceso de capacidad de planta 48
Dumping de un producto 48
Resumen 49
Ejercicios 50
Bibliografía 54

PARTE II TOMA RACIONAL DE DECISIONES

4 MATRIZ DE PAGOS Y ARBOLES DE DECISIÓN 58

Objetivos de aprendizaje 60
Fuentes de las probabilidades 60

Ejercicio de práctica (4-1) 63
Valor esperado 63
Ejercicio de práctica (4-2) 65
La matriz de pagos 65
Ejercicio de práctica (4-3) 69
Árboles de decisión 69
Ejercicio de práctica (4-4) 77
Una advertencia sobre el uso del valor monetario esperado 78
Experiencias del mundo real 80
Resumen 82
Ejercicios 82
Estudio de un caso: Key West of Hawaii 88
Bibliografía 88

5 CUANDO HAY UN OPONENTE: TEORÍA DE JUEGOS 89

Objetivos de aprendizaje 91
La matriz de pagos para un juego 91
Juegos de estrategia pura 92
Ejercicio de práctica (5-1) 95
Juegos de estrategia mixta 95
Ejercicio de práctica (5-2) 99
Casos especiales 99
Juegos con más de dos personas 101
Juegos de suma distinta de cero 101
Ejercicio de práctica (5-3) 102
Experiencias del mundo real 103
Resumen 104
Ejercicios 104
Estudio de un caso: sindicatos de profesores 110
Bibliografía 111

PARTE III PLANEACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE LA EMPRESA

6 PRONOSTICO DEL FUTURO 114

Objetivos de aprendizaje 115
Clasificación de los métodos de pronósticos 116
Selección de un método de pronósticos 117
Métodos de series de tiempo 118
Ejercicio de práctica (6-1) 122
Ejercicio de práctica (6-2) 125
Ejercicio de práctica (6-3) 128
Ejercicio de práctica (6-4) 133
Métodos causales 133

Ejercicio de práctica (6-5) 137
Métodos cualitativos 140
Experiencias del mundo real 143
Resumen 145
Ejercicios 147
Estudio de un caso: United Buyers Service 152
Bibliografía 154

7 SELECCIÓN DE ALTERNATIVAS CON PROGRAMACIÓN LINEAL 156

Objetivos de aprendizaje 158
Formulación de las restricciones 159
La función objetivo 160
Tres ejemplos 160
Ejercicio de práctica (7-1) 165
Solución de problemas de programación lineal 166
El método gráfico 166
Ejercicio de práctica (7-2) 174
Uso del método gráfico para minimización 174
Ejercicio de práctica (7-3) 178
Soluciones múltiples 178
Sin solución 179
Soluciones enteras 179
Limitaciones del método gráfico 179
Otros métodos de solución 179
Dualidad y precios sombra 181
Suposiciones y limitaciones de la programación lineal 154
Aplicaciones de la programación lineal 185
Experiencias del mundo real 189
Resumen 192
Ejercicios 192
Estudio de un caso: Madison Wire Co. 197
Bibliografía 198

8 PROGRAMACIÓN LINEAL: SOLUCIÓN POR EL MÉTODO SÍMPLEX 199

Objetivos de aprendizaje 200
Inicio: restricciones aumentadas 201
El método símplex en forma global 203
Construcción de la tabla símplex inicial 203
Ejercicio de práctica (8-1) 207
El método símplex (maximización) 207
Ejercicio de práctica (8-2) 21
Minimización con símplex 217

Ejercicio de práctica (8-3) 218
Manejo de casos especiales 218
Precios sombra y la solución dual 223
Análisis de sensibilidad 225
Solución en computadoras 233
Resumen 233
Ejercicios 234
Estudio de un caso: Bithlo Electric 237
Bibliografía 238

9 PROGRAMACIÓN ENTERA Y POR OBJETIVOS 239

Objetivos de aprendizaje 241
Programación por objetivos 241
Ejercicio de práctica (9-1) 245
Ejercicio de práctica (9-2) 248
El método símplex para programación por objetivos 248
Ejercicio de práctica (9-3) 252
Aplicaciones de la programación por objetivos 253
Programación entera 261
Ramificación y acotamiento 262
Ejercicio de práctica (9-4) 267
Ramificación y acotamiento aplicado a problemas de asignación 268
Ejercicio de práctica (9-5) 271
Experiencias del mundo real 272
Resumen 273
Ejercicios 273
Estudio de un caso: Modelo de inversión de John 278
Bibliografía 280

10 PROGRAMACIÓN LINEAL: LOS MÉTODOS DE TRANSPORTE Y ASIGNACIÓN 281

Objetivos de aprendizaje 283
Características de un problema de transporte 283
Solución por el método de transporte 285
Ejercicio de práctica (10-1) 288
Ejercicio de práctica (10-2) 295
Ejercicio de práctica (10-3) 295
Ejercicio de práctica (10-4) 298
Ejercicio de práctica (10-5) 302
Otros tipos de problemas de transporte 306
Características de los problemas de asignación 308
Solución por el método de asignación 310
Ejercicio de práctica (10-6) 316

Experiencias del mundo real 317
Resumen 318
Ejercicios 318
Estudio de un caso: You-Drive Truck Rental Company 328
Bibliografía 329

11 CADENAS DE EVENTOS: ANÁLISIS DE MARKOV 330

Objetivos de aprendizaje 331
Descripción de una cadena de Markov 331
Cálculo de las probabilidades de transición 333
Ejercicio de práctica (11-1) 336
Cálculo de las probabilidades de estado estable 336
Ejercicio de práctica (11-2) 341
Ejercicio de práctica (11-3) 343
Casos especiales 343
Ejercicio de práctica (11-4) 349
Aplicación a la administración: planeación de personal 350
Experiencias del mundo real 351
Resumen 352
Ejercicios 353
Estudio de un caso: Archie's Quarks 357
Bibliografía 357

12 PLANEACIÓN DE PROYECTOS: PERT Y CPM 356

Objetivos de aprendizaje 359
Gráficas de Cantt 360
Dibujo de las redes de proyecto 361
Cómo se encuentra la ruta crítica 365
Ejercicio de práctica (12-1) 369
Ejercicio de práctica (12-2) 373
Uso de diagramas de redes en la administración 373
PERT: uso de redes probabilísticas 375
Ejercicio de práctica (12-3) 378
Ejercicio de práctica (12-4) 380
CPM: trueque entre el tiempo y el costo 380
Ejercicio de práctica (12-5) 384
Ejercicio de práctica (12-6) 385
Necesidad de las computadoras 385
Otras técnicas de proyecto 386
Experiencias del mundo real 386
Resumen 388
Ejercicios 389
Estudio de un caso: Xylon Electronics 396
Bibliografía 398

PARTE IV BALANCEO DE COSTO Y SERVICIO

13 SISTEMAS Y MODELOS DE INVENTARIOS 402

Objetivos de aprendizaje 404
Clasificación de los sistemas de inventarios 404
Clasificación de los modelos de inventarios 405
Costos de inventarios 406
Modelo del lote económico (EOQ) 409
Ejercicio de práctica (13-1) 414
Tres casos especiales 414
Ejercicio de práctica (13-2, 13-3 y 13-4) 421
Un modelo de periodo fijo de reorden 421
Resumen 424
Ejercicios 425
Bibliografía 430

14 INVENTARIOS: MANEJO DE LA INCERTIDUMBRE 431

Objetivos de aprendizaje 432
Dos modelos de cantidad fija de reorden 432
Ejercicio de práctica (14-1) 437
Ejercicio de práctica (14-2) 441
Un modelo de periodo fijo de reorden 441
Ejercicio de práctica (14-3) 445
Selección del modelo de inventarios 446
Productos múltiples 449
Otros sistemas de inventarios 452
Experiencias del mundo real 453
Resumen 454
Ejercicios 455
Estudio de un caso: Wonderworld 459
Bibliografía 461

15 LÍNEAS DE ESPERA: TEORÍA DE COLAS 462

Objetivos de aprendizaje 464
Costos de los sistemas de colas 464
Estructuras típicas 466
Modelo de un servidor y una cola 469
Ejercicio de práctica (15-1) 472
Evaluación del sistema cuando se conoce el costo de espera 473
Evaluación del sistema con costos de espera desconocidos 475
Modelo de un servidor con tiempos de servicios constantes 477
Ejercicio de práctica (15-2) 478
Comparación de tiempos de servicio exponenciales y

constantes 478
Modelo con servidores múltiples 479
Ejercicio de práctica (15-3) 481
Comparación de un servidor rápido con dos servidores lentos 482
Distribuciones Poisson y exponencial 483
Solución por simulación 485
Experiencias del mundo real 485
Resumen 486
Ejercicios 486
Estudio de un caso: cajeras de autobanco 490
Bibliografía 491

PARTE V SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON EL MODELADO DEL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA

16 SIMULACIÓN 494

Objetivos de aprendizaje 495
Ejemplo de simulación: análisis de ganancias 496
Procedimiento de simulación 500
Generación de valores de una variable aleatoria 502
Proceso de Monte Cario 502
Ejercicio de práctica (16-1) 508
Ejercicio de práctica (16-2) 508
Construcción de un modelo 508
Confiabilidad y validación del modelo 509
Introducción a algunos ejemplos 510
Ejemplo de sistemas de colas 510
Ejemplo de inventarios 514
Simulación de toma de decisiones humanas 519
Ejemplo de una agencia de renta de autos 521
Experiencias del mundo real 525
Resumen 527
Ejercicios 528
Estudio de un caso: Pero, ¿se obtendrá un beneficio? 535
Bibliografía 536

PARTE VI MANTENIMIENTO DE UNA PERSPECTIVA ADMINISTRATIVA

17 MÉTODOS CUANTITATIVOS EN ACCIÓN 538

Objetivos de aprendizaje 539
Cuándo usar los métodos cuantitativos 540
Selección del método cuantitativo apropiado 541

El proceso de desarrollo del modelo 542
Obstáculos para el uso de los métodos cuantitativos 545
Sistemas de información basados en computadoras 549
Efectos de los métodos cuantitativos 555
Futuro de los métodos cuantitativos 556
Resumen 556
Ejercicios 557
Estudio de un caso: National Tool Co. 559
Bibliografía 561

APÉNDICES

A REPASO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 562

B ÁREA BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR 577

C TABLA DE NÚMEROS ALEATORIOS 579

D RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA 581

índices 599
índice Onomástico 601
índice analítico 605

PREFACIO

"El aprendizaje sin pensamiento es trabajo perdido;
el pensamiento sin aprendizaje es peligroso."

Confucio

El propósito de este libro es suministrar una fuente básica de aprendizaje para el estudio de métodos cuantitativos. Con este fin se han incorporado varias características únicas para hacerlo interesante, fácil de leer y útil:

En lugar de demostraciones matemáticas se emplean explicaciones que despiertan la intuición

Se dan objetivos de aprendizaje conductual para cada capítulo

Ejercicio de práctica dentro del capítulo con soluciones completas

Estudio de casos para ampliar los horizontes de aprendizaje

Secciones en los capítulos sobre experiencias de "la vida real" que ilustran la práctica de los métodos cuantitativos

Muchos ejercicios de fin de capítulo

La *Parte I, Fundamentos de métodos cuantitativos,* da los marcos de referencia con la exposición de métodos cuantitativos, modelos y datos. Refleja nuestra filosofía de que los métodos cuantitativos pueden *ayudar* a la toma de decisiones administrativas pero no pueden sustituir el juicio experimentado.

La *Parte II, Toma racional de decisiones,* observa los elementos de la toma de decisiones estadística. Se presentan la matriz de pagos y árboles de

decisión. También se incluye teoría de juegos, por sus contribuciones conceptuales a la toma de decisiones.

La *Parte III, Planeación de las actividades de la empresa,* incluye explicaciones de los métodos más usados como ayuda a la planeación administrativa, junto con ejemplos de sus aplicaciones. Los temas incluyen pronósticos, programación lineal, análisis de Markov y planeación de proyectos.

La *Parte IV. Balanceo de costo y servicio,* se concentra en dos áreas generales de decisión: control de inventarios y líneas de espera. En estas áreas hemos tratado de desarrollar el entendimiento intuitivo del lector en cuanto a las decisiones que deben tomarse. Esto es importante si se quien que los métodos cuantitativos sean realmente efectivos.

La *Parte V, Solución de problemas con él modelado del comportamiento del sistema,* presenta el importante tema de simulación. Cerramos con la *Parte VI, Mantenimiento de una perspectiva administrativa,* título que expresa uno de nuestros objetivos a lo largo de este libro.

El nivel de matemáticas se ha mantenido en un mínimo, de principio a fin. No se usa ni Cálculo ni Álgebra matricial. Sólo serán necesarios el Álgebra y conocimientos elementales de probabilidad y estadística.

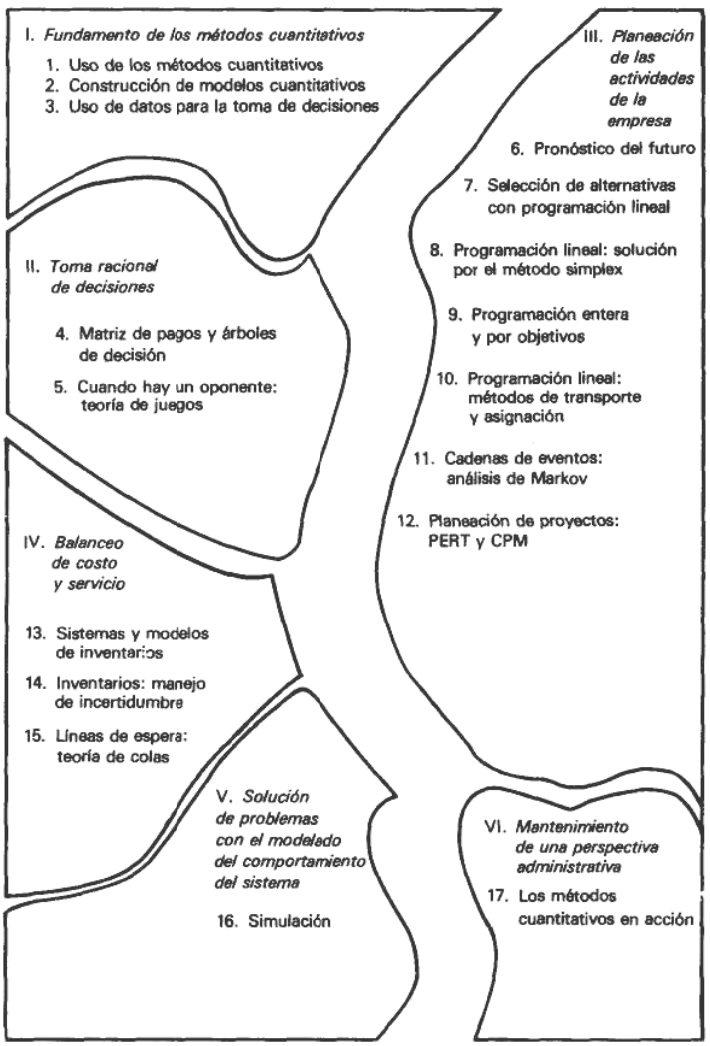
Hay suficiente material en el libro para un curso de un semestre o uno de dos trimestres, ya sea a nivel de licenciatura o de graduados. Si sólo se desea un curso de un trimestre, podrá omitirse parte del material. El orden en que se cubren los capítulos puede variarse ya que muchos de ellos son independientes de los otros.

Hemos sido muy afortunados al recibir de mucha gente una gran ayuda Damos las gracias, en especial, a Samuel Newman por su ayuda en la planeación del libro. También a Eugene T. Byrne, Janet C. Goulet, David C. Murphy y Diane R. Walker por su ayuda en la revisión; a Paul R. Merry quien nos hizo excelentes comentarios y críticas útiles. Al igual, damos las gracias a Susie Findell, Cynthia Downing, Martha Simkins, Martha Tyler y Nicky O'Hair por su ayuda con la mecanografía del manuscrito. Por supuesto, los autores son los únicos responsables de los errores en el contenido.

Charles A. Callagher

Hugh J. Watson

ARMADO DEL ROMPECABEZAS DE MÉTODOS CUANTITATIVOS



PARTE UNO

FUNDAMENTOS DE LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS

1

USO DE LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS

Existe voluntad como la de un motor y existe voluntad como la de unos frenos. La razón es, yo supongo, como la caja de velocidades.

Robert Frost

¿Cómo puede ser que las matemáticas, que son después de todo un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapten tan admirablemente a los objetos de la realidad?

Albert Einstein

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje
La toma de decisiones racional
  Proceso
  El método científico
  Herramientas para problemas específicos
Cómo resuelve la gente problemas reales
El papel de los métodos cuantitativos
Uso de los métodos cuantitativos en las organizaciones
Redondeo: precisión contra exactitud
Conservando en mente la magnitud
Calculadoras y computadoras
Breve historia de los métodos cuantitativos
Resumen
Ejercicios
Bibliografía

Si se aspira a ser un administrador con éxito, uno de los talentos que deben desarrollarse es la toma de decisiones. Habrá que aprender a buscar contexto de problemas y oportunidades, obtener la información necesaria, identificar las alternativas disponibles, reflexionar sobre ellas con cuidado, tomar una decisión personal y seguir adelante. Nadie exigirá perfección en esto, pero para triunfar será necesario un buen promedio de bateo.

Por supuesto, hasta este momento el lector ya habrá tomado muchas decisiones —a qué escuela asistir, qué cursos tomar, qué trabajos hacer. Cada día se toman muchas decisiones pequeñas —a qué hora levantarse, qué desayunar, qué ropa ponerse y así sucesivamente. Se hace esto casi en forma automática, a veces de manera impulsiva; pero en este caso, las consecuencias de una decisión "equivocada" son de poca importancia. El proceso de tomar decisiones mayores, tales como escoger una carrera, necesita de mucho más meditación.

Con toda esta experiencia, ¿qué más hay que aprender sóbrela toma de decisiones? Con toda honradez, (tal vez nada! Si se es una de esas personas envidiables que parecen ser creativos e imaginativos, que tienen carácter y siempre hacen lo correcto en el momento apropiado, habrá que cerrar este libro y ponerse a trabajar; el mundo espera a estas personas. Si se es como el resto de la gente, se necesitará toda la ayuda posible con el fin de prepararse para los retos que se presenten. Continúese leyendo para estudiar dos temas: la toma de decisiones racional y cómo puede aplicarse ésta a problemas comunes de administración.

El estudio de la toma de decisiones se parece al estudio de cómo caminar; es tal la costumbre, que se da por hecho. Pero en los negocios es mucho lo que está en juego, ya que la decisión del gerente o administrador afecta a mucha gente. La razón, como dice Frost, es la caja de velocidades, así que tiene sentido estudiar cómo conducir. Al hacer esto, se limitará el estudio a la toma de decisiones *racional* o a cómo *debería* hacerse. Así, se hará hincapié en ser lógicos, racionales y objetivos al resolver problemas. Como se verá, éste es un objetivo a lograr, aunque pocas veces se alcance por completo.

Como ayuda, en este estudio, se usarán matemáticas, ya que es el lenguaje del pensamiento racional. De la misma forma que la taquigrafía a la secretaria, las matemáticas permiten expresar pensamientos complejos de manera concisa. Son convenientes. Y como observó Einstein, con frecuencia tienen aplicación práctica.

Esto lleva al segundo tema: la aplicación del pensamiento racional a problemas comunes de negocios. El administrador no es un idealista. Busca resultados y debe ser práctico. Para que sea útil, el estudio de la toma de decisiones racional debe tener aplicaciones. Y las tiene. En seguida se presentarán algunas de las más frecuentes.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Después de estudiar este capítulo, el lector deberá saber:

1 Cómo debe la gente resolver problemas
2 De hecho cómo resuelve problemas la gente
3 De qué forma pueden ayudar los métodos cuantitativos a la solución de problemas
4 La diferencia entre precisión y exactitud
5 Cómo pueden ayudar las calculadoras y las computadoras
6 Una breve historia de los métodos cuantitativos para la administración

7 El significado de los siguientes términos:

Toma de decisiones	Precisión
Proceso de toma de decisiones	Exactitud
Optimización	Investigación de operaciones
Satisfactorio	Ciencia de la administración

EL PROCESO DE TOMA DE DECISIONES RACIONAL

¿Cómo *debe* actuarse al tomar una decisión? ¿Qué *debe* hacerse para tomar la mejor decisión? Esta pregunta no es nueva ni moderna. Los intelectuales la han discutido en todos los tiempos ya que forma parte central de la búsqueda de la verdad. El resultado de este extenso debate es un enfoque general conocido como el *método científico.* Además, se han desarrollado varios modelos matemáticos para problemas específicos.

Antes de seguir adelante, se aclararán algunos términos. Los nombres de *proceso de toma de decisiones y solución de problemas* se usarán indistintamente. Esto se referirá a la secuencia completa de pasos desde laidentificación del problema hasta su solución. El término *toma de decisiones* se referirá a la selección de una alternativa de entre un conjunto de ellas. Significa escoger. Como tal, la toma de decisiones es sólo un paso dentro de este proceso, Se espera que esto lo aclare el mismo contexto.

El método científico

El método científico surgió a través del tiempo, a partir de la experiencia práctica de muchos científicos —astrónomos, químicos, físicos y biólogos En general se reconoce a Sir Francis Bacon como al primero que describió formalmente el método, hace casi cien años. La intención original fue tener una guía para la investigación en las ciencias físicas, pero el método se adapta fácilmente a cualquier tipo de problema.

En la tabla 1-1 se enumeran los pasos del método científico para resol ver problemas tanto de ciencias como de administración.

Definición del problema Este primer paso es crítico porque establece las fronteras para todo lo que sigue. Por ejemplo, si uno se pregunta: "¿Debo ponerme hoy una camisa azul o una roja?" todos los demás colores quedan fuera de consideración. Amarilla, anaranjada o verde no son soluciones

TABLA 1-1
El método científico

En las ciencias	*En administración*
Defínase el problema	Defínase el problema
Recoléctense datos	Recoléctense datos Definanse
Formúlense hipótesis	soluciones alternativas Evalúense
Pruébense hipótesis	soluciones alternativas
Evalúense resultados	Selecciónese la mejor alternativa
Obténganse conclusiones	Póngase en práctica

alternativas. Por supuesto, ésta puede ser la intención. Si no lo es, entonces una pregunta mejor sería: "¿Qué color de camisa debo ponerme hoy?" No tiene valor encontrar la mejor solución para el problema equivocado.

Recolección de datos La razón para este paso es sencilla, pues se estará más capacitado para resolver problemas si se tiene información sobre ellos. Deberá reunirse información pasada, hechos pertinentes, y soluciones previas a problemas semejantes.

Definición de alternativas de solución El método científico se basa en la suposición de que las soluciones *existen.* En este paso se buscan las soluciones posibles y se enumeran.

Evaluación de alternativas de solución Una vez enumeradas todas las alternativas de solución, deberán evaluarse. Esto puede lograrse comparando una por una con un conjunto de criterios de solución u objetivos que se deben cumplir. También puede lograrse estableciendo rangos relativos de las alternativas de acuerdo a factores que sean importantes para la solución. En general se hacen las dos cosas.

Selección de la mejor alternativa Aquí se toma la decisión de cuál de las alternativas cumple mejor con los criterios de solución.

Puesta en práctica La toma de decisiones en administración debe llevar a actuar. La alternativa seleccionada deberá ponerse en práctica.

Aun cuando se presentó el método científico en un paquete ordenado de pasos separados, existe retroalimentación y reciclado entre los pasos. Podría suceder, por ejemplo, que al tratar de evaluar las alternativas se descubra que no se tiene la información necesaria. Entonces, al pasar de nuevo al segundo paso, pueden encontrarse otras alternativas de solución. Este tipo de ciclado es más común que el recorrer una sola vez todos los pasos.

No existe una garantía de que se encuentre la solución a todos los problemas si se usa el método científico. Éste es, después de todo, un método general sujeto a la interpretación del usuario. Sus méritos consisten en que es explícito y objetivo. Si se aplica en forma ordenada y completa, el resultado deberá ser la mejor solución posible.

Herramientas para problemas específicos

Ciertos tipos de problemas son comunes en administración, ya sea en el sentido de que la mayoría de las empresas se enfrentan a ellos en un momento u otro, o de que se presentan con frecuencia para algunas empresas. Por ejemplo, un problema típico de fabricación es determinar si un nuevo producto propuesto se debe hacer o no. Otro problema común a la mayoría de las empresas es el de determinar cuándo ordenar un artículo para inventario y qué cantidad ordenar. La planeación es una actividad que todas las empresas deben realizar. La programación es otro ejemplo

de un problema común. En este texto se introducirán éstos y otros problemas comunes a las empresas y se describirán métodos racionales para resolverlos. Se han desarrollado otras herramientas que tienen amplia aplicación en administración. Éstas no están limitadas a ningún tipo de problema; más bien cubren un rango o clase de problemas. El lector ya conoce muchos métodos de razonamiento de este tipo. Un ejemplo es el método de enumeración. Digamos que se desea encontrar el cine más cercano que muestre la película que se quiere ver. Simplemente se enumeran las posibilidades, se mide la distancia a cada uno y se escoge el que esté más cerca. Otro concepto podría llamarse apostar sobre el promedio a la larga. Esto es lo que hacen los casinos de Las Vegas. Las posibilidades en la ruleta, el black jack, y de hecho en todos los juegos, favorecen a la larga al casino. Algunas veces la casa pierde, pero al final gana. Esto involucra el concepto *valor esperado,* que se estudiará a la par que otros métodos racionales les en la administración.

El objetivo de la solución racional de problemas es encontrar el óptimo lo mejor. Puede ser ganancia máxima o costo mínimo, según la situación, o algún otro criterio. Mientras que en teoría el óptimo se obtiene siempre, en la práctica es difícil de alcanzar.

CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS EN LA REALIDAD

De la experiencia personal se sabe que muchas decisiones se toman sin hacer referencia al método científico o a los métodos cuantitativos. La costumbre, el hábito, la tradición, la fe, la intuición, juegan un papel importante en la manera en que se resuelven los problemas. Con frecuencia se usa como escapatoria aquello de que "bien o mal, ya está hecho". A veces la gente toma la primera solución disponible, adelantándose a las conclusiones. Existen preferencias, prejuicios y predisposiciones, gustos y desagrados. Pero puede culparse de todo esto a la debilidad humana. ¿Qué pasa con la persona que realmente quiere tomar decisiones racionales, que quiere usar el método científico y que desea hacer el esfuerzo? Aun para esta persona existen dificultades.

Considérese lo que se requiere para una aplicación exhaustiva del método científico.

Estar bien informado Deben conocerse *todos* los hechos y relaciones pertinentes. Para cualquier problema complejo esto es como decir que debe saberse todo sobre todo, lo que resulta claramente imposible. Una situación más común es *no* saber todo lo que hay que saber sobre un problema en particular, especialmente en administración. De hecho, el papel del administrador se describe, con frecuencia, como el de tomar decisiones basado en información incompleta.

Conocer todas las alternativas El método científico supone que pueden identificarse *todas* las alternativas posibles de solución a un problema. En muchos casos, esto es posible. Escoger la ropa para ponerse en la mañana está limitado a la ropa que hay en el closet. Sin embargo, seleccionar la lo-

FIGURA 1.1
Modelo de Simón para toma de decisiones

calización de una nueva planta, o decidir sobre una estrategia general de la corporación no estará limitado a algún conjunto bien definido de alternativas. Algunas alternativas quedarán sin descubrir; de hecho, pocas veces se sabe cuántas alternativas existen, mucho menos *cuáles* son.

Ser objetivo En los negocios esto significa: ser un optimizador económico. Maximizar los beneficios económicos y minimizar los costos económicos. Aquí la dificultad es tan sencilla como que la gente no se comporta de esta manera. Se tiene preocupación por lo económico, por supuesto, pero también se tienen otras preocupaciones: sociales, religiosas, emocionales, personales, políticas, etc. Las personas son más complejas de lo que supone la teoría del "hombre económico", con el resultado de que la toma de decisiones, no sólo se basa en el criterio económico objetivo.

Por estas razones es ilógico esperar que la gente actúe en forma *completamente racional.* Herbert Simón sugiere que el concepto de *racionalidad ecotada* describe mejor la toma de decisiones en la administración.[1] Es decir, los administradores tratan de comportarse lo más racionalmente que pueden dentro de las fronteras de la información limitada y con frecuencia de objetivos en conflicto. Simón argumenta que los administradores, más que buscar soluciones óptimas, buscan soluciones satisfactorias. Esto es, *satisfacen* más que optimizan.

En la figura 1-1 se muestra el proceso de toma de decisiones descrito por Simón. Después de definir el problema se establecen los criterios que la solución debe cumplir. Por ejemplo, si se quiere comprar pan de caja se puede establecer el criterio de que sea pan blanco, fresco, rebanado y de costo razonable. En el modelo de Simón, el tomador de decisiones busca una solución que *satisfaga* los criterios. Si se encuentran con facilidad muchas soluciones, se pueden elevar los criterios para reducir el número de candidatos. Si por otra parte, se encuentran muy pocas soluciones, los criterios se bajan. Por ejemplo, si la tienda no tiene pan blanco y no se desea buscar en otra parte, podría optarse por algo que sí tenga, como pan de centeno o de trigo entero. El objetivo del proceso no es una solución óptima; más bien es una solución satisfactoria.

[1] Herbert A. Simón, *Administrative Behavior,* 2ª edición (New York: Macmillan, 1957).

EL PAPEL DE LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS

Si la gente no puede ser completamente racional, ¿de qué sirven los métodos cuantitativos que están basados en la idea de la racionalidad completa? Es claro que a pesar del conocimiento de técnicas matemáticas sofisticadas, no ha sido posible resolver muchos problemas: el crecimiento demográfico mundial, el hambre, la contaminación, la escasez de energía y la guerra, para mencionar sólo unos cuantos. Gran parte de la crítica a los enfoques matemáticos viene de que los usuarios esperan más de la cuenta. No debe pensarse que existe un conjunto maravilloso de fórmulas que una vez que se aprenden proporcionarán respuestas gloriosas a todos los problemas. No hay tal. Todavía se necesitan el juicio, la experiencia, la intuición y el coraje humanos para administrar una empresa.

Sin embargo, los métodos cuantitativos juegan un papel importante en la administración. Su uso se está extendiendo. Se emplean de tres maneras:

1 Como guía en la toma de decisiones
2 Como ayuda en la toma de decisiones
3 Para automatizar la toma de decisiones

La primera aplicación es la más extensa pero la menos tangible. Al aprender los métodos y modelos para manejar los problemas administrativos en forma cuantitativa, se gana práctica y experiencia en el pensamiento racional. Si bien los problemas y métodos pueden variar, es sorprendente el parecido en el proceso de razonamiento, ya que están basados en el método científico. También se verá que algunos conceptos tales como el valor esperado, ocurren una y otra vez, en diferentes contextos. Mientras se logren satisfacer situaciones del mundo real, el concepto de racionalidad acotada exige que se sea tan racional como se pueda. El conocimiento de los métodos cuantitativos ayudará a guiar el pensamiento aun cuando nunca se haya escrito una ecuación.

La segunda aplicación de los métodos cuantitativos coadyuva en el proceso de toma de decisiones. Muchas veces no existirá un modelo para dar una solución, pero puede haber información útil que se puede obtener cuantitativamente. Al pronosticar ventas, por ejemplo, muchas firmas usan técnicas estadísticas para generar estimaciones de ventas futuras, Estos pronósticos se consideran entonces junto con las estimaciones de las ventas, la opinión de otros ejecutivos y personal experto para dar un pronóstico subjetivo final. Aquí el enfoque matemático es una ayuda en la toma de decisiones.

La tercera aplicación es la más sencilla y la más impresionante. Si se puede modelar con exactitud un problema específico, entonces se puede desarrollar una fórmula o un conjunto de fórmulas para su solución. Si el problema no cambia, las fórmulas permanecen válidas y pueden programarse en una computadora. La computadora entonces "toma la decisión". Así, la toma de decisiones se ha automatizado. Muchas empresas han realizado esto, por ejemplo, para el control de inventarios. En a1gunos casos la computadora maneja por completo el inventario, decide cuánto y cuándo debe ordenarse e imprimen una orden de compra. Esto alivia a la administración de una toma de decisiones rutinaria (y aburrida).

USO DE LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS EN LAS ORGANIZACIONES

Antes de profundizar más en el tema parece apropiado reflexionar un poco sobre el uso de los métodos cuantitativos en las organizaciones y los resultados obtenidos de su aplicación. Una encuesta hecha en 1977 a los miembros no académicos de la Operations Research Society of America (ORSA, Sociedad Americana de Investigación de Operaciones) y del Institute of Management Science (TIMS, El Instituto de Ciencias de la Administración), proporciona información sobre este tema.[2] La membresía de estas organizaciones se caracteriza por individuos expertos en las aplicaciones de los métodos cuantitativos en sus empresas. Es probable que los datos no reflejen todas las organizaciones ya que es más factible que los miembros de ORSA/TIMS se encuentren en empresas que emplean mucho los métodos cuantitativos. Sin embargo, sí proporciona un conocimiento interesante de la relativa popularidad de los diferentes métodos y la reacción de los usuarios a los mismos.[3]

Una pregunta de la encuesta investigaba la frecuencia de uso de los distintos métodos. La tabla 1-2 muestra los resultados del estudio. En general puede verse que muchos de los métodos se usan con gran frecuencia. Todos los métodos clasificados como los más importantes, desde el análisis económico hasta programación matemática avanzada se cubren en este libro. Los únicos métodos que no se describen aquí son las técnicas de búsqueda. Estos métodos se usan con poca frecuencia y no permiten una presentación a nivel elemental. El lector deberá sentirse satisfecho ya que aprenderá la mayoría de los métodos más populares.

Otra pregunta de la encuesta exploró los resultados del uso de estos métodos. La tabla 1-3 muestra lo que se obtuvo. En general el reporte es favorable. No debe sorprender que aquellos métodos que son consistentes en producir los resultados más favorables son también los que se usan con más frecuencia. Este punto puede observarse comparando las tablas 1-2 y 1-3.

REDONDEO: PRECISIÓN CONTRA EXACTITUD

A través de este libro se trabajará con números en los ejemplos y en los problemas de estudio. El redondear números puede ahorrar mucho tiempo y lápices si se hace en forma apropiada. En realidad, la llegada de las calculadoras parece haber traído una "inflación de dígitos" y ha eliminado el redondeo. Si una calculadora despliega ocho dígitos, hay quien se siente obligado a usarlos todos. Esto pocas veces es correcto.

Al trabajar con números se debe estar pendiente tanto de la precisión como de la exactitud. *L&. precisión* se refiere al grado de especificidad con que se establece una cantidad, es decir, el número de dígitos significati-

[2] Esta Investigación la llevaron a cabo Hugh J. Watson y Joan M. Baecher.

[3] Otras investigaciones han dado resultados parecidos. Véase Vatter y Turbin en la bibliografía al final del capítulo.

TABLA 1-2
Frecuencia de uso de los métodos cuantitativos

	Frecuencia de uso, porcentaje		
Método	*Nada*	*Algunas*	*Con frecuencia*
Análisis económico	3	25	72
Análisis estadístico	6	27	67
Simulación	15	35	50
Programación lineal	27	50	23
Teoría de inventarios	34	45	21
PERT/CPM	41	38	21
Programación matemática	55	34	11
Técnicas de búsqueda	60	35	5
Teoría de colas	63	31	6
Teoría de juegos	84	14	2

TABLA 1-3
Satisfacción del usuario con los métodos cuantitativos

	Porcentaje de usuarios que evalúan los métodos como			
Método	*Malos*	*Regulares*	*Buenos*	*Incierto*
Análisis económico	1	20	78	1
Análisis estadístico	1	17	80	2
Simulación	3	20	73	4
Programación lineal	14	28	49	9
Teoría de inventarios	9	36	51	4
PERT/CPM	10	40	47	3
Programación matemática	7	33	51	5
Técnicas de búsqueda	6	33	56	5
Teoría de colas	7	24	60	9
Teoría de juegos	21	31	26	22

vos. Es más fácil contar el número de dígitos significativos si primero se convierte el número a la forma exponencial.
Por ejemplo:

$1\ 024 = 1.024 \times 10^{3}$ cuatro dígitos significativos
$1\ 020 = 1.02 \times 10^{3}$ tres dígitos significativos
$1\ 000 = 1 \times 10^{3}$ un dígito significativo
$1\ 000 = 1.000 \times 10^{3}$ cuatro dígitos significativos
$0.012 = 1.2 \times 10^{-2}$ dos dígitos significativos

Cuando una cantidad está en forma exponencial, el número de dígitos significativos es simplemente el espacio desde el primer dígito diferente de cero hasta el último dígito. La precisión es importante ya que establece el límite sobre la exactitud.

La *exactitud* se refiere a cuan correctamente se ajusta una cantidad a la realidad (la verdad). Por desgracia, con frecuencia se exagera la exactitud con precisión excesiva. Considérese un ejemplo: dividir 9 entre 7. Si estos valores son exactos a sólo un dígito entonces pudieron haber sido el redondeo de números desde 8.6 hasta 9.4 y de 6.6 a 7.4 respectivamente.[4] Así, el cociente real puede ser cualquier cantidad entre

$$\frac{9.4}{6.6} = 1.4 \quad \text{y} \quad \frac{8.6}{7.4} = 1.2$$

Al dividir 9 entre 7 en una calculadora se obtiene 1.2857143. Si no se redondea esto a 1.3, otros pueden obtener una idea errónea sobre la exactitud del resultado. Aun cuando 9 y 7 sean *exactos,* pocas veces existe la necesidad de más de tres o cuatro dígitos significativos. El resto es exceso de equipaje.

El redondeo es importante ya que no es posible aumentar la exactitud con operaciones aritméticas. En general la exactitud que se obtiene al sumar, restar, multiplicar o dividir dos números está limitada el *menos* exacto de estos dos números. Si un número con tres dígitos significativos se dividiera por uno con sólo dos, el resultado sería exacto hasta dos dígitos. Esto se aplica también a sacar raíz cuadrada o a elevar a potencias exponenciales.

La única excepción al redondeo se puede hacer durante cálculos intermedios; entonces puede manejarse el "exceso" de dígitos hasta llegar al resultado final para minimizar los errores de redondeo acumulados. Sin embargo el resultado final deberá redondearse para que refleje su exactitud verdadera.

LA PERSPECTIVA DE LA MAGNITUD

Los errores aritméticos abundan; sólo les ganan en cantidad los errores de ortografía. Las calculadoras son una gran ayuda, pero aún así los errores son muchos. Éstos se pueden disminuir haciendo una estimación burda sobre la magnitud o el tamaño de los resultados que se esperan. Por ejemplo, si se divide 1 893 entre 375, deberá esperarse un resultado cercano a 2 000/400, o sea, 5. Si se obtiene 2.8, existen buenas razones para pensar que hay un error.

CALCULADORAS Y COMPUTADORAS

Lo más probable es que el lector ya posea una calculadora y que haya tenido ya algún contacto con las computadoras. Ninguna de las dos se necesitan para leer este libro; todos los ejemplos y problemas se pueden resolver en forma manual. Pero una calculadora reduciría la faena aritmética, y una computadora podría usarse para ilustrar el tema de simulación y para resolver problemas de programación lineal de gran escala.

[4] Las siguientes son buenas reglas de redondeo: (a) Redondéese hacia arriba si la parte es 6 o más y hacia abajo si es 4 o menos, *(b)* Si la parte es 5 hágase el número anterior par.

El advenimiento de las computadoras ha sido importante para el desarrollo y la aplicación de los métodos cuantitativos en la administración. La eficiencia en el cálculo ha hecho que la aplicación de ciertas técnicas como programación lineal sea económica. Además, las computadoras han estimulado el que continúe la investigación de nuevos métodos, en especial simulación. Pero, en esencia, es el especialista quien profundiza en estas aplicaciones de gran escala.

Sin embargo, la calculadora proporciona una ayuda poderosa para los cálculos, estando a la mano de todos, a un bajo precio y sin la necesidad de programación compleja. Con los nuevos desarrollos en circuitos integrados, ahora es posible tener una calculadora programable, que en realidad es una computadora, por menos de 100 dólares. La mayoría de los modelos y técnicas que figuran en este libro pueden programarse en una calculadora de este tipo para obtener respuestas directas después le introducir los datos.

Para el hombre de negocios se ha vuelto una necesidad competitiva el uso efectivo de los métodos cuantitativos con la ayuda de calculadoras y computadoras.

BREVE HISTORIA DE LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS

Las matemáticas son, en esencia, tan antiguas como la historia escrita y sus aplicaciones a los negocios se remontan a los inicios del comercio. Contar fue probablemente la primera aplicación cuando los primeros mercaderes llevaban sus libros. Sin embargo, la influencia del método científico no se dejó sentir hasta la revolución industrial. Con las primeras fábricas vinieron las necesidades de coordinación y eficiencia. El estudio cuidadoso de los problemas de la fábrica, bajo los lineamientos de la investigación científica, resultó beneficioso en el sentido económico debido al volumen de operaciones.

En los Estados Unidos, Frederick W. Taylor fue quien más contribuyó a popularizar el enfoque científico en la administración. Taylor era partidario de la toma de decisiones basada en el análisis exhaustivo, la experimentación cuidadosa y los hechos objetivos en lugar de las reglas como recetas. Como seguidor del método científico, Taylor popularizó sus puntos de vista a través de numerosos discursos, artículos y libros, incluyendo el de *Principles of Scientific Management* (Principios de la administración científica) publicado en 1911.[5]

En los comienzos del siglo XX se hicieron desarrollos importantes cuanto a modelado matemático, en especial para el control de inventarios, análisis de líneas de espera, control de calidad y programación de la producción. En el campo de las matemáticas hubo otro desarrollo importante también en esta época: el de la estadística como un método para el análisis de datos y la toma de decisiones. Pero todos estos desarrollos fueron aplicaciones aisladas individuales. No fue sino hasta la Segunda

[5] F. W. Taylor, *Principles of Scientific Management* (New York: Harper, 1911).

Guerra Mundial que se hicieron esfuerzos conjuntos para atacar los problemas de gran escala en forma cuantitativa.

Cuando desarrollaron el radar, los ingleses buscaron aprender cómo aplicarlo de manera efectiva. En 1939 formaron el primer *grupo de investigación de operaciones.* Este grupo, compuesto de científicos y matemáticos, se separó más tarde, germinando en grupos parecidos dentro de cada rama de especialidad militar, estudiando una amplia gama de problemas. En 1942 se formaron grupos del mismo tipo en los Estados Unidos. Para fines de la guerra, ambos gobiernos estaban convencidos del valor de estos grupos, y la investigación de operaciones continúa hasta la fecha en la mayoría de los sectores gubernamentales.

En la década de los 50 la industria americana comenzó a interesarse en la investigación de operaciones, y este interés creció en la segunda mitad de la década. Es claro que la llegada de las computadoras digitales estimuló este interés. En 1953 se formó la Operations Research Society of America y en el lapso de un año se fundó un grupo similar, The Institute of Management Science. Existe una tercera organización de más reciente creación (1968), The American Institute of Decisión Sciences.

Hoy en día los métodos cuantitativos en administración pueden llamarse de varias maneras: investigación de operaciones, ciencias de la administración, análisis de sistemas, análisis costo-beneficio, estadística. De cualquier manera, la esencia es la misma: ser racional y científico al resolver problemas administrativos.

RESUMEN

Como ayuda para el mejoramiento de las habilidades en la solución de problemas administrativos, se prescribe una dosis general del método científico junto con algunas herramientas y técnicas cuantitativas específicas. Se admite que éste es un programa idealista, ya que supone que se puede estar totalmente informado sobre cada problema, conocer todas las alternativas de solución y ser por completo objetivo en el razonamiento. Es irracional suponer que cualquier persona puede ser por completo racional, pero puede aplicarse la racionalidad acotada.

Los métodos descritos en este libro pueden usarse como guía para el pensamiento, para proporcionar información que ayude a resolver problemas y, en algunos casos, para automatizar la toma de decisiones.

Se usarán números y matemáticas a través del libro, ya que forman una taquigrafía conveniente. Se encontrará que el manejo de los números es más sencillo si se usa una calculadora; consérvese en mente la magnitud, y redondéense los números para reflejar su exactitud.

EJERCICIOS

1-1 Enumérense tres ventajas del método científico. ¿Tiene alguna des ventaja el método?

1-2 Considérese alguna pequeña decisión que se tome todos los días: a qué hora levantarse, qué ropa ponerse, cualquier cosa. *¿Cómo* se toma esa decisión? Revísese la decisión usando el método científico para ver si se llega a la misma conclusión.

1-3 ¿Es satisfactorio ser flojo y descuidado? ¿O es satisfactorio hacer el trabajo lo mejor posible, dando las restricciones prácticas del mundo real? Explíquese.

1-4 Si la gente *no puede* actuar en forma completamente racional, ¿por qué se estudian los métodos del pensamiento racional, incluyendo los métodos cuantitativos?

1-5 Redondéense los resultados de cada una de las operaciones siguientes al número apropiado de dígitos significativos:

a 7.854
− 6.4
1.454

b 3.85 × 4.2 = 16.17

c $ 847.52 exactitud a $1
750.00 exactitud a $10
$1 597.52

BIBLIOGRAFÍA

Hartley, Ronald V.: *Operations Researsh: A Managerial Emphasis* (Pacific Palisades, Calif.: Goodyear, 1976).

Miller, David W., y Martin K. Starr: *Executive Decisions in Operations Research,* 2ª edición. (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1969).

Simon, Herbert: *Administrative Behavior,* 2ª edición. (New York: Macmillan, 1957).

Taylor, F. W.: *Principles of Scientific Management* (New York: Harper, 1911).

Thierauf, Robert J., y Robert C. Klekamp: *Decision Making Through Operations Research,* 2ª edición (New York: Wiley, 1975).

2

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS CUANTITATIVOS

El problema científico crucial para la investigación de sistemas es éste: cómo separar un sistema viable específico para su estudio del resto del universo sin perpetrar una división aniquilante.

Stafford Beer

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje
Características de los sistemas administrativos
Modelos
Dimensionalidad en los modelos
Modelos de toma de decisión
Toma de decisiones bajo certidumbre
Toma de decisiones bajo riesgo
Toma de decisiones bajo incertidumbre
Toma de decisiones bajo conflicto
Resumen
Ejercicios
Bibliografía

La mayoría de las consideraciones de este libro y casi todas las aplicaciones de los métodos cuantitativos en administración tienen lugar en el contexto de modelos. Se ha simplificado la realidad a aproximaciones fáciles de trabajar, con el objeto de enfocar la atención en alguna parte manejable del universo. Dado que los modelos pueden ser tan profundos, este capítulo analiza algunas de sus características. Se examinará la administración como un tema para modelo», se examinarán esquemas de clasificación para los modelos y se presentará un método para clasificar los modelos de teoría de decisiones.

Un modelo es una representación de algún aspecto de la realidad. El avioncito para armar, la muñeca de juguete, el tren que corre alrededor del árbol de Navidad, son todos ellos modelos (véase la tabla 2-1). Las ecuaciones, los conceptos y las teorías también son modelos. En cada caso

TABLA 2-1
Ejemplos de modelos

Avioncito para armar	Planos arquitectónicos	Simulador de la cápsula Apollo
Muñeca	Fotografías	Simulador de manejo
Casa de muñecas	Réplicas	Diagramas
Tren de juguete	Mapa de carreteras	Ecuaciones
Modelo a escala natural de un automóvil	Mapa topográfico	Conceptos
Amasador eléctrico de pan	Globo terráqueo	Teorías

existe un intento de representar o de explicar algo que forma parte del mundo real usando menos que aquel objeto de interés. Esto, por lo general hace que la construcción de un modelo sea más sencilla, menos costosa y menos peligrosa que la construcción real del artículo.

Los modelos matemáticos de interés se usan aquí para explicar o predecir el comportamiento de sistemas o decisiones administrativas. La desventaja principal estriba en su misma naturaleza de modelos; son algo menos que la realidad. El reto para construir un modelo útil es incluir aquello que es pertinente, omitir lo irrelevante y hacer esta diferencia sin excluir ningún factor importante, es decir, sin hacer una "división aniquilante".

La selección del modelo que debe usarse en cualquier situación dada depende tanto del sistema real bajo estudio como del propósito del estudio (véase la tabla 2-1). El tema central de este texto es los sistemas administrativos; en este capítulo se presentarán algunas de sus características comunes. El interés principal estará en los *modelos normativos,* que dicen cómo deben construirse los sistemas. También se explorarán varios *modelos descriptivos* que hablan sobre el comportamiento real de algunos sistemas. Por ejemplo, el método científico es un modelo normativo y el modelo de toma de decisiones administrativas de Simón es descriptivo.

La teoría de decisiones es el estudio de cómo hacer selecciones óptimas de entre un conjunto dado de alternativas. Cómo se hace esto depende en gran parte de la predictibilidad de las consecuencias de cada alternativa. También se describirá en este capítulo un método para clasificar los modelos de teoría de decisiones con base a la predictibilidad de las consecuencias.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo el lector deberá aprender:

1 Las ventajas y limitaciones de aplicar modelos a sistemas administrativos
2 Cómo clasificar los modelos que con frecuencia se usan en las ciencias de la administración
3 Cómo comprobar las dimensiones en un modelo
4 Una clasificación en cuatro categorías de los modelos de toma de decisiones

5 El significado de los siguientes términos:

Modelo	Validez
Normativo	Confiabilidad
Descriptivo	Toma de decisiones bajo certidumbre
Estático	Toma de decisiones bajo riesgo
Dinámico	Toma de decisiones bajo incertidumbre
Sistema abierto	Toma de decisiones bajo conflicto
Sistema cerrado	

CARACTERÍSTICAS DE LOS SISTEMAS ADMINISTRATIVOS

El campo de la *teoría general de sistemas* puede proporcionar algunas ideas sobre las características de los sistemas administrativos. Por *sistema* se entiende cualquier conjunto de partes relacionadas: una compañía, una mesa, un procedimiento contable, un motor, todos ellos son sistemas. Cuando se usan modelos para analizar sistemas administrativos es importante conocer cuán bien se ajustan las características de un modelo a las del sistema que se está estudiando. La técnica de utilizar modelos sencillos para aproximar sistemas complejos no es mala, siempre y cuando no se pierdan de vista las suposiciones y las limitaciones.

Kenneth Boulding sugirió un esquema de clasificación para los sistemas, basado en su complejidad: la tabla 2-2[1] muestra este esquema. En el nivel más bajo, los *armazones,* son todos sistemas *estáticos*. Éstos son sistemas que poseen una estructura pero que no tienen movimiento. Puentes, presas, esquemas de clasificación, registros y organigramas caerían todos en esta categoría.

Los *sistemas dinámicos* o *de movimiento regular* se encuentran en una segunda categoría. Estos sistemas se pueden mover pero sólo siguiendo patrones predeterminados. Al subir en jerarquía, los sistemas tienen características adicionales: retroalimentación, adaptividad, vida, organización social compleja.

Boulding emplea su jerarquía para demostrar que la mayoría de los métodos y modelos que se presentan aquí están diseñados para los tres primeros niveles: no obstante, las organizaciones administrativas pertenecen al octavo nivel. Por ejemplo, un organigrama es una representación estática de algo que en realidad es una organización con vida y dinámica. Entonces, ¿cómo puede manejarse este problema en organizaciones complejas? Boulding sugiere:

> Al acercarnos a los niveles humanos y sociales sucede una cosa curiosa: el hecho de que tengamos, por así decirlo, un camino interno, y de que nosotros mismos *seamos* los sistemas que estamos estudiando, nos permite utilizar sistemas que en realidad no entendemos. Es casi imposible que construyamos una máquina que pueda hacer un poema: sin embargo, los poemas *están* hechos por tontos como nosotros mediante procesos que en gran parte no conocemos.[2]

[1] Kenneth Boulding, "General Systems Theory—The Skeleton of Science," Management *Science* (Abril 1956), pp. 197-208.

[2] ídem.

TABLA 2-2
Jerarquía de complejidad de Boulding

Nivel	*Sistema*	*Características*
9	Trascendental	Último
8	Organizaciones sociales	Sociedad compleja
7	Humanos	Razón, creatividad
6	Animales	Conocimiento propio
5	Genético-social	Vida compleja
4	Sistemas abiertos	Adaptividad, vida
3	Termostatos	Retroalimentación
2	De movimiento regular	Movimiento
1	Armazones	Estructura

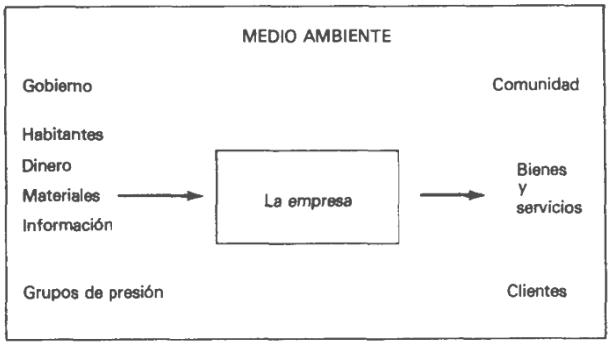
Así, los problemas se manejan considerablemente por la experiencia, la intuición, la perspicacia, la imaginación, el juicio y la suerte. La gran dificultad que presentan estos métodos es que no siempre se tiene suerte.

Puede adquirirse un mejor conocimiento de los sistemas administrativos considerando la diferencia entre sistemas abiertos y cerrados. Básicamente, un sistema *abierto* es aquél que interactúa con su medio ambiente; un sistema *cerrado* no tiene tal interacción. Por supuesto las empresas son sistemas abiertos. Esto se muestra en la figura 2-1. La interacción con el medio ambiente es más dramática cuando se considera que los empleados son tambien clientes, miembros de la comunidad y votantes en ese medio ambiente.

Sin lugar a dudas, todos los sistemas reales son abiertos. Pero cuando construyen modelos de sistemas abiertos, estos modelos necesariamente son sistemas cerrados. La razón es que los sistemas abiertos tienen una in finidad de contactos posibles con su medio ambiente. Como no se puede analizar lo infinito, los modelos quedan limitados a factores "relevantes" como se muestra en la figura 2-2. Desde el momento en que la frontera entre lo relevante y el medio ambiente que se excluyó se vuelve impenetrable, el modelo es cerrado.

Para resumir, las empresas son organizaciones sociales vivas complejas —dinámicas, adaptivas y abiertas. Esto hace que sea difícil modelarlas

FIGURA 2-1
La empresa — un sistema abierto



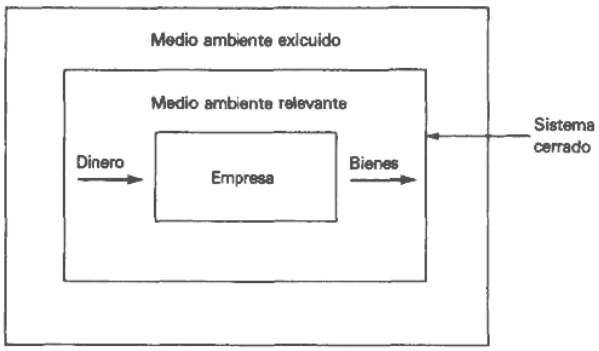


FIGURA 2-2
Modelo de un sistema administrativo

MODELOS

Existen muchas maneras de clasificar los modelos. El distinguir entre modelos *normativos* (llamados a veces prescriptivos) y *descriptivos* es útil al evaluar los resultados del modelo. Con frecuencia, los modelos normativos se usan como guía. La religión personal proporciona un modelo normativo para el comportamiento moral. Los médicos usan un modelo normativo de salud al tratar a sus pacientes. Y el método científico es un modelo prescriptivo para resolver problemas. En cada uno de estos casos el modelo proporciona una guía de cómo se *debe* actuar. Puede no seguirse el modelo con exactitud en cualquier situación dada; puede escogerse seguirlo sólo en parte o tal vez ignorarlo por completo. Aun así, los modelos normativos son bastante valiosos, ya que proporcionan un criterio del mejor curso de acción.

Del análisis de los sistemas administrativos puede concluirse que existen muchas áreas para las que no hay modelos normativos detallados. Por ejemplo, no existe un modelo matemático ideal para una corporación completa.[3] En casos como éste se deberá confiar en los modelos descriptivos. Como ejemplos de modelos descriptivos se tienen los planes arquitectónicos, las fotografías y los modelos de automóviles a escala natural. Pueden ayudar a describir la realidad pero no incluyen ninguna connotación de bueno o malo, óptimo o subóptimo. Los modelos de simulación caen en esta categoría. El mayor uso que se da a los modelos descriptivos es el del conocimiento de cómo se comporta un sistema dado para poder hacer mejoras. En este sentido, los modelos descriptivos son herramientas de trabajo más que guías ideales.

Una segunda taxonomía para los modelos es *concreto* y *abstracto.* Los modelos concretos tienen, en general, algunas características físicas en común con la realidad que se está modelando. Son en sí mismos sistemas reales físicos. El modelo de aeroplano usado para las pruebas del túnel de viento, la maqueta de un edificio y los modelos de automóviles a escala

[3] **Existen algunos modelos generales, como el de los economistas, IM = CM (el ingreso marginal es igual al costo marginal, determina el punto óptimo de operación), pero éstos están lejos de ser adecuados para el gran numero de decisiones necesarias en una corporación.**

natural son modelos concretos. Las réplicas son modelos concretos tan cercanos a la realidad que puede ser difícil diferenciarlos.

Los modelos abstractos son el extremo opuesto de los modelos concretos No tienen características físicas comunes con el original. Los modelos abstractos pueden ser *verbales,* como la descripción de una nueva oficina hecha por un decorador de interiores, o *simbólicos.* Los modelos simbólicos incluyen tanto los modelos matemáticos como los modelos gráficos o pictóricos (por ejemplo, los diagramas de flujo). Pocas veces los modelo; concretos son normativos, mientras los modelos abstractos pueden ser normativos o descriptivos.

Otras formas de clasificación de modelos son por tipo de aplicación (por ejemplo, modelos de inventarios) y por técnica (por ejemplo, modelos de programación lineal). Esto no agota las posibilidades, pero es suficiente para los propósitos de este libro.

Al comparar los modelos debe tenerse en cuenta la *validez,* la *confiabilidad* y la *simplicidad.* Un modelo es válido si lleva a los mismos resultado que se obtendrían en el mundo real. El principio de parsimonia defienda la selección del más simple de dos modelos comparables.[4] En otras palabras, la complejidad debe aceptarse sólo cuando sea necesario.

DIMENSIONALIDAD EN LOS MODELOS

Las variables que se manejarán en este libro tienen dimensiones para describir su naturaleza: dólares, yardas, kilogramos, unidades, años, y así sucesivamente. La lógica de las matemáticas requiere que estas dimensiones sean algebraicamente coherentes en todas las operaciones. En la vida diaria no se restan coles de panes para comprobar el saldo en la cuenta de cheques. Análogamente, tanto las dimensiones como los números, en los modelos que se trabajarán aquí, deberán cumplir con los signos de igualdad Cuando se tienen que sumar o restar dos cantidades las dimensiones deben ser idénticas. Cuando se tienen que multiplicar o dividir, las dimensiones en los dos lados de los signos de igualdad deben ser idénticas. Por supuesto, las constantes no tienen dimensión. Considérese como ejemplo la fórmula para el punto de equilibrio (véase el Cap. 3):

$$BEP_{\text{unidades}} = \frac{FC}{P - VC}$$

en donde BEP_{unidades} = punto de equilibrio, unidades
FC = costos fijos totales, dólares
P = precio, dólares/unidad
VC = costo variable, dólares/unidad

Para verificar las dimensiones de un modelo, se escriben las dimensiones en lugar de las variables y se ve si la expresión se puede reducir una identidad.

[4] **Algunas veces se hace referencia a esto como la aplicación del rastrillo de Ockham.**

$$\text{Unidades} = \frac{\text{dólares}}{\frac{\text{dólares}}{\text{unidad}} - \frac{\text{dólares}}{\text{unidad}}} = \frac{\text{dólares}}{\frac{\text{dólares}}{\text{unidad}}}$$

$$\text{Unidades} = \text{unidades}$$

Nótese que al restar dólares/unidad de dólares/unidad, queda una cantidad con la misma dimensión.

Cuando se trata de desarrollar un modelo, puede ser muy importante comprobar sus dimensiones. Si éstas no se igualan, entonces el modelo no se puede usar. Las dimensiones pueden servir también como una verificación de las fórmulas cuando no se tiene la certeza de que están correctas. Nótese sin embargo, que el que las dimensiones sean apropiadas no garantiza en sí la validez del modelo.

Se hará una observación más sobre las formas de expresar las dimensiones. Cuando las dimensiones de una variable son compuestas, con frecuencia se escriben como una serie de divisiones. Por ejemplo, el costo de mantener una unidad de inventario (véase el Cap. 13), tiene unidades de dólares/unidad/año. Esto se lee "dólares por unidad por año". Algebraicamente es

$$\frac{\text{dólares}}{\text{unidad} \times \text{años}}$$

MODELOS DE TOMA DE DECISIÓN

La teoría de decisiones proporciona una manera útil de clasificar modelos para la toma de decisiones. Aquí se usará "toma de decisiones" como un sinónimo de "selección". Se supondrá que se ha definido el problema, que se tienen todos los datos y que se han identificado los cursos de acción alternativos. La tarea es entonces seleccionar la mejor alternativa. La teoría de decisiones dice que esta tarea de hacer una selección caerá en una de cuatro categorías generales dependiendo de la habilidad personal para predecir las consecuencias de cada alternativa.

Categorías	*Consecuencias*
Certidumbre	**Deterministas**
Riesgo	**Probabilistas**
Incertidumbre	**Desconocidas**
Conflicto	**Influidas por un oponente**

TOMA DE DECISIONES BAJO CERTIDUMBRE

Si se pueden predecir con certeza las consecuencias de cada alternativa de acción, entonces se tiene una tarea de toma de decisiones bajo certidumbre. Otra manera de pensar en esto es que existe una relación directa

de causa y efecto entre cada acto y su consecuencia. Si está lloviendo, ¿deberá llevarse un paraguas? Si hace frío, ¿deberá llevarse un abrigo? Ya sea que se lleve o no el paraguas o el abrigo, las consecuencias son predecibles.

Una buena parte de las decisiones que se toman a diario cae dentro de esta categoría. ¿En dónde comer? ¿En dónde comprar el material de la oficina? ¿Qué modo de transporte usar para los productos? Conceptualmente, la tarea es bastante sencilla. Simplemente se evalúan las consecuencias de cada acción alternativa y se selecciona la que se prefiere. Sin embargo, en la práctica, esto puede resultar lejos de ser fácil. El número de alternativas puede ser muy grande (o infinito) lo que haría muy laboriosa la enumeración. Por ejemplo, si una empresa usa 10 000 kilogramos anuales de polvo limpiador, ¿cómo debe guardarse el inventario? Se tienen disponibles 10 000 alternativas (más aún si se permiten cantidades fraccionales).

Muchos de los modelos y técnicas de este libro están diseñados para manejar la toma de decisiones bajo certidumbre. El análisis de punto de equilibrio, programación lineal, programación de la producción y control de inventarios, todo ello incluye modelos determinísticos que serán útiles para el lector al evaluar las consecuencias y seleccionar el mejor curso de acción.

TOMA DE DECISIONES BAJO RIESGO

Esta categoría incluye aquellas decisiones para las que las consecuencias de una acción dada dependen de algún evento probabilista. Por ejemplo supóngase que se está a cargo de la venta de árboles de Navidad para iglesia. La primera tarea es decidir cuántos árboles ordenar para la siguiente temporada. Supóngase que se debe pagar $3.50 por cada árbol, pueden ordenar sólo lotes de 100 y se planea venderlos a $8 cada uno. Por supuesto, si no se venden, no tienen valor de recuperación. Se estudian 1os registros de ventas pasadas en la iglesia y se analiza el crecimiento potencial de las ventas con otros vendedores, llegando a las siguientes estimaciones para la próxima temporada:

Venta de árboles	*Probabilidad*
100	0.3
200	0.3
300	0.4
	1.0

Con estos datos se puede calcular la ganancia para cada combinación de cantidad ordenada y ventas eventuales. Por ejemplo, si se ordenan 300 árboles y de hecho se venden sólo 200, la utilidad neta será de $4.50 por cada árbol vendido menos una pérdida de $3.50 por los árboles no vendidos, es decir:

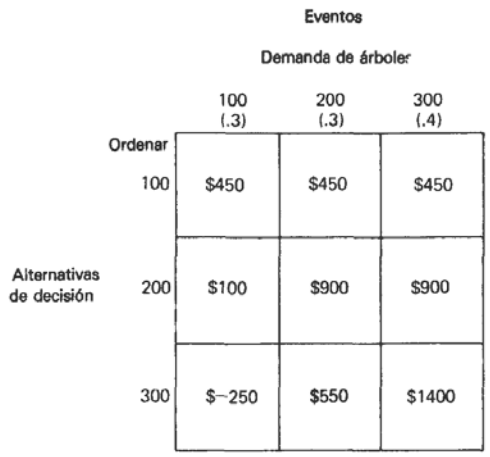


FIGURA 2-3
Matriz de pagos

$$200(\$8 - \$3.50) - 100(\$3.50) = \$900 - \$350 = \$550$$

Si se hace esto para cada una de las combinaciones, se obtienen los resultados que se muestran en la figura 2-3. Ahora, observando lo que se llama la matriz de pagos, ¿cuántos árboles se deberán ordenar? Si se ordenan 100, se tiene la seguridad de una ganancia de $450. Si se ordenan 200, puede ganarse $900 o $100. Una orden de 300 árboles tiene una utilidad potencial que fluctúa entre –$250 y + $1 400. ¿Cuál debe escogerse?

El resultado más importante de teoría de decisiones bajo riesgo es que debe seleccionarse la alternativa que tenga el mayor *valor esperado.* En el capítulo 4 se describe cómo encontrar el valor esperado de una alternativa, de manera que no se hará este cálculo aquí. Baste decir que esto es equivalente a "apostar al promedio a largo plazo". Esto es, se debe seleccionar aquella alternativa con el pago promedio más alto.

Existen muchas decisiones administrativas que pueden catalogarse como toma de decisiones bajo riesgo. Algunas de ellas son:

¿Deberá introducirse un nuevo producto en particular?
¿Deberá ofrecerse más para obtener un contrato?
¿Deberá construirse una nueva planta o ampliarse la que se tiene?
¿Cuántos pasteles deberá producir una pastelería para la venta diaria?
¿Deberá una compañía petrolera realizar pruebas sísmicas costosas antes de hacer una nueva perforación?
¿Deberá iniciarse un nuevo programa costoso de propaganda?

En cada uno de estos casos se tienen elementos de un problema de toma de decisiones bajo riesgo: al menos dos cursos alternativos de acción, resultados probabilísticos y la habilidad para determinar (o hacer estimaciones razonables) las probabilidades de los eventos.

A estas decisiones tomadas una sola vez pueden agregarse situaciones de decisiones repetitivas: inventarios, líneas de espera, programación de la

producción, pueden todas involucrar decisiones bajo riesgo. Los capítulos posteriores tomarán en cuenta estos casos.

TOMA DE DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE

Ésta es una categoría muy común para las decisiones aunque de nombre peculiar. Se parece a la toma de decisiones bajo riesgo, con una diferencia importante. Ahora no se tiene conocimiento de las probabilidades de los eventos futuros, no se tiene idea de cuan posibles sean las diferentes consecuencias. En el ejemplo de los árboles de Navidad equivaldría a tratar de decidir cuántos árboles ordenar sin tener la más remota noción de cuántos pueden venderse. Otro ejemplo sería el de tratar de adivinar si al tirar una moneda al aire el resultado es cara o cruz sin saber si la moneda tiene dos caras, es legal, o tiene dos cruces. Otro ejemplo sería también el de tratar de decidir si se debe aceptar una oferta de trabajo sin saber si después se tendrá una mejor.

Esta categoría es realmente como disparar en la obscuridad. ¿Habrá una manera óptima de disparar en la obscuridad? En realidad no. Aún así se pueden ofrecer varios métodos para manejar problemas de este tipo.

Primero debe tratarse de reducir la incertidumbre obteniendo información adicional sobre el problema. Con frecuencia esto basta para que la solución sea evidente. Si esto falla, se tienen varios caminos abiertos.

Una manera de manejar este tipo de situaciones es introduciendo abiertamente en el problema los sentimientos subjetivos de optimismo y pesimismo. Esto no es tan malo como parece; en muchas ocasiones, los sentimientos subjetivos tienen una base razonable. Un ejemplo es la decisión de cuántos árboles de Navidad ordenar. Se puede tener razón al pensar que las ventas de árboles deben ser buenas: la congregación de la iglesia es grande, habrá buena publicidad y no hay competencia en el área.

Si se es una persona optimista, puede emplearse una estrategia *maximax*. Esto significa que se selecciona la acción que maximiza el pago máximo. En la figura 2-3 el más grande de todos es $1 400, de forma que con este enfoque deben ordenar 300 árboles.

Por otra parte, si se es pesimista, se puede ser superconservador y emplear una *estrategia maximin*. Aquí se selecciona la acción con el mayor de los pagos mínimos. En la figura 2-3, los pagos mínimos para las tres acciones son $450, $100 y —$250. Se selecciona el más grande de estos —$450— es decir, se ordenan tres. En efecto, se está suponiendo que ocurrirá el peor evento posible y se está seleccionando la mejor acción bajo esa circunstancia.

Maximax y maximin son los dos extremos. Por supuesto, se podría seleccionar alguna acción intermedia.

Una estrategia alternativa consiste en convertir el problema a uno de toma de decisiones bajo riesgo, para que pueda hacerse una selección óptima. Primero pueden expresarse aquellos conocimientos o sentimientos que se tengan sobre los eventos en términos de una distribución de probabilidad. Esto fue lo que se hizo en el ejemplo de los árboles de Navidad. Recuérdese que se dijo que las probabilidades para los diferentes niveles de

ventas estaban basados en los registros de ventas pasadas y en la consideración del crecimiento en las mismas. Éstas son, entonces, estimaciones subjetivas de probabilidad.

Si no se tienen bases para hacer estimaciones subjetivas, se puede emplear el *principio de la razón insuficiente.'* Esto significa que puede suponerse que todos los eventos son igualmente probables. Así para las ventas de Navidad, se le asignará una probabilidad de 1/3 a cada evento.

No debe sentirse mal el lector si piensa que todo esto no tiene sentido. En apariencia, así es. Pero no se pierdan de vista los comentarios de Boulding sobre la habilidad personal para usar sistemas que en realidad no se entienden. En muchas de las decisiones bajo incertidumbre se puede, de hecho, expresar el grado personal de optimismo, o convertir el problema a riesgo con una exactitud razonable. Llámese intuición, experiencia, juicio, suerte o como se desee. El hacer esto mejorará la toma de decisiones en mayor medida que cuando simplemente se hace un disparo en la obscuridad.

TOMA DE DECISIONES BAJO CONFLICTO

Esta es la última de las cuatro categorías. Aquí se tienen aquellos casos de toma de decisiones bajo incertidumbre en los que hay un oponente. Las probabilidades de los eventos no sólo se desconocen; están influenciadas por un oponente cuya meta es vencer. Ésta es la situación típica en cualquier competencia: béisbol, fútbol, póquer, blackjack, los negocios y la guerra. En el marco teórico, éstos se llaman *juegos y teoría de juegos;* en el capítulo 5 se exploran las estrategias óptimas para cada jugador. Hasta el momento, los resultados teóricos están limitados; no espere descubrir cómo volverse invencible en el póquer. Sin embargo, existen algunos conceptos útiles relacionados con la competencia entre las empresas y en las negociaciones obrero-administrativas.

RESUMEN

Los modelos cuantitativos están diseñados para ayudar a la toma de decisiones administrativas. Proporcionan un método objetivo y lógico para analizar los sistemas administrativos en un esfuerzo que posibilite tomar las decisiones óptimas. Con frecuencia, emplearlos resulta menos costoso, más sencillo y más seguro que hacer pruebas en su equivalente real. Sin embargo, estas ventajas significativas no se obtienen sin limitaciones.

La complejidad de los sistemas administrativos puede observarse en la jerarquía de sistemas de Boulding. La mayoría de los métodos analíticos se refieren a sistemas cerrados de los niveles más bajos —los armazones, los sistemas de movimiento regular y los termostatos— mientras que los sistemas administrativos operan sobre el octavo nivel. Así, los sistemas administrativos son sistemas sociales dinámicos adaptivos y complejos y abiertos a la influencia del medio ambiente. Por lo tanto, los modelos, en este libro, serán sólo aproximaciones a la realidad.

Entonces, con estas limitaciones en mente, se consideraron varios esquemas de clasificación para los modelos. En este texto se estudiarán mo-

délos normativos, abstractos y simbólicos. Al aplicarlos, estos modelos se juzgarán en cuanto a su validez, confiabilidad y simplicidad. Aún más, todos los modelos deberán ser correctos en sus dimensiones.

De la teoría de decisiones se puede adoptar un esquema de clasificación en cuatro categorías para la toma de decisiones: certidumbre, riesgo, incertidumbre y conflicto. Las decisiones se clasifican entonces sobre la base de su predictibilidad de las consecuencias de cada acción alternativa. Con excepción del capítulo 5, "Teoría de juegos", todos los métodos y modelos que se encuentran en este libro caen dentro de las primeras dos categorías.

EJERCICIOS

2-1 Clasifíquese cada uno de los siguientes sistemas en la jerarquía de Boulding:
- *a* Un gato
- *b* Un *bat* de béisbol
- *c* Un sistema de inventario
- *d* La religión
- *e* Las funciones administrativas

2-2 Dado que cada uno de los objetivos que se nombran es un modelo clasifíquese cada uno de acuerdo a los descriptores: normativo o descriptivo, concreto o abstracto, verbal o simbólico (si es abstracto):
- *a* Un avioncito de juguete
- *b* Un globo terráqueo
- *c* La descripción de un trabajo
- *d* Un simulador de manejo
- *e* Una ecuación
- *f* Un organigrama

2-3 Verifíquense las dimensiones del siguiente modelo:

$$W_q = \frac{A}{S(S - A)}$$

en donde Wq = minutos/unidad
A = unidades/minuto
S = unidades/minuto

2-4 Verifíquense las dimensiones del modelo que sigue:

$$X = \frac{7YZ - Y^2}{8Z + Y^2}$$

en donde X = dólares/año
Y = años
Z = dólares/año

2-5 Verifíquense las dimensiones del modelo:

$$P = \frac{I}{TR}$$

en donde P = dólares
T = años
R = porcentaje/año
I = dólares

Nota: El porcentaje no es una dimensión.

2-6 Cada uno de los siguientes incisos es un ejemplo de decisión. Colóquese cada decisión en su categoría apropiada: certidumbre, riesgo, incertidumbre, conflicto

a La selección de un número para jugar a la ruleta
b La decisión de qué ropa ponerse en la mañana
c La decisión de elevar o no el precio de un producto
d Un monopolio que decide un aumento de precio
f Un experto en ciencias de la administración que decide si forzar o no la adopción de su nuevo modelo.

BIBLIOGRAFÍA

Boulding, Kenneth: "General Systems Theory— The Skeleton of Science", *Management Science* (Abril 1956), pp. 197-208.

Miller, D. W., y M. K. Starr: *Executive Decisions and Operations Research,* 2ª edición (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, N.J., 1969), capítulos 7-9.

Forrester, Jay W.: "Industrial Dynamics—After the First Decade", *Management Science* (Marzo 1968), pp. 398-415.

3

USO DE DATOS PARA LA TOMA DE DECISIONES

Determina primero los hechos, después puedes tergiversarlos como te plazca.

Mark Twain

Los hechos no dejan de existir porque se ignoren.

Aldous Huxley

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje
¿Qué son los datos?
Tipos de datos
Requerimientos de datos en diferentes niveles de la organización
Fuentes de datos
Los datos como entrada a los modelos
Contribuciones de los contadores
Relaciones de tipo contable
  Comportamiento del costo
  Comportamiento del ingreso
  Algunos requisitos
Análisis de punto de equilibrio lineal
  Ejemplo de una cámara de comercio
  Ejercicio de práctica (3-1)
Análisis de punto de equilibrio no lineal
  Ejemplo de fabricación
  Ejercicio de práctica (3-2)
Análisis de punto de equilibrio con productos múltiples
  Un ejemplo de raquetas
  Ejercicio de práctica (3-3)
Decisiones de hacer o comprar
  Ejemplo de un proceso de selección
  Ejercicio de práctica (3-4)
Exceso de capacidad de planta
Dumping de un producto
Resumen
Ejercicios
Bibliografía

Definitivamente, la toma de decisiones es la función administrativa más importante. En una gran medida, un administrador se evalúa por la cali-

dad de las decisiones que toma. Es típico que los buenos administradores sigan un proceso para tomar decisiones, definir los objetivos, recabar los datos, generar los posibles cursos de acción, evaluar las alternativas, tomar la decisión y seguir adelante.

Uno de los primeros pasos, muy importante, en el proceso de toma de decisiones, es la obtención de los *datos.* El papel de los datos al tomar una decisión es análogo al de la gasolina en un automóvil: los dos ponen en marcha el sistema. Esta analogía es en particular idónea cuando se trata de métodos cuantitativos. Como se verá a lo largo de este libro, los métodos cuantitativos requieren que se realice algún "trabajo" respecto de tener los datos disponibles para procesarlos.

A veces los administradores toman buenas decisiones sin coleccionar ni analizar sistemáticamente los datos. Pero, como dijo Aldous Huxley, "Los hechos no dejan de existir porque se ignoren". Y cuando se ignoran, la posibilidad de tomar una decisión de alta calidad decrece.

En este capítulo se analiza el uso de datos en la toma de decisiones. Obsérvese lo que los datos son, los diferentes tipos de datos, qué datos se necesitan en los distintos niveles de la organización para fundamentar la toma de decisiones, otras fuentes de datos y cómo pueden "introducirse" los datos en un modelo para procesarlos. Desde hace mucho, los contadores han sido los guardianes de los datos de una organización. Han desarrollado conceptos, esquemas de clasificación y modelos sencillos que proporcionan información útil a los administradores al manejar datos de costos e ingresos y como ayuda en sus responsabilidades de toma de decisiones. En este capítulo se consideran estas contribuciones, a las que se hace referencia como métodos de análisis de *costo, utilidad y volumen.* Para ser más específicos, se exploran el análisis de punto de equilibrio lineal y no lineal, el análisis de punto de equilibrio de productos múltiples, las decisiones de hacer o comprar y las decisiones sobre exceso de capacidad de planta y el *dumping* de un producto.*

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Con el estudio de este capítulo, el lector aprenderá:

1 Los diferentes tipos y fuentes de datos
2 Cómo se usan los datos para respaldar la toma de decisiones
3 Cómo varían.los costos y los ingresos con el volumen de producción
4 Cómo llevar a cabo un análisis de punto de equilibrio
5 Cómo llevar a cabo otros tipos de análisis de costo, utilidad y volumen
6 El significado de los siguientes términos:

Datos	Análisis de costo, utilidad y volumen
Datos de transacciones	
Datos internos	Punto de equilibrio
Datos externos	Margen de contribución
Datos objetivos	Porcentaje de contribución
Datos subjetivos	Análisis de sensitividad

***N. del T. *Dumping* significa lanzar al mercado un producto a bajo precio.**

Costos increméntales
Decisiones de hacer o comprar
Gráfica cruzada
Dumping del producto

¿QUÉ SON LOS DATOS?

En el mundo computerizado de hoy, casi todas las personas poseen alguna apreciación de la importancia de los datos. Son los datos los que se procesan en la computadora para proporcionar información. Los datos son una base parcial sobre la que se toman las decisiones. Los datos ayudan a describir los sistemas del mundo real. Todas estas perspectivas son correctas y útiles para entender el papel de los datos.

Antes de proseguir, se considerará la definición formal de los datos. Los *datos* son hechos o conceptos conocidos o supuestos y generalmente se expresan en forma numérica. La tasa de arrendamiento corriente, el número de unidades producidas en el período anterior y los salarios iniciales para nuevos vendedores son ejemplos de datos.

Como se sabe, las organizaciones conservan cantidades voluminosas de datos. Aunque el gobierno dicta algunos datos, la información se guarda, por considerarse importante para la organización. Los datos reflejan lo que sucedió en el pasado y lo que está sucediendo. Todavía más importante es que los datos pueden ser útiles para tomar decisiones sobre el futuro.

Es común en cursos de métodos cuantitativos suponer la disponibilidad de los datos y pasar con rapidez a procedimientos elegantes de análisis. Desafortunadamente, como lo saben los analistas prácticos, los datos no siempre están disponibles. La obtención de los datos con frecuencia es el paso más costoso y laborioso al aplicar los métodos cuantitativos. En consecuencia, parece apropiado considerar los datos en cuanto a su relación con la aplicación de los métodos cuantitativos de análisis.

TIPOS DE DATOS

Los datos que más conservan las organizaciones son lo que los especialistas en información llaman *datos de transacciones.* Éstos son datos que resultan de las transacciones comerciales diarias de una organización. Los bancos procesan los depósitos y retiros de sus clientes. Las compañías manufactureras venden los productos que producen. Las universidades procesan las cuotas de inscripción de los estudiantes. Los datos de transacciones se conservan sobre todo porque es importante para la organización guardar re gistros de lo que sucede.

La mayoría de los datos que guarda una organización también pueden clasificarse como *datos internos.* Éstos están asociados con lo que pasa dentro de la organización. Los datos de transacciones también son datos internos, pero existen datos internos que no son datos de transacciones. Por ejemplo, las estimaciones de ventas futuras serían datos internos, pero no de transacciones.

En menor grado que los datos internos, una organización conserva *datos externos y del medio ambiente.* Éstos se refieren al medio en que opera la organización. Gráficas de ventas industriales, tasas de impuestos fede-

rales y el producto interno bruto (PIB) son ejemplos de datos externos que puede guardar una organización.

Otra forma en que pueden clasificarse los datos es si son objetivos o subjetivos. Los *datos objetivos* reflejan hechos o conceptos que no requieren subjetividad en su interpretación. Por ejemplo, si los registros de una compañía indican 5 000 unidades vendidas el mes pasado, esto sería un dato objetivo. Por otra parte, si se piensa que pueden venderse 6 000 unidades el mes próximo, esto sería un *dato subjetivo,* ya que refleja creencias subjetivas. Las organizaciones almacenan muchos más datos objetivos que subjetivos.

REQUERIMIENTOS DE DATOS EN DIFERENTES NIVELES DE LA ORGANIZACIÓN

Las necesidades de datos tienden a diferir con los niveles organizacionales. Esto no sorprende, ya que la naturaleza de la toma de decisiones varía al escalar la pirámide de la organización; véase la tabla 3-1. La administración de bajo nivel tiene como función primordial lo que Robert Anthony llama *control operativo.*

> El control operativo es el proceso de asegurar que las tareas específicas se lleven a cabo de manera eficaz y eficiente.[1]

Por su misma naturaleza, esta actividad se enfoca sobre lo que sucede dentro de la organización. En consecuencia, los datos necesarios para respaldar la toma de decisiones tienden a ser internos. La necesidad también es más de datos objetivos que subjetivos. En muchos casos estas necesidades se satisfacen en forma fácil, ya que son datos objetivos internos que la organización guarda de manera natural.

La administración media está activamente incluida en el *control administrativo.*

> El control administrativo es el proceso por el cual los administradores aseguran que se obtengan los recursos y se empleen en forma eficaz y eficiente en el logro de los objetivos de la organización.[2]

Mientras que la administración media todavía necesita datos objetivos internos, la obtención eficaz y eficiente de recursos del medio externo también crea la necesidad de datos externos y subjetivos. Como ya se sugirió, los datos subjetivos externos no se almacenan en forma rutinaria ni los guarda la organización como lo hace con otros datos.

La alta administración tiene responsabilidades importantes en cuanto a la *planeación estratégica.*

[1] Robert N. Anthony, *Planning and Control Systems —*A *Framework for Analysis* (Cambridge, Mass.: División de Investigación, Colegio de Graduados de Administración, Universidad de Harvard, 1965), p. 18.

[2] Ibid. p. 17.

> La planeación estratégica es el proceso de decidir sobre los objetivos de la organización, sobre los cambios en estos objetivos, sobre los recursos para lograr estos objetivos y sobre las políticas que han de regir la adquisición, el uso y la disposición de estos recursos.[3]

En estos tiempos de rápidos cambios, la planeación estratégica demanda el examen constante del medio ambiente externo. La escasez de materia prima básica, la fluctuación del valor del dólar y las nuevas leyes de protección de la ecología, son ejemplos de cuándo se necesitan datos subjetivos externos para respaldar la toma de decisiones de la alta administración.

Esta breve consideración de la naturaleza de la toma de decisiones en los diferentes niveles administrativos debe establecer claramente que las necesidades de datos y la facilidad con que éstos se obtienen varían mucho. Aun cuando casi todas las necesidades de la administración a bajo nivel y de la administración media son de datos objetivos e internos, la alta administración tiene una necesidad crítica de datos subjetivos y externos. Los requerimientos de esta última son los más difíciles de satisfacer, ya que este tipo de datos no se generan por las operaciones diarias de la organización. En consecuencia, casi siempre se requiere un esfuerzo y cuidado considerables al recabar y obtener los datos subjetivos externos.

FUENTES DE DATOS

Dada la necesidad, ¿de dónde se obtienen los datos? Es obvio que depende de qué datos se necesiten. En el caso de datos de transacciones, provienen primordialmente del sistema contable de la organización. Los datos pueden proporcionarse sobre una base regular en la forma de *informes programados,* o pueden prepararse en forma especial cuando se demanden y bajo las especificaciones del administrador como un *informe pedido.* Debido a los adelantos en *sistemas de información basados en computadoras*, se ha facilitado mucho la preparación de informes para la administración. Los dispositivos secundarios de almacenamiento, como discos magnéticos, permiten que la organización conserve una cantidad virtualmente ilimitada

TABLA 3-1
Niveles adminsitrativos, responsabilidades de toma de decisiones y requerimientos de datos

Nivel administrativo	*Responsabilidades importantes de toma de decisiones*	*Requerimientos de datos**
Alta administración	Planeación estratégica	Gran cantidad de datos externos y subjetivos
Administración media	Control administrativo	Algunos datos externos y subjetivos
Baja administración	Control operativo	Primordialmente datos internos y objetivos

*Los requerimientos de datos a altos niveles administrativos también incluyen los requerimientos a niveles más bajos.

[3] *Ibid*. p. 16

de datos. Debido a los desarrollos de software, en lo que se refiere a *sistemas administrativos de bases de datos,* ha sido posible que se almacenen, se conserven y se extraigan con facilidad datos de los dispositivos secundarios. En el caso de sistemas no computarizados, el obtener datos comprensivos es más laborioso, pues es necesaria la búsqueda manual en los registros de las transacciones de la organización.

Como ya se dijo, no todos los datos internos son datos de transacciones. En general, tales datos internos son un poco más difíciles de obtener, puesto que es menos probable que sé proporcionen en forma de informes programados. En el caso de datos internos subjetivos, es muy poco probable que los guarde la organización. Puede ser necesario consultar a las personas apropiadas en la empresa para obtenerlos.

Los datos externos están disponibles sólo cuando se ha hecho una planeación cuidadosa previa a la demanda de los datos. No son "capturados" en forma automática por el sistema de información de la organización. Los datos externos pueden obtenerse de una amplia variedad de fuentes. El gobierno federal publica muchos datos, algunos de los cuales son útiles a las organizaciones. Algunas industrias tienen asociaciones de intercambio que proporcionan datos de interés a sus miembros. Una organización puede emprender un estudio especial con objeto de obtener los datos externos. Tales estudios son comunes en el área de comercialización. Existen muchas firmas de consultores que, por honorarios, proporcionan datos externos específicos. Estos servicios prevalecen en particular en áreas de pronósticos económicos.

LOS DATOS COMO ENTRADA A LOS MODELOS

Los datos en sí no siempre proporcionan bases suficientes para llegar a una decisión. Con frecuencia es necesario seguir con el proceso de los mismos hasta que queden en una forma más útil. En este caso, los datos son una entrada a un modelo que proporciona la estructura para procesarlos. El modelo puede ser sencillo como un modelo de básico de tipo contable, o puede ser más complejo como uno de simulación, de líneas de espera o de programación lineal. Independientemente del modelo que se use, antes deben proporcionarse los datos apropiados.

CONTRIBUCIONES DE LOS CONTADORES

Dado que se está expuesto sólo en forma superficial al campo de la contabilidad, es común pensar que se refiere sólo a deudas y créditos, estados de balance, estados de ingresos, etc. En otras palabras, con frecuencia se tiende a pensar en la contaduría en términos de *contabilidad financiera.* Por años, los contadores han sido los guardianes de la mayor parte de los datos de la organización y, con frecuencia, los administradores acuden a los contadores para que les proporcionen análisis específicos que respalden la toma de decisiones. Esta área de la contaduría se conoce como *contabilidad administrativa* y representa una de las contribuciones más antiguas e importantes para el análisis cuantitativo en la administración. Algunas

de estas contribuciones proporcionan un buen punto de partida para ver cómo se introducen los datos a un modelo y se procesan a través de éste y cómo se usan los resultados para respaldar la toma de decisiones.

RELACIONES DE TIPO CONTABLE

Los contadores manejan en primer lugar los datos de costos e ingresos. A través del tiempo han observado relaciones que tienden a captar la naturaleza del comportamiento del costo y el ingreso. Al análisis de estas relaciones se le llama con frecuencia *análisis de costo, utilidad y volumen.* Para muchas organizaciones representa un tipo muy importante de análisis cuantitativo. El análisis de costo, utilidad y volumen puede considerarse desde una perspectiva tanto gráfica como matemática. Cada una de ellas tiene sus méritos y se estudiarán ambas. El enfoque gráfico proporciona un entendimiento sencillo y rápido, el enfoque matemático agrega la exactitud y la lógica de las matemáticas.

Comportamiento del costo

Al comenzar el estudio del análisis de costo, utilidad y volumen con el comportamiento de los costos básicos, es útil distinguir entre costos fijos, costos variables por unidad y costos variables totales. Los *costos fijos* son costos que no varían con el volumen de producción. Permanecen constantes a diferentes niveles de producción. Ejemplos de costos fijos son la renta por un edificio, el seguro, los impuestos prediales y los salarios administrativos. En la figura 3-1 se muestra cómo permanecen constantes los costos fijos a diferentes volúmenes de producción.

Los *costos variables totales* son proporcionales al volumen de producción. La materia prima, la mano de obra directa y algunos gastos de ventas son ejemplos de costos que aumentan con el nivel de producción. En la figura 3-1 se muestra cómo pueden variar estos costos. Los costos variables totales se determinan multiplicando el *costo variable por unidad* por el volumen de producción.

Los *costos totales* son la suma de los costos fijos y los costos variables totales. En la gráfica, son la suma vertical de las dos curvas de costos; véase la figura 3-1.

Como se ha sugerido, es útil poder representar los costos con notación matemática:

Sea
TC = costos totales
TVC = costos variables totales
FC = costos fijos
X = volumen de producción
VC = costos variables por unidad

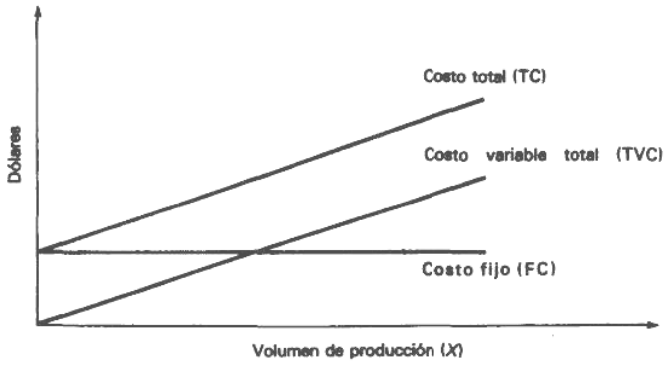


FIGURA 3-1

Comportamiento del costo.

Puede decirse que:

$$TC = FC + TVC \qquad (3\text{-}1)$$

o

$$TC = FC + VC*X \qquad (3\text{-}2)$$

Comportamiento del Ingreso

El *ingreso total* también está relacionado con el volumen de producción. A más unidades de bienes o servicios vendidos, mayores ingresos totales. Como se muestra en la figura 3-2, los ingresos totales varían en proporción a la producción. En la figura 3-2 se supone un precio de venta fijo. Los ingresos totales pueden determinarse multiplicando el precio de venta por unidad de un bien o servicio por el número de unidades proporcionadas. Matemáticamente esto se expresa como sigue:

Sea TR = ingreso total
P = precio de venta
X = volumen de producción

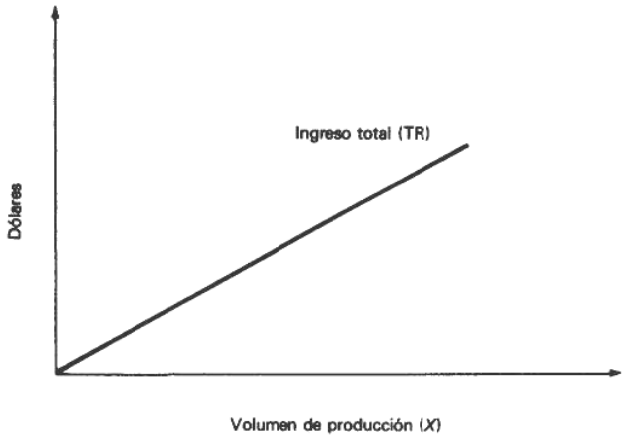
Entonces, puede decirse que:

$$TR = P*X \qquad (3\text{-}3)$$

Algunos requisitos

El comportamiento del costo y el ingreso que se acaba de describir está simplificado en cierto modo, aun cuando es útil. Los costos y los ingresos no siempre varían como se describió. Por ejemplo, es común que los costos

FIGURA 3-2
Comportamiento del ingreso total.



fijos no sean constantes en *todos* los niveles de producción. Más bien, es muy probable que sean fijos sólo sobre un *rango* de producción. Sucede que los costos fijos varían siguiendo una curva en forma "escalonada", como se muestra en la figura 3-3. Las situaciones como aquella en la que debe comprarse una máquina adicional para satisfacer un incremento en la tasa de producción o en la que debe rentarse otro almacén para los artículos adicionales que se están produciendo, ilustran este tipo de comportamiento del costo.

Los costos variables por unidad no siempre son constantes. Por ejemplo, algunas veces, cuando se compran muchos artículos, se obtiene un descuento por cantidad. Esto puede llevar a un comportamiento del costo variable total como el que se muestra en la figura 3-4.

Muchos costos no son costos fijos o variables "puros". Algunos costos son *semivariables;* contienen tanto componentes fijos como variables. Por ejemplo, los gastos generales y administrativos y los gastos indirectos de fabricación incluyen casi siempre costos semivariables. El comportamiento del costo semivariable se ilustra en la figura 3-5.

Los ingresos totales pueden aumentar de una manera no lineal con la producción. Por ejemplo, con objeto de realizar ventas de alto nivel, puede ser necesario ofrecer descuentos en el precio a ciertos clientes. Esto puede resultar en el comportamiento del ingreso total que se ilustra en la figura 3-6.

Las complejidades que se han descrito ahora son probablemente más la regla que la excepción en el mundo de los negocios. Es lógico preguntarse cuáles son las implicaciones para el analista que debe trabajar con estas complejidades del mundo real. Pueden darse dos respuestas posibles. Primero, algunas veces los datos pueden manipularse de tal forma que todavía puedan emplearse en modelos sencillos. Tómense como ejemplo los costos semivariables. Pueden identificarse las componentes fija y variable y procesar cada una en forma separada. Segundo, cuando el uso de modelos sencillos no proporciona la descripción necesaria, pueden usarse modelos más complejos. En este capítulo se analizan una variedad

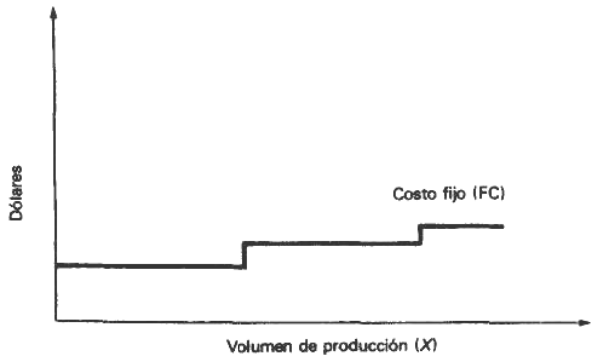


FIGURA 3-3
Comportamiento "escalonado" del costo fijo.

de modelos y de análisis de costo, utilidad y volumen diferentes en complejidad.

ANÁLISIS DE PUNTO DE EQUILIBRIO LINEAL

Existen muchas aplicaciones del análisis de costo, utilidad y volumen, pero quizá la más popular es el *análisis del punto de equilibrio.* Su parte central está en determinar cuánto debe venderse de un producto o servicio para salir a mano, esto es, en encontrar el punto en que los ingresos recibidos son iguales que los gastos realizados.

Como un primer examen del análisis del punto de equilibrio se toma el caso más simple, aquel en que todos los costos e ingresos son lineales. Después se relaja esta suposición al estudiar el modelo no lineal. El estudio incluye tanto el método de análisis gráfico como el matemático.

En la figura 3-7 se muestran las curvas de costo e ingreso para el análisis de punto de equilibrio lineal. Hasta el punto marcado como punto de equilibrio (BEP), los costos son mayores que los ingresos y la organización experimenta pérdidas. En el punto de equilibrio las curvas se intersecan y no hay ni pérdidas ni ganancias. Después del punto de equilibrio hay utilidades.

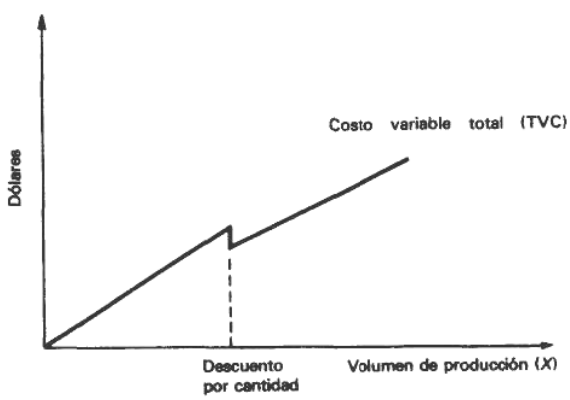
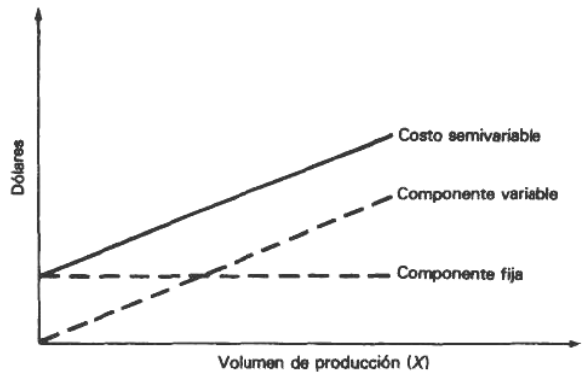


FIGURA 3-4
Costo variable total con descuento por cantidad.

FISURA 3-5
Comportamiento del costo semivariable.



También es posible identificar el punto de equilibrio algebraicamente. Se sabe que en el BEP los costos totales TC son iguales que los ingresos totales TR. Por tanto, en el BEP:

$$TC = TR$$

o

$$FC + VC*X = P*X$$

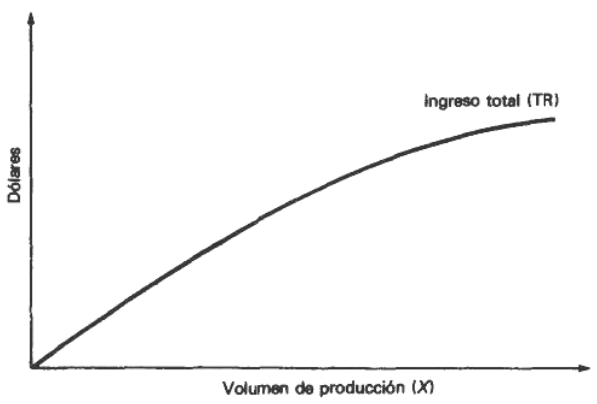
Como el BEP es el nivel de producción X para el que los costos y los ingresos son iguales, es necesario despejar X en la ecuación anterior y llamarla BEP:

$$FC = P*X - VC*X$$
$$FC = X*(P - VC)$$

o

$$\text{BEP}_{\text{unidades}} = X = \frac{FC}{P - VC} \qquad (3\text{-}4)$$

FIGURA 3-6
Comportamiento del ingreso total no lineal.



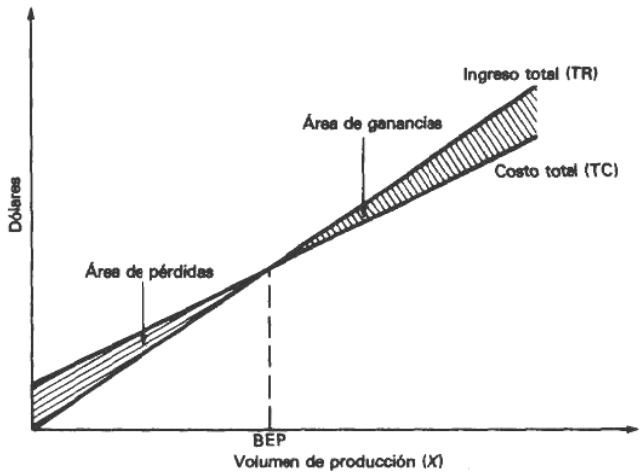


FIGURA 3-7
Análisis gráfico de punto de equilibrio lineal.

Así, se observa que el punto de equilibrio se determina dividiendo los costos fijos, por lo cual se llama *contribución marginal:* la diferencia entre el precio de venta y el costo variable por unidad.

La expresión que se acaba de desarrollar da el punto de equilibrio en unidades. Algunas veces es más conveniente expresarlo en dólares vendidos. Una manera de llegar a una figura de ventas en dólares es tan fácil como multiplicar el punto de equilibrio en unidades por el precio de venta. Entonces, puede desarrollarse una expresión algebraica multiplicando ambos lados de la ecuación (3-4) por el precio de venta y rearreglando los términos para obtener una expresión útil.

$$BEP_{\text{dólares vendidos}} = P * BEP_{\text{unidades}} = \frac{P*FC}{P - VC} = \frac{FC}{1 - VC/P} \quad (3\text{-}5)$$

Para las compañías manufactureras existe todavía otra manera de pensar sobre el punto de equilibrio en términos del porcentaje de utilización de la capacidad de planta. En este contexto, el BEP es el punto de equilibrio, en unidades, dividido por la capacidad total C, en unidades, multiplicado por 100 para establecer la capacidad en porcentaje. En forma algebraica, puede desarrollarse una expresión específica como la que se muestra en seguida.

$$BEP_{\text{porcentaje de capacidad}} = \frac{BEP_{\text{unidades}}}{C} * 100 = \frac{FC}{C(P - VC)} * 100 \quad (3\text{-}6)$$

Ejemplo de una cámara de comercio

La Cámara de Comercio de Winterville está considerando patrocinar un programa de un día para mejorar las comunicaciones entre organizaciones. La cuota de inscripción para los asistentes sería de $20 por persona. El programa seria puesto por "Sistemas de Aprendizaje Creativo", que cobraría a la cámara una cuota fija de $400. La cámara tendría también que cubrir gastos de $100 por una sala de conferencias en un hotel lo-

TABLA 3-2
Datos de la Cámara de Comercio de Winterville

Ingresos:	
Cuota de inscripción	$ 20 por persona
Costos fijos:	
Cuota para Sistemas de Aprendizaje Creativo	$400
Costo por la sala de conferencias	100
Costos postales	25
	$525
Costos totales fijos	
Costos variables por unidad:	
Cargo por café y ambigú	$ 25 por persona

cal, $25 de gastos postales para el programa de propaganda y $5 por persona para descansos con café y ambigú. Tal vez la cámara esté dispuesta a patrocinar el programa, aun cuando no prometa ganancias, pero quiere saber el punto de equilibrio.

El primer paso es organizar los datos en las categorías de ingresos, castos fijos y costos variables por unidad. Esto se muestra en la tabla 3-2. Una vez organizados los datos, el punto de equilibrio se calcula fácilmente.

$$\text{BEP}_{\text{unidades}} = \frac{525}{20 - 5} = 35 \text{ personas}$$

Con toda seguridad, la Cámara llevará a cabo análisis más profundos antes de decidir si patrocina el programa o no. Por ejemplo, puede querer ver el efecto que tendría sobre el punto de equilibrio el hecho de elevar la cuota de inscripción a $30. Es común que a este tipo de análisis se le dé el nombre de *análisis de sensibilidad,* ya que explora la sensibilidad de los resultados del modelo a cambios en los datos de entrada. En el ejemplo, se observa que el punto de equilibrio baja de 35 a 21 asistentes.

$$\text{BEP}_{\text{unidades}} = \frac{525}{30 - 5} = 21 \text{ personas}$$

Por supuesto, si la cuota de inscripción se eleva, el número de posibles asistentes disminuirá, y la Cámara tendrá que tomarlo en cuenta al fijar la cuota.

Puede ser que la Cámara esté interesada en calcular las ganancias o las pérdidas asociadas con el mejor y el peor de los casos. Se cree que, con una cuota de $20, el máximo número de asistentes sería 60 y el menor 15. En la tabla 3-3 se muestran las ganancias o las pérdidas para estos dos casos. El análisis revela que el rango posible de variación para la ganancia va de una pérdida de $300 a una ganancia de $375.

TABLA 3-3
El mejor y el peor caso

Mejor caso (60 asistentes)

Ganancia = ingreso total - costo total
= $P^*X - (FC + VC^*X)$
= 20(60) — 525 — 5(60)
= $375

Peor caso (15 asistentes)

Ganancia = 20(15) — 525 — 5(15)
= —$300

EJERCICIO DE PRÁCTICA 3-1

La juguetería Cindy está considerando producir y comercializar un nuevo tipo de muñeca. Los costos fijos asociados con la producción y la venta son de $500 000 y los costos variables por unidad ascienden a $3 por muñeca. Si la muñeca se vende a los distribuidores a $8 cada una, ¿cuál será el punto de equilibrio en unidades para la juguetería Cindy? Si los costos variables de hecho subieran a $4 por muñeca, ¿cuál sería el efecto sobre el punto de equilibrio expresado en unidades?

ANÁLISIS DE PUNTO DE EQUILIBRIO NO LINEAL

Como se analizó antes, los costos y los ingresos no siempre son lineales. Los costos, los ingresos, o ambos, pueden comportarse en una forma no lineal al variar el volumen de producción. En la figura 3-8 se ilustra una situación de este tipo. En este caso, la función de ingresos es lineal, pero la función de costos es no lineal. La curva de costos presenta costos por unidad más altos conforme la compañía opera a mayores niveles de produc-

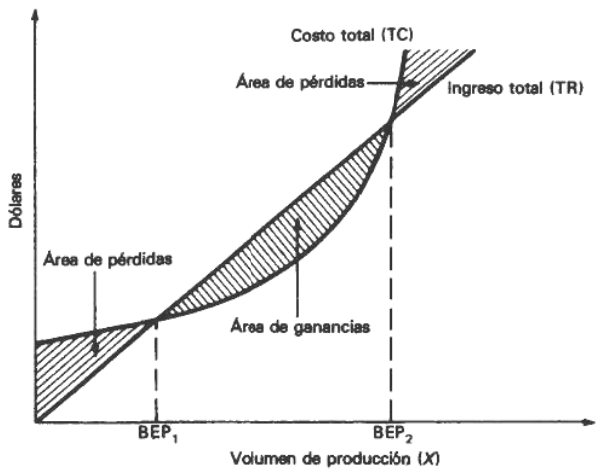


FIGURA 3-6
Análisis gráfico de punto de equilibrio no lineal.

ción. Sin embargo, no debe olvidarse que éste sólo es un ejemplo de cómo puede desviarse de la linealidad el comportamiento del costo y el ingreso en el mundo de los negocios, y que existen otras posibilidades. Algunos ejercicios del final de este capítulo ilustran situaciones diferentes.

En la figura 3-8 hay dos puntos de equilibrio, BEP_1 y BEP_2. Hasta el punto BEP_1 se incurre en pérdidas. De BEP_1 a BEP_2 se obtiene una ganancia. Después de BEP_2 existen pérdidas de nuevo.

Si se define matemáticamente una relación funcional para las curvas de ingresos y costos, es posible identificar los dos puntos de equilibrio con exactitud. Defínanse las relaciones de los ingresos y los costos con las siguientes funciones lineal y no lineal, respectivamente.

$$TR(X) = s*X$$
$$TC(X) = d*X^2 + e*X + f$$

Las letras *s, d y e* son coeficientes y/ es una constante que ayuda a definir las funciones.

Los puntos de equilibrio ocurren cuando las funciones del ingreso total y el costo total son iguales.

$$TR(X) = TC(X)$$
$$s*X = d*X^2 + e*X + 2f$$

Los puntos de equilibrio pueden encontrarse restando el costo total del ingreso total y rearreglando los términos de manera que pueda usarse una fórmula cuadrática.[4]

$$s*X - d*X^2 - e*X - f = 0$$
$$-d*X^2 + (s - e)*X - f = 0$$

Así, empleando la fórmula cuadrática con $a = -d$, $b = s - e$ y $c = -f$, los puntos de equilibrio están dados por

$$BEP_{1\,y\,2} = \frac{-(s - e) \pm \sqrt{(s - e)^2 - 4(-d)(f)}}{2(-d)} \qquad (3\text{-}7)$$

Un ejemplo de fabricación

Durable Electronics está considereando producir un transformador de alto voltaje especial. Cada unidad producida se venderá en $5 000. El costo de producir los transformadores está dado por la función cuadrática $TC(X) = 20*X^2 - 1\,000*X + 100\,000$.

[4] Para una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

las raíces o valores se obtienen mediante la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

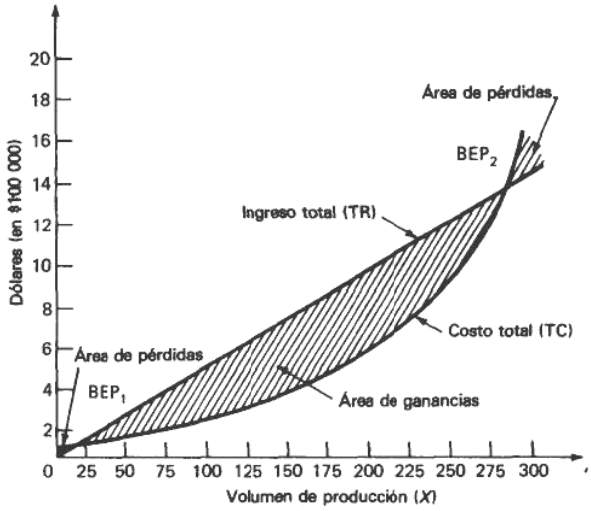


FIGURA 3-9
Gráfica de punto de equilibrio para Durable Electronics.

Gráficamente, los puntos de equilibrio pueden determinarse a partir de las curvas de costos e ingresos. Estas curvas se muestran en la figura 3-9. Por otra parte, los puntos de equilibrio pueden encontrarse con la expresión (3-7).

$$BEP_{1\ Y\ 2} = \frac{-(5\,000 + 1\,000) \pm \sqrt{(5\,000 + 1\,000)^2 - 4(-20)(-100\,000)}}{2(-20)}$$

BEP_1 — 18 unidades
BEP_2 — 282 unidades

Con base en este análisis, Durable Electronics obtendrá una ganancia si produce y vende una cantidad entre 18 y 282 transformadores.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 3-2

La corporación Summer Fun planea participar en un negocio de producir y vender cubiertas para albercas. Cada cubierta se venderá a $300. El costo de producirlas y venderlas está dado por la siguiente relación funcional:

$$TC(X) = 3*X^2 - 200*X + 10\,000$$

Determínense tanto gráfica como algebraicamente los puntos de equilibrio. Determínese tan exacto como sea posible el volumen de producción que maximiza las ganancias.

ANÁLISIS DE PUNTO DE EQUILIBRIO CON PRODUCTOS MÚLTIPLES

La mayoría de las compañías manufactureras producen más de un producto y virtualmente todos los distribuidores ofrecen a la venta una gran

variedad de artículos. Para estas organizaciones no tiene sentido hablar del punto de equilibrio de un producto particular, ya que la mayoría de los costos fijos del negocio están compartidos por los diferentes productos. Más bien será necesario considerar el volumen total de negocios en dólares que es necesario para salir a mano.

Como es necesario hablar del punto de equilibrio en términos del total de ventas en dólares, un punto de partida razonable para pensar en cómo determinarlo es reflexionar en cómo se calcula cuando se trata de un solo producto. En seguida se repite la expresión apropiada para el punto de equilibrio.

$$BEP_{\text{dólares vendidos}} = \frac{FC}{1 - VC/P}$$

El denominador, 1 — VC/P, muestra el porcentaje de contribución de cada dólar vendido para cubrir los costos fijos. Entonces, lo que se necesita para productos múltiples es un porcentaje de contribución ponderado. Esto puede determinarse multiplicando el porcentaje de contribución para cada producto por su porcentaje de dólares vendidos. Se verá exactamente cómo se hace este cálculo considerando un ejemplo específico.

Un ejemplo de Raquetas

La Racquet Sports produce una variedad de raquetas para la nueva industria deportiva. Hace raquetas para tenis, frontón y squash. La tabla 3- 4 presenta los datos importantes para los productos fabricados. Se muestran los productos, sus precios de venta promedio, los costos variables promedio asociados con la producción de raquetas, sus contribuciones margina les promedio y el porcentaje del total de dólares vendidos por la compañía que realiza cada producto. A partir de estos datos es posible calcular el *porcentaje de contribución* sobre cada dólar de venta para cada uno de los productos fabricados y vendidos.

$$\text{Porcentaje de contribución} = \frac{\text{contribución marginal}}{\text{precio de venta}} \cdot 100 \qquad (3\text{-}8)$$

Para estos tres productos se tiene:

Raqueta de tenis	*Raqueta de frontón*	*Raqueta de squash*
$\frac{10}{40} \cdot 100 = 25\%$	$\frac{10}{25} \cdot 100 = 40\%$	$\frac{10}{25} \cdot 100 = 40\%$

Ahora es necesario ponderar estos porcentajes por sus proporciones del total de dólares vendidos. La suma de estos porcentajes de contribución ponderados da la contribución total que cada dólar vendido proporción a para cubrir los costos fijos de la compañía; véase la tabla 3-5. Con un porcentaje de contribución de 32.5% y costos fijos anuales de $200 000, el punto de equilibrio en dólares vendidos resulta:

TABLA 3-4
Datos para Racquet Sports

Producto	*Precio de venta promedio*	*Costo variable Promedio por unidad*	*Contribución marginal promedio*	*Porcentaje del total de dólares vendidos*
Raqueta de tenis	$40	$30	$10	50
Raqueta de frontón	25	15	10	40
Raqueta de squash	25	15	10	10
				100

Costos fijos anuales = $ 200 000
Capacidad de producción = $1 000 000 de ventas totales

$$BEP_{\text{dólares vendidos}} = \frac{\$200\,000}{325} = \$615\,385$$

En la tabla 3-4 se proporcionan también los datos sobre la capacidad total de producción de La Racquet Sports. Con estos datos es posible calcular las ganancias para varios porcentajes de capacidad de planta. Por ejemplo, a un 70% de la capacidad, la ganancia se calcula de la siguiente manera:

Ganancia = ingresos totales — costos totales
= ingresos totales — costos fijos — costos variables totales
= .70(1 000 000) — 200 000 — (1 — .325)(.70)(1 000 000)
= $27 500

EJERCICIO DE PRÁCTICA 3-3

La compañía Webb-Dixon produce mesas, sillas y escritorios de alta calidad. Los datos importantes para estos productos se muestran en la tabla 3-6. ¿Cuál es el punto de equilibrio para la Webb-Dixon? ¿Cuál es la ganancia (o pérdida), si se opera al 60% de la capacidad?

DECISIONES DE HACER O COMPRAR

Otro tipo de análisis de costo, utilidad y volumen, requiere lo que se conoce como una decisión de *hacer o comprar*. Investiga la interrogante de si es más barato hacer un artículo o comprarlo de un proveedor. Cuando un artículo se hace "en casa", se incurre tanto en costos fijos como en costos variables. Por otra parte, la compra del artículo puede evitar los costos fijos, pero es común que el precio de compra sea más alto que el costo variable por unidad al producir el artículo. La pregunta es ¿a qué volumen de producción debe hacerse el artículo en lugar de comprarse? De otra manera, puede preguntarse ¿en qué punto sucede que los costos por unidad más bajos asociados con producir el artículo compensan los costos fijos?

TABLA 3-5 Cálculo **del** porcentaje **de** contribución global

Producto	*Porcentaje de contribución promedio*	*Porcentaje del total de dólares vendidos*	*Porcentaje de contribución ponderado*
Raqueta de tenis	**25**	**50**	**12.5**
Raqueta de frontón	**40**	**40**	**16.0**
Raqueta de squash	**40**	**10**	**4.0**
			32.5%

El mismo tipo de situación ocurre cuando existen dos o más procesos de producción que pueden usarse, pero que difieren en sus costos fijos y en sus costos variables por unidad. En esta situación el proceso que comprende costos fijos más altos pero costos por unidad menores se vuelve atractivo sólo a grandes niveles de producción.

En ambos casos sólo los costos son *increméntales* al análisis. Por "incremental" se entiende cualquier consideración que varía sólo con la alternativa seleccionada. En este caso, los costos son increméntales ya que varían con las alternativas. Sin embargo, los ingresos no son increméntales, ya que se supone que los ingresos futuros son los mismos independientemente de la decisión que se tome. Cuando se efectúa un análisis, es importante incluir sólo las consideraciones que son increméntales a la decisión.

Ejemplo de un proceso de selección

La Russell Manufacturing Company tiene la necesidad de una parte componente para uno de los productos que fabrica y vende. Hasta ahora ha comprado el artículo de un vendedor, pero una información reciente sobre un aumento en el precio hará que cueste $4.00 por unidad. La gerencia de la Russell está considerando la posibilidad de hacer la parte en la fábrica. Se tienen dos procesos disponibles. El primero es un proceso completamente automático que implicaría costos fijos de $30 000 y costos variables por unidad de $2.75. El segundo es un proceso semiautomático que tendría costos fijos y variables por unidad de $20 000 y $3.00, respectivamente.

Tabla 3-6
Datos para Webb-Dixon

Producto	*Precio de venta promedio*	*Costos variables promedio marginal por unidad*	*Contribución promedio*	*Porcentaje del total de dólares vendidos*
Mesa	$300	$150	$150	40
Silla	150	80	70	40
Escritorio	500	300	200	20
				100

Costos fijos anuales = $400 000
Capacidad de producción = $1 000 000 de las ventas totales

Una manera de analizar esta situación es empleando lo que se conoce como gráfica *cruzada;* véase la figura 3-10. Las curvas asociadas con la gráfica muestran los costos totales asociados con los procesos para diferentes volúmenes de producción. Como puede observarse, hasta el punto X_1, la opción menos costosa es comprar la parte. Entre X_1 y X_2 el proceso semiautomático es el mejor. Una demanda de más de X_2 artículos se satisface con menos costos por el proceso automático. Según la necesidad que se pronostique para el artículo, la mejor opción puede ser comprar, usar el proceso semiautomático o el automático.

Los valores de X_1 y X_2 pueden determinarse ya sea de la gráfica viendo en dónde se cruzan las curvas, o resolviendo las ecuaciones de costo simultáneas para sus puntos de intersección. El último enfoque es el más exacto y se ilustra en seguida.

El valor para X_1 se encuentra igualando las expresiones de costo total para las alternativas de compra y la semiautomática y resolviendo para X_1:

$$\begin{aligned} TC_{compra} &= TC_{semiautomática} \\ 4.00*X &= 20\,000 + 3.00*X \\ 1.00*X &= 20\,000 \\ X_1 &= 20\,000 \text{ unidades} \end{aligned}$$

De igual manera, el valor para X_2 puede determinarse como sigue.

$$\begin{aligned} TC_{semiautomática} &= TC_{automática} \\ 20\,000 + 3.00*X &= 30\,000 + 2.75*X \\ .25*X &= 10\,000 \\ X_2 &= 40\,000 \text{ unidades} \end{aligned}$$

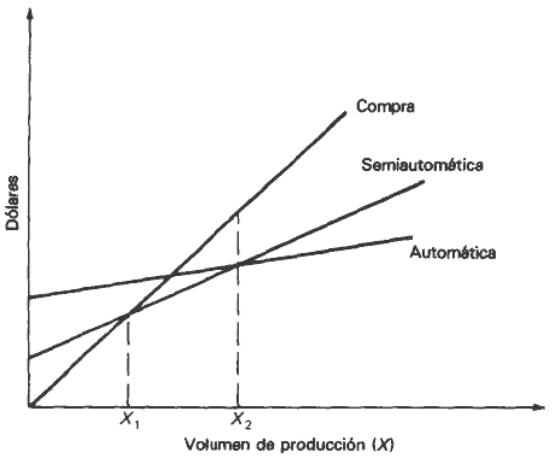


FIGURA 3-10
Gráfica cruzada para el proceso de selección.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 3-4

Thomas Heard acaba de terminar su carrera y está planeando abrir una tienda de donas llamada Mr. Spudnut. Está tratando de decidir cuál de dos máquinas para hacer donas comprar. La primera es semiautomática e incurriría en costos fijos de $5 000 y costos variables de $0.06 por dona. La segunda es completamente automática y tiene costos fijos asociados de $8 000; pero dado que tiene un dispositivo que permite ahorros en la mano de obra, los costos variables serían sólo de $0.04 por dona. Elabórese una gráfica cruzada y determínese en forma algebraica el volumen de producción en donde la mejor decisión cambia de una máquina a otra.

EXCESO DE CAPACIDAD DE PLANTA

No es raro que una compañía manufacturera opere a menos de su capacidad total de planta. En ocasiones, la administración de este tipo de compañías recibe una oferta para producir y vender unidades a un precio menor del que en general se aceptaría. La decisión de aceptar o no la oferta depende, por lo menos en parte, de un análisis incremental.

Sleepease es un pequeño productor de colchones y box springs. Los datos sobre sus operaciones anuales en este momento se muestran en la tabla 3-7. Aunque Sleepease obtiene utilidades, está operando a sólo el 62.5% de la capacidad de planta (5 000/8 000 – 0.625). La Nightsrest, un gigante en la industria, ha ofrecido a Sleepease un contrato para producir 1 000 juegos de colchón y box spring con la etiqueta de Nightsrest, por $150 por juego, o $150 000 en total. Aun cuando este precio es menor que el precio usual de $200 por juego, ¿debe Sleepease aceptar el contrato?

A primera vista, la oferta puede no parecer atractiva. No sólo el precio es menor que el usual, sino que para la Sleepease los costos promedio por conjunto en este momento han sido (400 000 + 500 000)/5 000 = $180. Sin embargo, éste no es el análisis correcto que debe hacerse. Más bien deben considerarse sólo los ingresos y los costos increméntales. Por el lado de los ingresos, se recibirán $150 000. Los únicos costos increméntales son 1 000 conjuntos producidos a un costo variable por unidad de $100, que dan un costo variable total de $100 000. Los costos fijos no deben considerarse, ya que continuarán, se acepte o no el contrato. En consecuencia, la Sleepease mejorará la posición de sus ganancias en $50 000, si acepta el contrato. Sin embargo, debe pensar en si la producción para la Nightsnst afectará las ventas para su propia etiqueta. Si en apariencia esto puede suceder, esto se convierte en una consideración incremental que el administrador debe sopesar.

DUMPING DE UN PRODUCTO

El *"dumping" de un producto* se refiere a la venta de un producto en un mercado por mucho menos de lo que se vende en otro mercado. Recibe mayor atención en el comercio internacional cuando una compañía hace

TABLA 3-7
Datos para Sleepease

Ingresos:		
5 000 juegos de colchón y box spring	× $200 =	$10 000 000
Costos:		
Costos fijos		$ 400 000
Costos variables		
5 000 juegos de colchón y *box spring*	× $100 =	$ 500 000
Ganancias:		100 000

Capacidad total de planta: 8 000 juegos de colchón y *box spring*

un dumping de sus productos en mercados extranjeros. Se analiza cómo ésta puede ser una opción para obtener ganancias.

Hito Electronics en una compañía extranjera que fabrica equipos estéreo de alta calidad. Obtiene ganancias atractivas tanto en su país como en mercados extranjeros. Sin embargo, tiene exceso de capacidad productiva aun con sus ventas en el extranjero. La administración de Hito quisiera usar este exceso de capacidad. Una forma en que puede hacerlo es vender las unidades extra que puede producir a precio muy bajo en un mercado extranjero. ¿Qué tan bajo puede ser el precio que marque Hito para sus unidades? La respuesta es a cualquier precio mayor que los costos variables por unidad asociados con la producción de las unidades adicionales, ya que los costos fijos están cubiertos por las ventas de Hito en otras partes. Sencillamente cualquier ingreso sobre los costos variables se agrega a las utilidades. Pero Hito tiene otras preocupaciones. El o los mercados en donde se hace el dumping debe ser lo suficientemente apartado para que no sea probable que las unidades de más bajo precio se envíen a otros mercados y se desorganicen en ellos las actividades comerciales. La administración debe preocuparse también por las posibles reacciones competitivas y aumentos en las tarifas que puede imponer el país en donde se hace el dumping.

Como se ha dicho, el dumping de un producto recibe la mayor atención en el área del comercio internacional. Por supuesto, los mismos conceptos se aplican al mercado doméstico. Sin embargo, los mercados domésticos no están tan apartados como para que ésta práctica sea factible como lo es en el comercio internacional. Para terminar, debe notarse que el dumping sólo es una variación a la toma de decisiones sobre el exceso de capacidad de planta, ya que en general no se considera, a menos que ésta exista.

RESUMEN

Los datos son hechos o conceptos que se conocen o suponen, expresados casi siempre en forma numérica. Los datos pueden ser sobre transacciones, internos, externos, objetivos o subjetivos. Los datos que los admi-

3-2 El presidente de una universidad, el director del colegio de administración de empresas y el jefe del departamento de administración pueden calificarse como la administración alta, media y baja respectivamente. Dense ejemplos de los datos que cada uno necesita para respaldar sus responsabilidades de toma de decisiones. Califíquense los ejemplos de datos en internos, externos, objetivos y/o subjetivos.

3-3 Con frecuencia, el comportamiento del costo y el ingreso es no lineal. Dense varios ejemplos de comportamiento no lineal que no se hayan descrito en el capítulo. ¿Qué tan importantes serían éstas no linealidades en un análisis? ¿Cómo pueden manejarse?

3-4 Ajax Chemicals está tratando de decidir si introduce un nuevo producto que se acaba de desarrollar. Los costos de investigación y desarrollo del producto ascendieron a $50 000. ¿Debe incluirse éste costo en un análisis para introducir el producto? ¿Por qué?

Análisis de punto de equilibrio lineal

3-5 Dados los siguientes datos, encuéntrese el punto de equilibrio en unidades y en porcentaje de capacidad. Ilústrese el análisis con una gráfica.
Precio de venta P:$3.50
Costos variables por unidad VC:$2.50
Costos fijos FC:$45 000
Capacidad C:50 000 unidades

3-6 La fábrica T-Shirt fabrica camisetas a la medida para restaurantes, bars, fraternidades, etc. Las camisetas se venden a $6 por unidad y el costo de fabricación es $3 por unidad. Los costos fijos de operación al año son de $45 000 y la capacidad anual máxima es de 20 000 unidades. Encuéntrese el punto de equilibrio en unidades, en dólares vendidos y en porcentaje de capacidad.

3-7 Archie's es un autoservicio de emparedados que se encuentra enfrente de las instalaciones de la universidad del estado. El costo fijo mensual de operación del autoservicio es de $1 500. El cliente promedio gasta $2 en comida y bebida; los costos variables por cliente promedian $1. Con su tamaño actual Archie's puede atender 150 clientes por día, 30 días al mes.
a Encuéntrese el punto de equilibrio mensual para Archie's en unidades, en dólares vendidos y en porcentaje de capacidad. *b* ¿Cuál sería la utilidad mensual de Archie's con un promedio de 100 clientes diarios?

3-8 Bill Johnson posee una flotilla de carritos de helados que operan en áreas de veraneo. Cada carrito invierte $3 000 en gastos fijos durante el verano. Los operadores de los carritos cobran estrictamente sobre comisión; reciben 10% de todos los ingresos. Los conos de helado se venden a $0.50 cada uno y tienen costos variables de $0.20 por cono, además de la mano de obra.
a ¿Cuántos conos de helado debe vender cada carrito durante el verano para operar en el punto de equilibrio?

b ¿Cuál será la ganancia o pérdida si se venden 15 000 conos de helado por carrito durante el verano?

3-9 Un hombre de negocios está planeando abrir una operación veraniega de renta de veleros. Actualmente piensa comprar seis veleros a $2 000 cada uno. Al final del verano venderá a los barcos por $1 000 cada uno. El hombre de negocios llegó a un arreglo con un hotel de fama para operar en las playas del hotel. Esto le costará $2 000 más el 10% del total de dólares obtenido por las rentas. El costo de un kiosko para operar el equipo necesario se estima en $ 500. Al final del verano, parte del equipo podrá venderse a un valor de recuperación de $400. Un estudiante de la universidad local trabajará para él rentando los veleros 8 horas al día, 7 días a la semana, durante 15 semanas por $224 por semana. Los barcos se rentarán a $7 la hora.

a ¿Cuál es el punto de equilibrio para la operación de renta de veleros expresada en horas de renta?

b ¿Cuál será la ganancia o pérdida para el hombre de negocios si se opera al 40 % de la capacidad durante la temporada de 15 semanas?

Análisis de punto de equilibrio no lineal

3-10 La manufacturera Carroll desea que se le prepare una gráfica de punto de equilibrio para sus operaciones. Puede vender su producto a $50 por unidad, hasta 100 000 unidades anuales. Los costos variables por unidad para producir el artículo sonde $30, pero a 80 000 unidades de producción bajan a $25 por artículo. Los costos fijos son de $1 000 000 por las primeras 40 000 unidades, pero su ben $100 000 por cualquier cantidad adicional de unidades que se produzcan. La capacidad de la planta es de 100 000 unidades anuales. En la gráfica indíquese el punto de equilibrio tan exacto como sea posible. También encuéntrese el punto de equilibrio en forma algebraica.

3-11 Environmental Products fabrica un dispositivo que tiene una curva de ingresos totales lineal, dada por TR(X) = 10*X y una curva de costo total cuadrática, TC (X) = X^2 — 2 090*X + 200 000. Determínese algebraicamente el punto (s) de equilibrio.

3-12 Precisión Elctronics tiene una función lineal de costo total dada por 10 000 + 5*X—, pero una función no lineal para el ingreso total de —.01*X^2 + 30 *X + 200. Determínese algebraicamente el punto (s) de equilibrio.

3-13 Las funciones de costo e ingreso de una compañía están descritas por las siguientes expresiones cuadráticas generalizadas:

$$TC(X) = a*X^2 + b*X + c$$
$$TR(X) = r*X^2 + s*X + t$$

Desarróllese una expresión similar a (3-7) que determine los puntos de equilibrio de la compañía para este tipo de comportamiento no lineal en el costo y el ingreso.

Análisis de punto de equilibrio con muchos productos

3-14 Zerex produce tostadores, "wafleras" y hornitos para pan. Estos productos tienen los porcentajes de contribución y los porcentajes del total de dólares vendidos que se muestran en seguida.

Producto	*Porcentaje de contribución*	*Porcentaje del total de dólares vendidos*
Tostador	25	60
Waflera	10	20
Hornito de pan	30	20
		100

Si los costos fijos anuales son de $1500 000, encuéntrense los porcentajes de contribución ponderados y el punto de equilibrio en dólares vendidos.

3-15 Coldberg's es una tienda con un departamento muy productivo de vestidos para dama. Los datos sobre la línea que maneja actualmente se presentan en seguida. ¿Cuál es el punto de equilibrio del departamento?

Línea de vestidos	*Precio de venta promedio por vestido*	*Costo variable promedio por vestido*	*Contribución marginal promedio por vestido*	*Porcentaje del total de dólares vendidos*
Summerfun	$35	$20	$15	40
California Girl	30	20	10	15
SassyMiss	35	15	20	30
ClassyLady	45	25	20	15
Costos fijos asociadas con la boutique - $100 000				100

Otros análisis de costo, utilidad y volumen

3-16 Ken, que opera el Ken's Bar, está planeando poner dos máquinas de juego en un salón trasero que no se usa. El problema está en decidir si comprar las máquinas o rentarlas sobre un convenio de compartir ganancias. Si se compran, las máquinas costarán $3 000 cada una y tendrán una vida prevista de 6 años. El costo variable por juego, para operar las máquinas es de $0.02; la mayor parte de este costo se debe a reparaciones. Si las máquinas se rentan, no existen costos fijos. Ken y el vendedor de máquinas de juego compartirán los ingresos de $0.25 por cada dos juegos sobre la base de mitad y mitad. El vendedor les dará servicio sin cargo, lo cual reducirá, para Ken, los costos variables por juego a sólo $0.005.

a Identifíquese el volumen de juegos al año al que cada alternativa es la más atractiva.

b Con la mejor alternativa, ¿cuál será la ganancia anual de Ken con una cantidad de 15 000 juegos por máquina?

c ¿Debería Ken incluir en su análisis un costo por el uso del salón? ¿Por qué?

3-17 La MacMillans embotella y vende salsa de tomate con su propia eti* queta. Los datos sobre las operaciones de la MacMillans se presentan es seguida.

Ingresos:	$3 000.000
Costos:	
Costos fijos	1500 000
Costos variables	
6 000 000 de botellas a $0.20/botella	1200 000
Ganancia:	$ 300 000
Capacidad total de planta: $4 000 000 en ventas	

Williams Brothers, un competidor, desea que la MacMillans produzca un millón de botellas para venderlas con la etiqueta de Williams Brothers. La MacMillans recibiría $0.30 por botella. Estiman que, además de los costos variables, habría un incremento de $300 000 en los costos fijos si se aceptara la oferta. ¿Qué se recomienda que haga MacMillans?

3-18 Electra Televisión produce televisiones a color de alta calidad. A últimas fechas se ha venido acaparando el mercado a costa de Matsudo Electronics, un competidor extranjero. Los datos sobre las operaciones del año pasado de Electra se muestran en seguida.

Ingresos:	
40 000 televisores a $300 cada uno	$12 000 000
Costos:	
Costos fijos	6 000 000
Costos variables	
40 000 televisores a $150 cada uno	6 000 000
Ganancia:	$ 0
Capacidad total de planta: 80 000 televisores	

Un estudio de mercado que se acaba de terminar indica que si Electra baja su precio a $275 por unidad, las ventas aumentarían a 60 000 televisores. El departamento de producción indica que este incremento podría manejarse sin incurrir en costos fijos adicionales. También se acaba de recibir información sobre las operaciones de Matsudo. Venden las unidades a $275 en este país, pero los con ¡untos están valuados a lo que equivale a $300 dólares en su país. Los costos variables por unidad para Matsudo se estiman en $140. ¿Qué recomendaciones pueden hacerse a la administración de Electra?

BIBLIOGRAFÍA

Bierman, Harold, y Thomas R. Hyckman: *Managerial Cost Accounting* (New York: Macmillan, 1976).

Horngren, Charles T.: *Introduction to Management Accounting* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1978).
Rappaport, Alfred (ed.): *Information for Decisión Making —Quantitative and Behavioral Dimensions* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentíce-Hall, 1975).
Shillinglaw, Gordon: *Managerial Cost Accounting* (Homewood, III.: Irwin, 1977).

PARTE DOS

TOMA RACIONAL DE DECISIONES

4

MATRIZ DE PAGOS Y ÁRBOLES DE DECISIÓN

Las probabilidades dirigen la conducta del hombre sabio.

Cicerón

Casi toda la vida humana depende de las probabilidades.

Voltaire

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje
Fuentes de las probabilidades
  Historia del pasado
  Juicio subjetivo
  Distribuciones de probabilidad teóricas
  Ejercicio de práctica (4-1)
Valor esperado
  Un ejemplo de inversión
  Ejercicio de práctica (4-2)
La matriz de pagos
  Componentes y estructura
  El análisis
  Ejemplo de una panadería
  Ejercicio de práctica (4-3)
Árboles de decisión
  Componentes y estructura
  El análisis
  Un ejemplo de tamaño de planta
  Un árbol de decisión en lugar de una matriz de pagos
  Ejercicio de práctica (4-4)
Una advertencia sobre el uso del valor monetario esperado
Experiencias del mundo real
Resumen
Ejercicios
Estudio de un caso: Key West of Hawaii
Bibliografía

Éste, en el que vivimos, es un mundo probabilista. Como Voltaire dijo, "Casi toda la vida humana depende de las probabilidades." Muy pocas veces es posible predecir con certeza lo que pasará en el futuro. Aun cuando se pudiera, con seguridad sería una vida aburrida.

Tanto en la vida personal como en la de administrador, es necesario tomar importantes decisiones cuyas consecuencias finales no se conocen con certeza. Se selecciona el o la compañera para el matrimonio con la esperanza y la expectativa, pero no la certeza, de que llevará a una relación completa y satisfactoria. Un administrador de comercialización selecciona un plan con la intención, pero no la certeza, de promover de la mejor manera el producto o servicio de la organización. La pregunta es: "¿Cómo se puede tomar la mejor decisión cuando los resultados son inciertos?"

Es obvio que la gente aprende a tomar decisiones en situaciones probabilistas. En situaciones sencillas, la gente aprende a tomar decisiones bastante buenas. Es cuando los problemas se vuelven complejos que la calidad de las decisiones tiende a deteriorarse. La mente tiene una capacidad de análisis limitada. Sólo puede considerar unos cuantos factores al mismo tiempo. Es aquí donde son útiles los métodos cuantitativos, ya que proporcionan una estructura para organizar y analizar problemas complejos.

El *análisis de matriz de pagos y de árboles de decisión* es aplicable a una amplia variedad de situaciones que involucran la toma de decisiones bajo riesgo como las que se describieron en el capítulo 2. También son elementos del campo de estudio llamado *teoría estadística de decisiones.* Ambos incluyen como componente primordial el concepto de *valor esperado.* La aplicación de este concepto no asegura que toda decisión resulte perfecta, pero sí tiende, a la larga, a mejorar la calidad de las decisiones que se toman.

Cuando debe hacerse *una sola decisión* y no una serie de decisiones, se puede usar una *matriz de pagos.* Por ejemplo, la matriz de pagos podría emplearse para decidir si se inspecciona o no un cargamento de partes que está por llegar. No es raro que la matriz de pagos use un formato matricial, en que los renglones son los cursos de acción abiertos al tomador de decisiones y las columnas son los eventos posibles que pueden ocurrir. Los elementos de la matriz son las consecuencias de las combinaciones entre los cursos de acción y los eventos. El concepto de valor esperado se usa para decidir qué curso de acción se escoge.

Para las situaciones en las que debe tomarse una *serie de decisiones,* puede usarse un *árbol de decisión.* Este es el caso cuando debe decidirse si construir una planta y después deben tomarse las decisiones sobre si ampliar la capacidad de la misma. Con un árbol de decisión se muestran todas las combinaciones posibles entre decisiones y eventos, empleando la forma de un *diagrama de árboles.* Después se investigan estas combinaciones o interacciones usando el concepto de valor esperado para determinar la mejor serie de cursos de acción.

Muchas organizaciones han empleado el análisis de matriz de pagos y de árboles de decisión; sus experiencias, tanto los éxitos como los fracasos, proporcionan una idea sobre la mejor manera de aplicar estas tecnologías.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

A través del estudio de este capítulo el lector aprenderá:

1 Las diferentes fuentes de las probabilidades
2 Cómo aplicar el concepto de valor esperado
3 Cómo reconocer, establecer y analizar problemas mediante una matriz de pagos
4 Cómo reconocer, establecer y analizar problemas mediante árboles de decisión
5 Qué enfoques han usado las organizaciones al emplear con éxito el análisis de matriz de pagos y de árboles de decisión
6 El significado de los siguientes términos:

Juicio subjetivo	Árbol de decisión
Distribución de probabilidad teórica	Riesgo
Valor esperado	Variancia
Matriz de pagos	Utilidad

FUENTES DE LAS PROBABILIDADES

A diferentes niveles, la gente se siente a gusto al manejar probabilidades. Las personas con experiencia y entrenamiento en lo cuantitativo expresan y manipulan las probabilidades con un alto grado de tranquilidad y facilidad. Otros se muestran dudosos aun para adivinar una probabilidad al no saber con seguridad lo que pasará en el futuro. O puede ser que establezcan que la probabilidad de que ocurra algún evento futuro es 1.5, aun cuando se sabe que cualquier probabilidad debe estar entre 0.00 (no hay posibilidad) y 1.00 (certidumbre). Cuando se interactúa con gente no orientada cuantitativamente, con frecuencia es necesario discutir los problemas en los términos que ellos se sienten a gusto. Por ejemplo, puede ser necesario preguntar cuál es la oportunidad o posibilidad de que ciertos eventos ocurran, en lugar de preguntar la probabilidad. Se usarán todos estos términos indistintamente.

Antes de seguir adelante, parece apropiado revisar algunos conceptos básicos de probabilidad con referencia a la estadística. En el apéndice A se proporciona un repaso más completo. Los resultados posibles futuros se llaman *eventos.* Los eventos posibles pueden ser un número *finito,* como cuando se pierde o se gana un concurso sobre un contrato de construcción, o pueden ser *infinitos* o casi, como cuando se pronostican al dólar más cercano las utilidades futuras de una corporación. En el primer caso, se dice que los eventos son *discretos,* en el último son *continuos.* Los eventos *mutuamente excluyentes* son aquéllos en que la ocurrencia de uno de elle s evita toda posibilidad de que suceda cualquier otro. Por ejemplo, el rentar o no un edificio son eventos mutuamente excluyentes. Se dice que los eventos son *colectivamente exhaustivos* cuando describen todos los eventos que pueden ocurrir. Por ejemplo, el introducir o no un nuevo producto son eventos colectivamente exhaustivos. Para eventos discretos, todas las probabilidades están entre 0.00 y 1.00. Si los eventos son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, la suma de sus probabilidades debe ser igual a 1.00. Los eventos continuos se manejan un poco diferentes.

Como en esencia son un número infinito de eventos, no es apropiado hablar de la probabilidad de que ocurra uno de ellos en particular, porque la probabilidad es infinitamente pequeña. Más bien se habla de la probabilidad de que ocurra un evento de los comprendidos entre dos puntos. Por ejemplo, es apropiado hablar de que las utilidades de una compañía estén entre $100 000 y $200 000. En cualquiera de los dos casos, la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1.00. Si estos términos y conceptos parecen extraños, se recomienda al lector que lea el apéndice A antes de seguir adelante en este capítulo.

Una vez que se revisaron algunos conceptos básicos de probabilidad, es hora de explorar de donde vienen las probabilidades. En otras palabras, ¿cuáles son las fuentes alternativas de las probabilidades? Se verá que pueden basarse en la historia del pasado, en el juicio subjetivo y/o en las distribuciones de probabilidad teóricas.

Historia del pasado

Una fuente de probabilidades es la *historia del pasado.* Este enfoque supone que una buena base para predecir lo que sucederá en el futuro es aquello que ocurrió en el pasado. En la tabla 4-1 se muestra la demanda durante el año que pasó de un artículo almacenado en inventario. La *distribución de frecuencias* que muestran las columnas 1 y 2 revela que la demanda ha variado de 0 a 4 unidades. Hay 50 observaciones, ya que la planta opera 50 semanas al año. La columna 3 muestra la *frecuencia relativa* (número de observaciones en cada categoría dividido entre el número total de observaciones en todas las categorías) para cada nivel de demanda. Y ahora viene el paso inductivo que lleva del pasado al futuro. Si se puede suponer que el futuro será parecido al pasado, las frecuencias relativas se convierten en las probabilidades de los eventos futuros (columna 4). Esta es, por supuesto, una suposición crítica ya que la historia está llena de ejemplos de errores debidos a la incapacidad de los administradores para ver el futuro diferente del pasado.[1]

Juicio subjetivo

En algunos casos el futuro no será como el pasado o quizá no existan datos históricos, como cuando se considera la introducción de un nuevo producto. En estas situaciones, las probabilidades se pueden basar en el *juicio subjetivo,* esto es, en las creencias personales. Esta fuente de probabilidades no excluye el uso de datos. Más bien, el tomador de decisiones da su interpretación personal del significado de los datos. Sencillamente, los datos no se pueden transferir en forma directa a probabilidades. Por esta razón, personas distintas pueden observar la misma situación y dar evaluaciones probabilísticas diferentes.

[1] Un ejemplo clásico es el fracaso del administrador de Montgomery Ward para predecir el renacimiento económico al terminar la Segunda Guerra Mundial. Aunque a otros grandes conflictos mundiales habían seguido recesiones, la administración de Seáis construyó rápidamente nuevas tiendas con la seguridad de que el futuro sería diferente del pasado. La ventaja competitiva de Sears continúa hasta la fecha.

TABLA 4-1
Datos de demanda

(1) *Demanda por semana*	*(2)* *Frecuencia*	*(3)* *Frecuencia relativa*	*(4)* *Probabilidad*
0	4	4/50 = 0.08	0.08
1	8	8/50 = 0.16	0.16
2	20	20/50 = 0.40	0.40
3	12	12/50 = 0.24	0.24
4	6	6/50 = 0.12	0.12
	50	1.00	1.00

Algunas gentes se sienten muy a disgusto cuando hacen estimaciones probabilísticas subjetivas. Llegan a sugerir que el uso de cualquier análisis es inapropiado, ya que los datos de entrada son "poco científicos". Este argumento ignora lo importante. Una decisión tendrá que ser tomada. La pregunta es si deberá ser subjetivo todo el proceso de toma de decisiones, o sólo lo serán las especificaciones iniciales de las probabilidades. El aplicar métodos cuantitativos a probabilidades subjetivas no convertirá los datos "malos" de entrada en "buenas" decisiones, pero hará un procesamiento racional de los datos que se dieron. Éste no siempre es el caso con la mente humana.

Distribuciones de probabilidad teórica

Algunas situaciones se pueden describir por una *distribución de probabilidad teórica* como la binomial, la Poisson o la normal. En el apéndice A se analizan varias de las distribuciones más útiles para la administración Existen varias razones posibles por las que una distribución determinada puede ser un medio apropiado para especificar las características de una situación probabilística.

Primero, puede ser que la propia naturaleza de una situación quede bien descrita por una distribución de probabilidad teórica. Por ejemplo, supóngase que se están produciendo artículos y que un cierto porcentaje de ellos son defectuosos. De estudios previos en estadística puede recordarse que para este tipo de situación, la distribución binomial se puede usar para especificar la probabilidad de que sea defectuoso cualquier número de artículos muestreados, para un tamaño de muestra dado. Igual que en este caso, con frecuencia las características de una situación son tales que una distribución de probabilidad teórica es un vehículo natural para expresar las probabilidades.

Una segunda posibilidad es que los datos históricos disponibles sugieran que una situación particular se pueda describir por medio de una distribución de probabilidad teórica. Usando un ejemplo clásico, puede ser que el número de llamadas telefónicas que llegan se describa en forma probabi -

lística por la distribución Poisson. Cuando se dispone de datos históricos pueden emplearse pruebas estadísticas, conocidas como pruebas de bondad de ajuste, para decidir si los datos se comportan siguiendo una distribución de probabilidad específica.

En otras ocasiones, un tomador de decisiones puede encontrar conveniente usar una distribución de probabilidad teórica para expresar sus sentimientos subjetivos acerca de la oportunidad de los eventos posibles. Por ejemplo, las ventas del próximo año pueden describirse con una distribución normal con media de 100 000 y desviación estándar de 20 000 unidades.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 4-1

En seguida se enumeran varias situaciones que deben describirse en forma probabilística. Indíquese si las probabilidades se basarían principalmente en datos históricos, en el juicio subjetivo o en distribuciones teóricas de probabilidad.

a La probabilidad de que la cuenta de un cliente específico esté correcta.
b La probabilidad de que lleguen X = 0,1, 2, . . . llamadas al conmutador de una compañía durante la hora del medio día cuando se conoce que el número medio de llamadas es 5.
c Una estimación probabilística sobre cuál será la tasa de interés al final del año.
e La probabilidad de que un pedido a un nuevo distribuidor llegue a tiempo.

VALOR ESPERADO

Como se mencionó antes, el concepto de valor esperado es vital para el análisis de matriz de pagos y de árboles de decisión. Desde el punto de vista de su valor numérico, el valor esperado de una variable aleatoria discreta llamada *X* se calcula como se muestra en seguida.[2]

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot p(X_i) \qquad (4\text{-}1)$$

Esto indica que el valor esperado de *X,* llámese *E(X),* es igual a la sumatoria de los valores posibles de X multiplicada por sus probabilidades respectivas.

Ya sea que se reconozca o no, el concepto de valor esperado se usa todo el tiempo en la vida diaria. Un ejemplo ilustrará este punto. Suponga el lector que alguien le ofrece jugar el siguiente juego de azar. El jugador ti-

[2] En este capítulo se discutirán sólo situaciones de toma de decisiones en las que la variable aleatoria es discreta. Para variables aleatorias continuas se pueden usar métodos basados en el análisis marginal y en el cálculo integral.

rara una moneda al aire y sí el lector acierta al lado que cae, ganará $1. Si se equivoca, no ganará nada. Cada vez que se juega se paga una cuota. La pregunta es: "¿Cuál sería una cuota justa?" Con toda seguridad, sin mucho pensar, responderá $0.50, pero, ¿reconoce que se hizo un cálculo del valor esperado? La probabilidad de atinarle o de equivocarse en cada tirada es 0.50. Los eventos posibles son ganar $1.00 o $0.00 (se ignora la cuota para entrar al juego). El valor esperado es entonces:

$$E(\text{cada jugada}) = \$1.00(.50) + \$0.00(.50) = \$0.50$$

Así una cuota justa para entrar al juego es $0.50.

Este sencillo ejemplo ilustra varios puntos. Primero, el concepto de valor esperado se usa en forma subjetiva. Segundo, el concepto de valor esperado es un concepto a la larga: es como un promedio proyectado al futuro. Si se repitiera la misma situación una y otra vez, se esperaría que el promedio de todos los resultados fuera el mismo que el valor esperado que se calculó. En el ejemplo del juego, si se repitiera muchas veces, se esperaría recibir en promedio $0.50 (excluyendo la cuota). Nótese que ninguno de los eventos posibles es $0.50, sólo el promedio a la larga es $0.50. No existe razón alguna para que el valor esperado sea igual a ninguno de los resultados individuales.

El uso del concepto del valor esperado no asegura que todas las decisiones resulten ser la selección más sabia. En un mundo probabilístico nada puede ofrecer ese tipo de garantía. Pero si este concepto se aplica consistentemente a las situaciones de toma de decisiones, a la larga deberá llevar a decisiones de alta calidad. A la larga, el tomador de decisiones ganará, igual que lo hacen los casinos de juego en Las Vegas.

Un ejemplo de inversión

John Collins invierte su dinero en Anderson Savings and Loan, en donde recibe un interés del 7 % anual sobre la inversión. Un amigo suyo le platicó que va a abrir una cafetería de autoservicio y quiere que John invierta. Después de investigar la oportunidad, John prepara una distribución de probabilidad de las utilidades posibles sobre la inversión. Esta distribición se muestra en la tabla 4-2. La utilidad esperada sobre la inversión se calcula fácilmente.

$$\begin{aligned} E(\text{utilidad sobre la inversión}) = {} & -10(.05) + 0(.15) + 5(.20) + 10(.40) \\ & + 20(.15) + 30(.05) \\ = {} & 9\% \end{aligned}$$

En apariencia, esta es una utilidad esperada bastante atractiva. Pero aun así, John podría decidir dejar su dinero en la institución bancaria. Todo depende de su actitud hacia el riesgo. Si la posibilidad de obtener un porcentaje de –10, 0 o 5 en realidad no alarma a John, deberá entrar al negocio de la cafetería. Sin embargo, como diría un economista, si existe una gran *desutilidad* asociada con los intereses bajos sobre la inversión,

TABLA 4-2
Rendimientos posibles sobre una Inversión

Rendimiento sobre la inversión, %	*Probabilidad*
-10	0.05
0	0.15
5	0.20
10	0.40
20	0.15
30	0.05
	1.00

John podría rechazar la oportunidad de inversión. En este caso no está rechazando el concepto de valor esperado. Más bien está basando su decisión en maximizar la *utilidad* esperada y no en el *valor monetario esperado.* Cuando el interés sobre el dólar está alto, deberá tenerse cuidado al considerar si el valor monetario esperado es un criterio de decisión apropiado. Este punto se analizará con más detalle al final del capítulo.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 4-2

Un vendedor está tratando de decidir si hacer una llamada a un cliente potencial en la periferia de su territorio de ventas. Estima que el costo de hacer la llamada será $100. Las utilidades potenciales, excluido el costo de la llamada, se muestran en la tabla 4-3. ¿Cuál es la utilidad *neta* esperada de hacer la llamada?

LA MATRIZ DE PAGOS

La *tabla o matriz de pagos* proporciona una estructura organizada para analizar situaciones probabilistas en las que se debe seleccionar una sola alternativa de decisión de un conjunto de alternativas. Por ejemplo, una decisión que se presenta con frecuencia en producción requiere selec-

TABLA 4-3
Rendimiento potenciales de la llamada

Rendimiento potencial	*Probabilidad*
0	0.60
50	0.10
100	0.15
500	0.10
1000	0.05
	1.00

donar una sola máquina para compra, de entre varias máquinas posibles. Un gerente de comercialización debe seleccionar un plan para poner el precio de un producto, de entre varios planes. Un auditor debe decidir si contabilizar por completo ciertos registros o sólo tomar una muestra cuando realiza una auditoría. La matriz de pagos junto con el concepto de valor esperado es muy útil para respaldar la toma de decisiones en situaciones como estas.

Componentes y estructura

Los problemas que se pueden explorar mediante una matriz de pagos tienen las siguientes componentes:

1 Un conjunto de *decisiones alternativas*
2 Un conjunto de *eventos* que pueden ocurrir
3 *Probabilidades* que están asociadas con los diferentes eventos
4 *Resultados* (casi siempre en términos económicos) de las interacciones entre las alternativas de decisión y los eventos.

Las alternativas de decisión son las elecciones que tiene disponibles el tomador de decisiones. Con frecuencia se les llama *cursos de acción* alternativos y deben expresarse en términos mutuamente excluyentes.

Los eventos reflejan lo que puede ocurrir si se opta por las diferentes alternativas. Algunas veces se les llama *estados del mundo* para que quede claro que están fuera del control del tomador de decisiones. Los eventos descritos deben ser mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

Es necesario asignar probabilidades a todos los eventos ya sea a través de los datos históricos, del juicio subjetivo o de distribuciones de probabilidad teóricas.

Para cada curso de acción y cada evento existe alguna consecuencia lo resultado para el tomador de decisiones. Estos resultados se especifican casi siempre en términos económicos (dólares y centavos), aunque, como ya se ha discutido antes, hay ocasiones en que el valor monetario no es un criterio apropiado y debe usarse una medida más amplia, como la utilidad o preferencia.

Todos estos componentes se organizan en una estructura de matriz de pagos como la que se muestra en la figura 4-1. Las alternativas de decisión, D_i, forman los renglones de una matriz. Las columnas de la matriz son los eventos posibles, E_i. Abajo de los eventos se muestran las probabilidades P_j *correspondientes. Los elementos de la matriz son los resultados* X_{ij}, *que se obtienen de la interacción de las alternativas de decisión y hs eventos.*

El análisis

Una vez que se han captado en el formato de la matriz de pagos las componentes de la situación de toma de decisiones, el análisis es bastante sencillo. Para cada alternativa de decisión, se realiza el cálculo por rengión

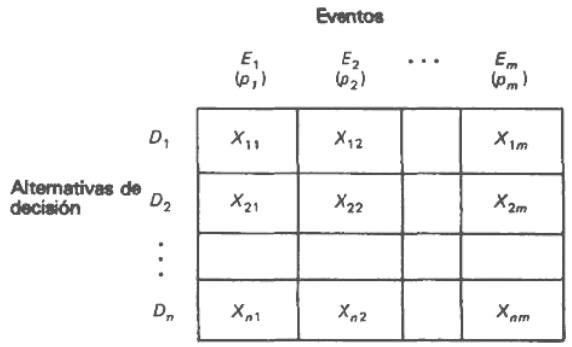


FIGURA 4-1
Estructura de **una** matriz de **pagos.**

de su valor esperado. A continuación se muestra este procedimiento para la matriz de la figura:

$$E(D_1) = p_1X_{11} + p_2X_{12} + \ldots + p_mX_{1m}$$
$$E(D_2) = p_1X_{21} + p_2X_{22} + \ldots + p_mX_{2m}$$
$$\vdots$$
$$E(D_n) = p_1X_{n1} + p_2X_{n2} + \ldots + p_mX_{nm}$$

Entonces se escoge y se pone en práctica la alternativa que tiene el valor esperado óptimo. En la mayoría de las situaciones esto lleva a seleccionar la decisión que ofrece las ganancias o beneficios esperados más altos o que conduce al menor costo esperado.

Ejemplo de una panadería

La panadería Leonard's prepara todos los días su famoso pan. Éste se vende a un dólar la pieza cuando está recién hecho y cuesta $0.50 prepararlo. El pan que no se vende se lleva a la mesa de descuento en donde se vende a $0.50 la pieza. Aun a ese precio, la mitad del pan de la mesa de descuento no se vende y hay que tirarlo.

El problema de la Leonard's es decidir cuantas piezas preparar en un día típico. La historia dice que la demanda de pan ha sido la que se

TABLA 4-4
Demanda de pan

Demanda en docenas de piezas	*Probabilidad*
3	0.10
4	0.40
5	0.40
6	0.10
	1.00

muestra en la tabla 4-4. Los problemas de la Leonard's se pueden analizar mediante una matriz de pagos. Las alternativas de decisión son las diferentes cantidades en docenas de piezas de pan que pueden prepararse. Los eventos y sus probabilidades se pueden basar en los datos históricos. Las consecuencias económicas se pueden determinar a partir de los datos de ingresos y costos. La decisión óptima se puede identificar usando el concepto de valor esperado.

Al menos en teoría, es posible preparar casi cualquier número de piezas de pan. Para ser prácticos, parece razonable, para comenzar, limitar la investigación a una cantidad entre 3 y 6 docenas de piezas por día, ya que ese ha sido el rango de la demanda.

Los resultados de interés en este problema son las ganancias asociadas con la preparación de las diferentes cantidades de docenas de pan. Como ejemplo, considérese la situación en la que se preparan 5 docenas pero se venden sólo 4. Por el lado de los ingresos, se venden 4 docenas a $1 por-pieza y 1/2 docena a $0.50 por pieza al día siguiente.

$$\text{Ingresos} = \$1.00(4)(12) + \$0.50(1/2)(12) = \$51$$

Por el lado de los costos, las 5 docenas cuestan $0.50 por pieza preparada.

$$\text{Costo} = \$0.50(5)(12) = \$30$$

La ganancia de la Leonard's es entonces,

$$\text{Ganancia} = \text{ingresos} - \text{costo} = \$51 - \$30 = \$21$$

Todas las consecuencias económicas se pueden evaluar en una forma semejante.

Los puntos importantes que se consideraron en este problema se organizaron en la matriz de pagos que se muestra en la figura 4-2. La decisión óptima se puede identificar haciendo los cálculos del valor esperado a través de los renglones de la matriz para cada alternativa de decisión.

$$E(\text{preparar 3 doc.}) = \$18(.10) + \$18(.40) + \$18(.40) + \$18(.10) = \$18.00$$
$$E(\text{preparar 4 doc.}) = \$15(.10) + \$24(.40) + \$24(.40) + \$24(.10) = \$23.10$$
$$E(\text{preparar 5 doc.}) = \$12(.10) + \$21(.40) + \$30(.40) + \$30(.10) = \$24.60$$
$$E(\text{preparar 6 doc.}) = \$\ 9(.10) + \$18(.40) + \$27(.40) + \$36(.10) = \$22.50$$

De este análisis se puede observar que la Leonard′s deberá cocinar 5 docenas de piezas de pan al día. Un punto interesante en este problema es que habrá una demanda insatisfecha un décimo del tiempo. Pero dado el valor monetario de esta situación, esto resulta ser una condición justificada.

FIGURA 4-2
Matriz de pagos para la panadería Leonard's

Alternativas de decisión: Preparar	Eventos: Demanda de pan fresco			
	3 doz (0.10)	4 doz (0.40)	5 doz (0.40)	6 doz (0.10)
3 doz	18	18	18	18
4 doz	15	24	24	24
5 doz	12	21	30	30
6 doz	9	18	27	36

EJERCICIO DE PRÁCTICA 4-3

En el capítulo 2 se describió, como un ejemplo de toma de decisiones bajo riesgo, una situación en la que era necesario decidir cuántos árboles de Navidad ordenar. Los árboles costaban $3.50 cada uno y se podían ordenar sólo en lotes de 100; los árboles debían venderse a $8 cada uno. Los que no se vendían no tenían valor de recuperación. Las estimaciones sobre las ventas eran las siguientes:

Venta de árboles	*Probabilidad*
100	0.3
200	0.3
300	0.4
	1.00

Ahora que se ha explicado formalmente la matriz de pagos recomiéndese cuántos árboles se deben ordenar.

ARBOLES DE DECISIÓN

Los *árboles de decisión* se usan en situaciones de toma de decisiones en las que se debe optimizar una serie de decisiones. Por ejemplo, la administración tendrá tal vez que seleccionar un plan de promoción inicial sabiendo que dentro de 6 meses será necesario un segundo plan. Una compañía de bienes raíces puede tener que decidir cuántos condominios construir en la primera fase de un proyecto sabiendo que se tendrán que tomar decisiones parecidas para la segunda y tercera fases. Con frecuencia se tiene que seleccionar un sistema de computación con base en necesidades anticipadas de equipo adicional para una fecha posterior.

Un concepto fundamental en las situaciones que involucran alternativas de decisión y eventos secuenciales es que deben identificarse todas esas alternativas y eventos y analizar de antemano, si se quiere optimizar la serie de decisiones. Con frecuencia el seleccionar lo que parece ser una decisión óptima en el primer punto de decisión, el poner en práctica esa decisión,

el observar el resultado y después repetir el proceso en los puntos de decisión posteriores, no optimiza la serie completa de decisiones.

Componentes y estructura

Todos los árboles de decisión son parecidos a su estructura y tienen las mismas componentes. Para ser más específicos, siempre se requieren las siguientes cuatro componentes:

1 *Alternativas de decisión* en cada punto de decisión.
2 *Eventos* que pueden ocurrir como resultado de cada alternativa de decisión.
3 *Probabilidades* de que ocurran los eventos posibles como resultado de las decisiones.
4 *Resultados* (casi siempre expresados en términos económicos) de las posibles interacciones entre las alternativas de decisión y los eventos.

Estos datos se organizan mediante la estructura de un *diagrama de árbol* que ilustra las interacciones posibles entre las decisiones y los eventos. En la figura 4-3 se presenta el esquema de un árbol de decisión muestra. Inicialmente debe hacerse una decisión entre tres alternativas. Éstas se encuentran en el primer punto de decisión como D_1, D_2, D_3. Por claridad, todos los puntos de decisión se indican por cuadros □ como los que se observan en la figura 4-3.

Los eventos que pueden ocurrir como resultado del primer conjunto de decisiones son E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5. Sus probabilidades respectivas están da-

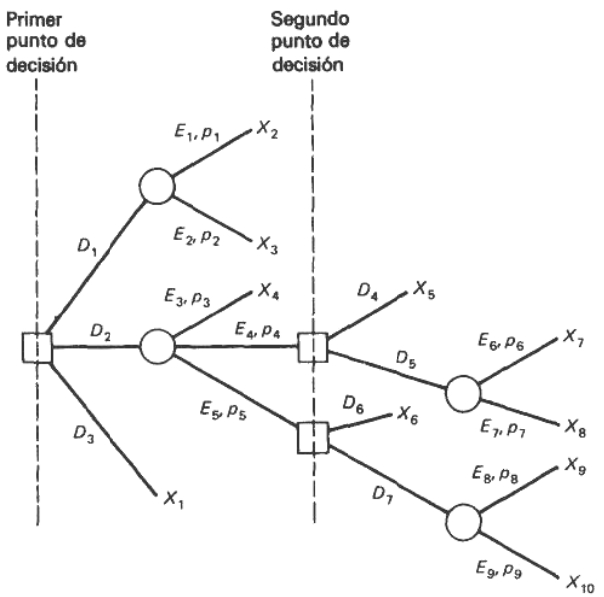


FIGURA 4-3
Esquema de un árbol de decisión muestra.

das por $p_1, \ldots, p_5$. Nótese que si se selecciona D_3, el resultado se conoce con seguridad. Este resultado se muestra al final de la rama D_3 como X_1. Mientras que los puntos de decisión se muestran como cuadros, los nodos de los eventos se representan por círculos O.

Si ocurren los eventos E_1,E_2 y E_3, los resultados se conocen con certidumbre y no se requiere ninguna otra decisión. Estos resultados están dados por X_2, X_3 y X_4, respectivamente. Sin embargo, en respuesta a cualquiera de los eventos E_4 o E_5, la administración debe seleccionar otra alternativa en la serie de decisiones. A partir del evento E_4, debe escogerse entre D_4 y D_5, mientras que E_5 lleva a una selección entre D_6 y D_7. En este ejemplo, todos los eventos están seguidos por un resultado o por otro punto de decisión, pero existen situaciones en que a los eventos siguen otros eventos.

Los eventos que pueden ocurrir como resultado de la decisión que se tomó en el segundo punto de decisión son E_6, E_7, E_8 y E_9. Éstos son eventos finales y llevan a los resultados X_7, X_8, X_9 y X_{10}. El resultado X_5 se obtiene directamente de la decisión D_4.

Et análisis

Se han ilustrado los componentes y la estructura de los árboles de decisión, pero ¿cómo se realiza el análisis? El análisis comienza a la extrema derecha del árbol de decisión y se mueve a través de los nodos de eventos y puntos de decisión hasta que se ha identificado una secuencia óptima de decisiones que comienza en el primer punto de decisión. Se usan las siguientes reglas:

1 En cada nodo de evento se hace un cálculo de valor esperado.
2 En cada punto de decisión se selecciona la alternativa con el valor esperado óptimo.

En la figura 4-4 se ilustra este procedimiento. El árbol de decisión muestra se ha modificado y ahora da los resultados económicos y las probabilidades de los eventos. Se supondrá que el objetivo es maximizar la serie de decisiones. Comenzando el análisis de derecha a izquierda, primero se encuentran nodos de eventos que requieren cálculos del valor esperado. Se encuentra que al nodo del evento en la intersección de E_6 y E_7 le corresponde un valor esperado de $33 000. Esto es la consecuencia de sumar las multiplicaciones de los resultados posibles al tomar la decisión D_5 por sus probabilidades respectivas y representa el valor esperado asociado con la selección de la alternativa de decisión D_5. En el nodo de evento para E_8 y E_9 hay un valor esperado de $35 000. Este valor esperado corresponde al hecho de escoger la alternativa de decisión D_7.

Continuando de derecha a izquierda se encuentran después los segundos puntos de decisión. Éstos requieren la selección de la alternativa de decisión con el mejor valor esperado y el rechazo de las otras opciones. En el punto de decisión para la intersección de D_4 y D_5 se selecciona la alternativa de decisión D_4, ya que $38 000 es un valor esperado más alto que $33 000. En este caso $38 000 es también un resultado cierto o seguro. La

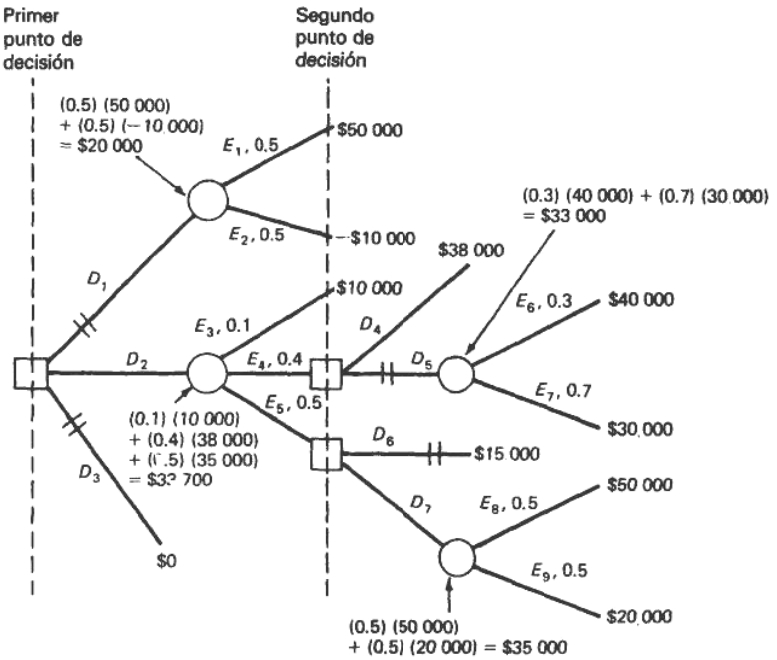


FIGURA 4-4
Análisis del árbol de decisión muestra.

alternativa de decisión D_5 se ignora de aquí en adelante; esto se indica dibujando un par de líneas diagonales // que cortan esa rama del árbol de decisión. En el punto de decisión para D_6 y D_7, la alternativa de decisión D_7, que tiene un valor esperado de $35 000, es mejor que D_6 que tiene un valor esperado (cierto) de $15 000. En consecuencia, D_6 se elimina para el resto del análisis.

El siguiente paso requiere que se realicen más cálculos del valor esperado. En el nodo de evento para E_1 y E_2 se obtiene un valor esperado de $20 000. En el nodo de evento para E_3, E_4 y E_5 se tiene un valor esperado de $33 700. Debe tenerse cuidado en incluir los resultados correctos para los eventos E_4 y E_5. Nótese que sólo se usa el resultado asociado con la alternativa de decisión que se seleccionó previamente. En el caso de E_4, éste es $38 000 que se asoció con D_4; para E_5 es $35 000 que se asoció con D_7. Una vez que se elimina una alternativa de decisión, ninguno de sus resultados posibles es relevante y no deben incluirse en el análisis.

Se ha trabajado hacia atrás hasta el primer punto de decisión. La alternativa de decisión D_1 ofrece un valor esperado de $20 000. D_2 tiene un valor esperado de $33 700. D_3 ofrece $0 (por ejemplo, la alternativa de 10 hacer nada). Es obvio que, considerando parejas todas las demás circunstancias, la selección que debe hacerse es D_2; por lo tanto D_1 y D_3 se eliminan para las siguientes consideraciones.

Ahora es posible identificar el plan óptimo de acción. Se pone en práctica la alternativa de decisión D_2. Si ocurre el evento E_4, la administración deberá seguir con D_4. Si ocurre E_5, se deberá poner en práctica D_7. Este plan ofrece un valor esperado de $33 700.

También es útil examinar el grado de riesgo asociado con este plan. Al hacerlo es importante incluir sólo aquellos resultados asociados con las alternativas de decisión que la administración pretende seguir. Como una medida aproximada del riesgo considérese lo mejor y lo peor que puede ocurrir. Lo peor es un rendimiento de $10 000 como resultado del evento E_3. Lo mejor es un rendimiento de $50 000 si ocurre E_8. Es interesante hacer notar que el plan seleccionado no sólo ofrece un mejor valor esperado que D_1 sino que también involucra menos riesgo. Con D_1 los resultados varían de —$10 000 a $50 000. Desafortunadamente en muchos casos existe una relación inversa entre el riesgo y el rendimiento, y la administración debe decidir cómo balancear estos dos factores importantes.

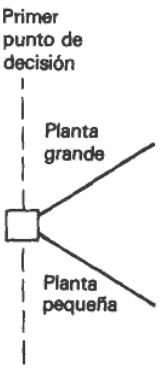


FIGURA 4-5
El primer punto de decisión.

Un ejemplo de tamaño de planta

Como ejemplo del análisis de árboles de decisión, considérese el problema de decidir qué tan grande debe ser la construcción inicial de una planta y después cuánto expandirla si las circunstancias lo ameritan. A través del análisis, todos los resultados se expresarán como valor presente neto descontado sobre la vida económica de la planta. El enfoque del valor presente neto descontado convierte todos los flujos de caja a tiempos iguales para adecuar el concepto del valor del dinero en el tiempo.

La decisión inicial de la administración involucra la construcción de una planta grande o una pequeña. Esta porción del árbol de decisión se muestra en la figura 4-5. Si la administración pudiera predecir la demanda de los artículos producidos en la planta en el periodo de su vida útil, esto sería un problema de análisis de ganancias bastante sencillo y no habría necesidad de un árbol de decisión. Sin embargo, la administración no está segura de cuál será la demanda y ha decidido clasificarla en alta, media y baja. Estos eventos son relativamente independientes del tamaño inicial

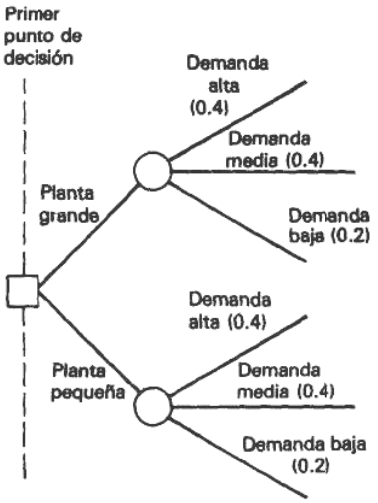


FIGURA 4-6
Diferentes niveles de demanda.

de la construcción de la planta y pueden ocurrir ya sea con la decisión de una planta pequeña o con la de una grande. Véase la figura 4-6.

Si se construye una planta grande, ésta será adecuada para cualquier demanda posible y la administración no tendrá que considerar una expansión. En este punto es apropiado pensar en las consecuencias económicas de construir una planta grande y experimentar los diferentes niveles de demanda. Los rendimientos de operación bonificados con una demanda alta, mediana y baja son 20, 15 y 10 millones de dólares respectivamente. El costo de una planta grande es 10 millones de dólares, lo que da por resultado una ganancia neta de 10, 5 o bien 0 millones de dólares, dependiendo de la demanda; véase la figura 4-7.

Una planta pequeña será adecuada sólo para una demanda baja y la administración quiere considerar la posibilidad de expansión si la demanda resulta ser alta o mediana. Si la demanda es alta, la administración[1] puede seleccionar una expansión grande, una pequeña o no expandir. Si la demanda es moderada, sólo se considerará una expansión pequeña o no expandir. Estas posibilidades se muestran en la figura 4-8.

Los resultados económicos de las alternativas de expansión son un poco más difíciles de describir. Un punto de partida es establecer que el costo de la construcción de una planta pequeña es 6 millones de dólares. La expansión grande costará 5 millones de dólares mientras que una expansión pequeña será de 3 millones de dólares. Desafortunadamente, si ocurre una demanda alta la planta no puede expandirse con la suficiente rapidez como para aprovechar toda la demanda. Sólo se obtendrán 19 millones de dólares por el rendimiento operativo si se opta por una expansión grande. En consecuencia, la ganancia neta será de 8 millones de dólares. Una expansión pequeña dará un neto de sólo 18 millones de dólares ya que este 11-maño todavía no será adecuado para esa demanda potencial. En este caso,

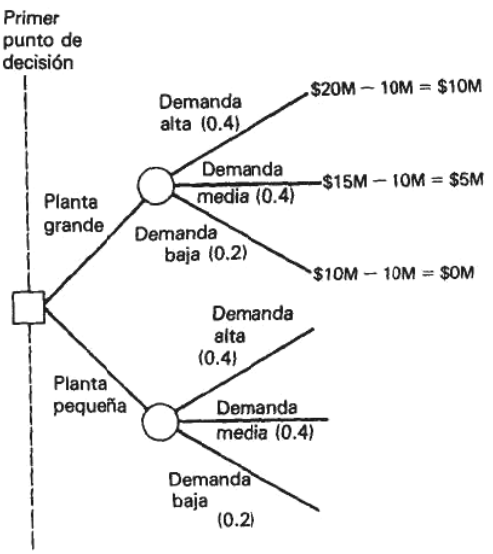


FIGURA 4-7
Consecuencias económicas de una planta grande.

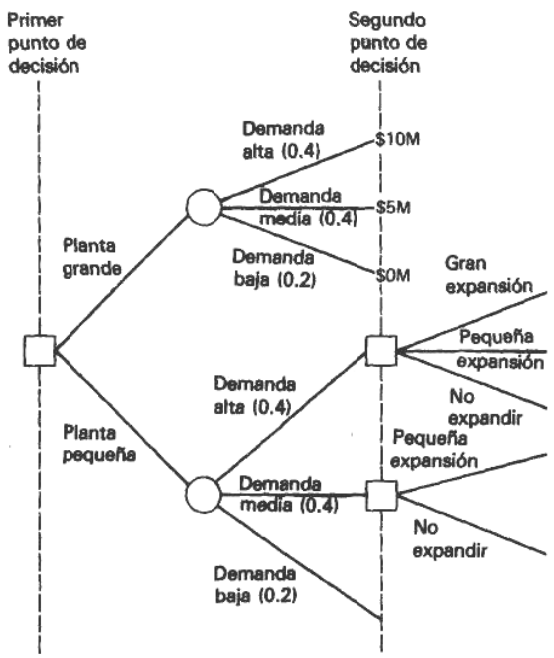


FIGURA 4-8
Expansión de la planta pequeña.

caso, la ganancia neta será de 9 millones de dólares. Si se opta por no expandir, se obtendrán 10 millones de dólares de rendimiento; la misma cantidad que si hubiera nada más una demanda baja. Esto daría por resultado una ganancia de 4 millones de dólares.

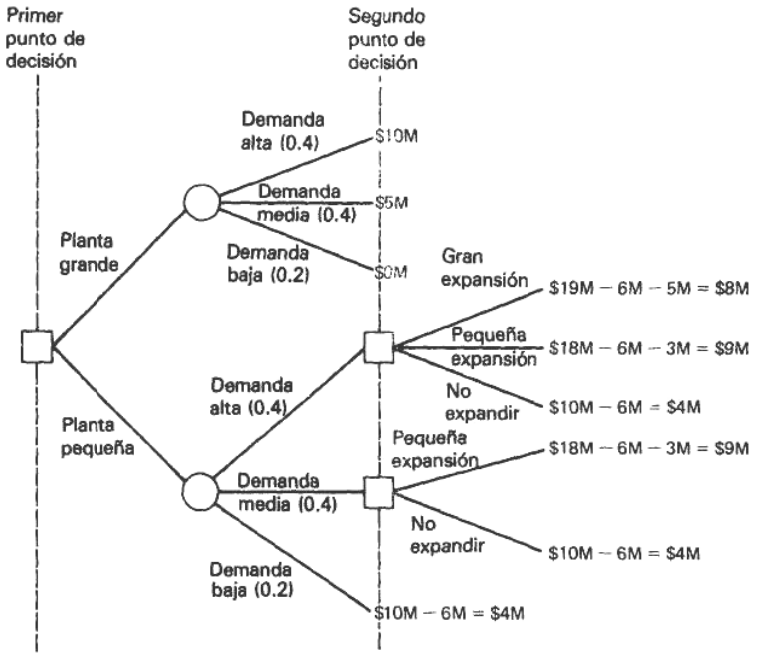
Para una situación de demanda mediana, la administración desea considerar una expansión de planta pequeña o no expandir. La planta expandida generaría 18 millones de dólares en rendimientos, mientras que la decisión de no expandir generaría sólo 10 millones de dólares de rendimientos. La ganancia neta para estas dos situaciones es 9 y 4 millones de dólares respectivamente. La figura 4-9 muestra todas estas consecuencias económicas.

El análisis del árbol de decisión se muestra en la figura 4-10. Comenzando a la extrema derecha del árbol de decisión se encuentra el segundo punto de decisión. A la salida de la rama de planta pequeña y demanda alta, la mejor decisión es hacer una expansión pequeña. La expansión pequeña es también la mejor decisión sobre la rama de planta pequeña y demanda media.

Ahora se hacen los cálculos del valor esperado en los nodos de eventos. La alternativa de una planta grande lleva a un valor esperado de 6 millones de dólares. La decisión de una planta pequeña tiene un valor esperado de 8 millones de dólares. Nótese una vez más que sólo se incluyen en el análisis los resultados que corresponden a alternativas seleccionadas previamente.

Cuando se comparan los valores esperados para las alternativas de una planta pequeña y una grande, es obvio que la mejor selección es la cons-

FIGURA 4-9
Consecuencias económicas de una planta pequeña.



tracción inicial de una planta pequeña. Después, si ocurre que la demanda es alta o mediana, deberá realizarse una expansión pequeña. Este plan tiene una ganancia esperada de 8 millones de dólares y un rango de resultados posibles de 4 a 9 millones de dólares. (¿Está el lector de acuerdo con este rango?)

Un árbol de decisión en lugar de una matriz de pagos

Puede surgir la idea de que un árbol de decisión se puede usar tanto en situaciones de toma de decisiones secuenciales como sencillas. En otras palabras, que un árbol de decisión se puede emplear en lugar de una matriz de pagos. Sin duda, este es el caso. El árbol de decisión en esta situación tendrá sólo un punto de decisión. Saliendo de ese punto se encontrarían las alternativas de decisión. Partiendo de cada alternativa se encontrarían los eventos. Los valores esperados se determinan para cada alternativa de decisión y con éstos se selecciona la decisión óptima.

El que se use una matriz de pagos o un árbol de decisión para una situación de una sola toma de decisiones es en esencia cuestión de preferencia personal. No obstante, la experiencia del autor es que la matriz de pagos, con su estructura más formal, es más fácil de manejar correctamente por los principiantes en estas aplicaciones.

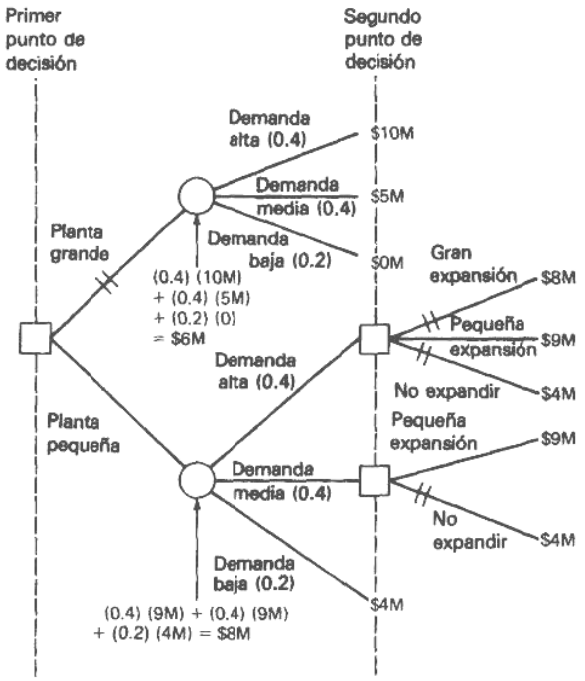


FIGURA 4-10
Análisis del árbol de decisión.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 4-4

Como subproducto de otra investigación, la compañía Whitehall Drug encontró una substancia que puede emplearse como crema bronceadora. Una compañía importante en la industria del cuidado de la piel ha ofrecido comprar los derechos sobre la crema por $20 000 y ellos después desarrollarían el producto comercialmente. La Whitehall está considerando desarrollar el producto por sí misma. Se estima que este esfuerzo costará $30 000 y tendrá la mitad de las posibilidades de resultar un éxito. Si el producto se desarrollara con éxito, varias compañías tratarían de comprar los derechos, la Whitehall piensa que existe una posibilidad de 0.40 de recibir $80 000 y de 0.60 de recibir $45 000 por los derechos, descontados los costos de desarrollo. Otra opción después de desarrollar el producto sería que la Whitehall misma lo comercializara. Se piensa que los rendimientos posibles de esta alternativa son $10 000, $50 000 y $150 000 con probabilidades respectivas de 0.30, 0.50 y 0.20, excluidos los costos de desarrollo. Si la Whitehall fracasa en su intento por desarrollar el producto, piensa que todavía podría vender los derechos por sólo $5 000.

Desarróllese un plan óptimo de acción para la Whitehall. Háganse comentarios sobre el riesgo asociado con las diferentes alternativas.

UNA ADVERTENCIA SOBRE EL USO DEL VALOR MONETARIO ESPERADO

En varios puntos del capítulo se han hecho comentarios sobre el riesgo y la utilidad (o preferencia). En este momento parece apropiado explorar estos conceptos con más detalle. Su importancia es mayor al tratar de entender cuándo el valor monetario esperado no es un criterio apropiado para la toma de decisiones.

En términos generales, el *riesgo* se refiere a la variación en los resultados posibles. Mientras más varíen, se dice que el riesgo es mayor. Por ejemplo, si la oportunidad de inversión A tiene un rendimiento esperado del 8% con una variación posible de 0 a 16% y la oportunidad B tiene un rendimiento esperado del 8% con una variación posible de —8 a 24%, B involucra mayor riesgo que A. Por razones que se discutirán después, tanto la gente como las organizaciones tratan de minimizar el riesgo.

El riesgo puede cuantificarse en varias formas diferentes. Hasta aquí se ha visto el *rango* posible de los resultados como una medida burda del riesgo, Otra alternativa es calcular la *variando* (var) usando la siguiente fórmula.:

$$\mathrm{var}(X) = \sum_{i-1}^{m} p(\mathrm{X_j}) \cdot [X_i - E(X)]^2 \qquad (4\text{-}2)$$

En la tabla 4-5 se muestra un cálculo ilustrativo de la variancia para una distribución de probabilidad. Cada desviación alrededor del valor esperado se eleva al cuadrado, se multiplica por su respectiva probabilidad y después se suma. Ésta es una medida un poco más sofisticada del riesgo que el rango, ya que toma en cuenta las probabilidades de esas variaciones alrededor del valor esperado.

¿Por qué la gente y las organizaciones tratan de minimizar el riesgo? Una razón fundamental es que los resultados extremos (en particular, los desfavorables) con frecuencia tienen consecuencias altamente indeseables. En cuanto a una organización, su habilidad para funcionar de manera adecuada y viable puede verse deteriorada. En cuanto a un individuo, una decisión desastrosa puede impedirle el avance profesional. En consecuencia, muchas veces se toman decisiones que producirán por lo menos resultados satisfactorios, si no óptimos.

La *utilidad* es un término que se usa para connotar la cantidad de satisfacción que se obtiene de un resultado. Un resultado muy satisfactorio tiene una gran cantidad de utilidad, mientras que un resultado desfavorable tiene una utilidad muy pequeña o tal vez desutilidad - una cantidad negativa de utilidad.

La mayoría de las personas y las organizaciones no tienen una relación lineal, o en línea recta, entre el valor monetario y la utilidad para todas las cantidades de dinero. Por ejemplo, esto quiere decir que el duplicar 1a cantidad de dólares involucrados no siempre duplica la utilidad. Considérese la figura 4-11. Existe una relación lineal sólo en un rango de valores para el dinero. Mientras los valores de los dólares se vuelven más y más negativos, la desutilidad se vuelve mucho peor en una forma no lineal.

TABLA 4-5
Un cálculo de varianza

X	$p(X)$	$X \cdot p(X)$	$[X-E(X)]^2$	$p(X) \cdot [X-E(X)]^2$
−5	0.2	−1.00	56.25	11.25
0	0.3	0.00	6.25	1.875
5	0.3	1.50	6.25	1.875
10	0.2	2.00	56.25	11.25
	1.0	$E(X) = 2.5$		$\text{var}(X) = 26.25$

Esto corresponde a los puntos en los que la habilidad del individuo o de la organización para funcionar de manera efectiva y segura se ve deteriorada. En el otro extremo, en donde la cantidad de dinero involucrada se vuelve extremadamente grande, hay un punto en el que un dólar adicional trae un incremento menor que el equivalente en la utilidad. Un economista diría que en algún punto el dinero tiene una utilidad marginal que disminuye.

Es obvio que el momento en que la curva de utilidad de un individuo o de una organización se vuelve no lineal depende de ese individuo o compañía en particular. La General Motors está mejor preparada para afrontar el riesgo en un sentido absoluto, que la tienda de abarrotes del abuelo. Lo mismo puede decirse de los potentados Rockefeller en contraste con el común denominador de las gentes.

Independientemente del punto en que se vuelve no lineal la curva de utilidad para la parte involucrada, es aquí donde el valor monetario esperado deja de ser un criterio apropiado para la toma de decisiones. Es aún apropiado el concepto de valor esperado, pero deberá emplearse la utilidad esperada en lugar del valor esperado del dinero. Todos los valores en

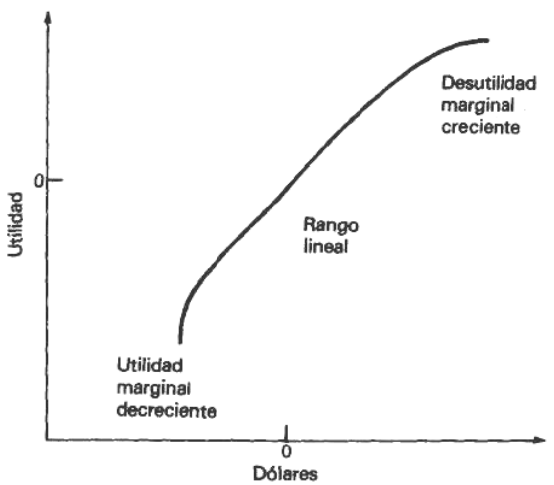


FIGURA 4-11
Una curva de utilidad

dólares deberán sustituirse por sus utilidades equivalentes. Se ha trabajado en investigaciones sobre cómo crear curvas de utilidad para organizaciones e individuos; profundizar en esto queda fuera del alcance que se pretende aquí. Será suficiente decir que el valor monetario esperado deberá usarse con mucho cuidado como criterio de decisión cuando las cantidades de dinero son relativamente grandes.

EXPERIENCIAS DEL MUNDO REAL

Hay mucho que aprender al observar los éxitos y fracasos de las compañías que han usado la matriz de pagos y los árboles de decisión. Sus experiencias proporcionan una base para adquirir mejores puntos de vista sobre la aplicación de estos métodos. La siguiente descripción se basa en un artículo de la revista *Harvard Business Review* escrito por Rex Brown.[3] En su artículo, Brown usa el término *teoría de decisión estadística* (SDT) al referirse al análisis de matriz de pagos y árboles de decisión. Se seguirá esta terminología aun cuando algunos académicos dirían que ésta es una conceptualización demasiado restringida de la SDT.

La teoría de decisión estadística es una ayuda cuantitativa relativamente nueva para la toma de decisiones. Los primeros que la usaron fueron la Du Pont al final de la década de los 50 y la Pillsbury al principio de la década de los 60. Desde entonces, un creciente número de organizaciones la han comenzado a usar. Las experiencias de estas compañías han variado; la mayoría han sido favorables, pero algunas ha resultado desfavorables. En estos casos, el problema principal ha sido la renuncia por parte de los administradores a confiar en el análisis que se ha realizado. Parte del problema es de naturaleza educativa. Es difícil que se use una técnica a menos que alguno de los usuarios de alto nivel entienda sus limitaciones *y* su alcance. Esta condición es cierta más que nada con los altos ejecutivos, muchos de los cuales recibieron su educación formal antes de que las nuevas técnicas cuantitativas se desarrollaran. Como dijo J. T. Axon, gerente de la División de Ciencias de la Administración de la Du Pont:

> Aun en estas fechas, tenemos en Du Pont, a mi juicio, muy pocos tomadores de decisiones clave que estén "abiertos" a las posibilidades de la SDT y que se sientan a gusto al usarla. Es esta carencia la que ha hecho que los esfuerzos de Du Pont no fructifiquen.

Este problema se puede aliviar con entrenamiento o cursos internos como los que ofrecen la General Electric y la Ford, y con el tiempo, cuando las posiciones administrativas vayan quedando en manos de estudiantes graduados con conocimientos de la teoría de decisión estadística.

Otro problema con el uso de la SDT es la renuencia de algunos administradores a admitir suposiciones de riesgo e incertidumbre. Muchos administradores están más interesados en *reducir el riesgo* que en *admitirle y analizarlo* cuando está presente. También en algunas situaciones, la decisión

[3] Rex B. Brown, "Do Managers Find Decisión Theory Useful?" *Harvard Business Review* (Mayo-Junio 1970), p. 78-89.

final del administrador queda influenciada por suposiciones no establecidas que en un principio dudó en expresar. Se requiere alguna experiencia con la SDT para que los usuarios comiencen a sentirse en confianza con sus necesidades de datos de entrada.

Habiendo tocado el punto de los mayores problemas que se han encontrado al aplicar SDT, se considerarán ahora algunas de las decisiones exitosas tomadas por las organizaciones. En General Electric se ha desarrollado una biblioteca especial de programas de computadora de SDT. Pillsbury y la Inmount han adoptado el enfoque "de cerca" al usar SDT. En este enfoque el analista con conocimientos de SDT trabaja muy de cerca con el ejecutivo y casi siempre le comunica sus resultados. Esto ha funcionado mejor que el enfoque "a distancia" en que el análisis lo realiza un grupo distante, dentro de la organización, del ejecutivo para el que se está trabajando.

La teoría de decisión estadística no se usaría si no ofreciera ciertas ventajas. Brown cita las siguientes que los usuarios han establecido:

1 Introduce el pensamiento informal en los elementos críticos de una decisión.
2 Introduce las suposiciones implícitas escondidas tras una decisión y aclara sus implicaciones lógicas.
3 Proporciona una manera efectiva para comunicar el razonamiento que respalda una recomendación.

Para el usuario nuevo de SDT, Brown ofrece las siguientes sugerencias:

1 Asegurarse de que el jefe ejecutivo de la compañía (o de la unidad operativa) se involucre lo suficiente.
2 Asegurarse de que por lo menos unos cuantos ejecutivos clave tienen un conocimiento mínimo de la ayuda que les puede ofrecer SDT y de lo que requiere de ellos. (Esto puede hacerse mediante cursos cortos, de orientación sobre SDT que están disponibles en la actualidad.)
3 Realizar por lo menos una prueba sobre un problema de decisión – de preferencia una prueba en vivo - con la ayuda de un especialista en SDT. Usar el ejercicio como un modo de entrenamiento para los ejecutivos y el personal, sin esperar resultados inmediatos.
4 Planear la contratación de personal especializado o el entrenamiento de personal interno para llevar a cabo los detalles de los análisis subsecuentes. Los especialistas deberán informarlo directamente a usted y no a algún grupo de investigación de operaciones distante en la organización.
5 La persona que aplica la técnica y el personal deberán independizarse e los especialistas externos tan pronto como sea posible: éstos deberán usarse sólo como un recurso técnico residual.
6 En cualquier SDT particular, debe seguirse de cerca el análisis para asegurarse de que el problema que se está resolviendo es el que se tiene y que se aceptarán *todas* las suposiciones establecidas. Esto tal vez signifique realizar un análisis menos sofisticado de lo que le gustaría al técnico típico. Esto también puede significar que la persona que aplica la técnica dedique más tiempo del que pensó a este análisis.

RESUMEN

La matriz de pagos y los árboles de decisión se pueden usar para analizar situaciones de toma de decisiones probabilísticas. Estos métodos no garantizarán que una decisión sea óptima, pero a la larga su aplicación deberá conducir a la optimización del comportamiento de la toma de decisiones.

Las probabilidades que se usan en un análisis estocástico pueden basarse en datos históricos, en el juicio subjetivo y/o en una distribución teórica. Cuando se usan los datos históricos, las frecuencias relativas de los eventos pasados se convierten en las probabilidades del futuro. En *el* juicio subjetivo, se reflejan en las probabilidades las opiniones personales del tomador de decisiones. Las distribuciones teóricas se pueden usar al -gunas veces para describir ciertas situaciones probabilísticas.

El concepto de valor esperado es fundamental para el uso de la matriz de pagos y los árboles de decisión. Éste es un concepto a largo plazo que es análogo al de proyectar la media al futuro. Indica lo que "en promedio pasaría" si se repitiera una y otra vez la misma situación de toma de decisiones.

Se puede usar un formato de matriz de pagos para analizar situaciones de una sola toma de decisiones. Las alternativas de decisión forman los renglones de la matriz; los eventos posibles y sus probabilidades se convierten en las columnas. Los resultados que se obtienen de la interacción de las alternativas de decisión y los eventos comprenden los elementos de la matriz. La decisión óptima se identifica al hacer los cálculos del valor esperado a través de los renglones de la matriz.

Los árboles de decisión se pueden usar para analizar situaciones en las que debe hacerse una serie de toma de decisiones. Las alternativas de decisión y los eventos posibles se incluyen en la estructura de un diagrama de árbol. El árbol se analiza de derecha a izquierda. Los cálculos del valor esperado se realizan en los nodos de eventos y la alternativa óptima de decisión se identifica en cada punto de decisión.

Debe tenerse cuidado al usar el valor monetario esperado como un criterio de decisión cuando las cantidades de dinero involucradas son relativamente grandes, ya que las curvas de utilidad de los individuos y de las organizaciones no son lineales en todos los rangos. Desde un punto de vista teórico, el criterio de decisión para los rangos no lineales deberá ser la optimización de la utilidad esperada.

Las experiencias de varias compañías indican el alcance de la matriz de pagos y de los árboles de decisión y proporcionan ideas sobre la mejor forma de aplicarlos.

EJERCICIOS

Probabilidades

4-1 Las probabilidades se pueden basar en datos históricos, en el juicio subjetivo y/o en una distribución teórica. ¿Cuáles serían las fuentes más probables en las siguientes situaciones?

a Determinar la posibilidad de que el siguiente cliente que entre quiera reordenar un artículo que no se tiene en inventario.
b Estimar el tiempo medio de fracaso de una máquina nueva que se acaba de comprar.
c Estimar la tasa media de ocupación en un complejo de departamentos que está bien establecido.
d Determinar la probabilidad de que las siguientes dos piezas que se produzcan sean defectuosas si se sabe que el 2% del total resulta defectuoso

4 - 2 Evalúense las siguientes afirmaciones sobre las fuentes de las probabilidades:
a Todo excepto "los datos vírgenes" es especulación y no debe incluirse en la toma de decisiones.
b Las decisiones tienen que hacerse, y usar los sentimientos subjetivos es mejor que nada.
c En algunos casos los datos apropiados no están disponibles y debe usarse el juicio subjetivo.
d El futuro nunca es como el pasado y los datos históricos no son importantes.

Valor esperado

4 - 3 En seguida se muestra una distribución de probabilidad de los posibles valores presentes netos descontados para una oportunidad de inversión.

Valor presente neto descontado	*Probabilidad*
$ —500	0.1
2 000	0.3
4 000	0.3
8 000	0.3
	1.0

a Calcúlese el valor presente neto descontado esperado.
b Calcúlese la variancia del valor presente neto descontado.

4-4 Linda Wilkinson es funcionario de la oficina de préstamos en el Trust National Bank. Sam Burgess solicitó un préstamo para la compra de un automóvil con un pago mínimo de enganche. Linda piensa que existe un 90% de posibilidades de que Sam pague el préstamo sin problemas. El rendimiento para el banco, si éste es el caso, será de $200. Sin embargo, si Sam falla, el rendimiento neto para el banco será una pérdida de $50. ¿Cuál es el valor esperado de concederle el préstamo a Sam?

Matriz do pagos

4-5 En la matriz de pagos que se muestra en seguida, identifíquese la alternativa de decisión que maximiza.

		Eventos		
		E_1 (.4)	E_2 (.5)	E_3 (.1)
Alternativas de decisión	D_1	80	400	300
	D_2	160	300	400

4-6 En la matriz de pagos que se muestra en seguida, identifíquese la alternativa de decisión que minimiza.

		Eventos		
		E_1 (.2)	E_2 (.6)	E_3 (.2)
Alternativas de decisión	D_1	−200	1800	2000
	D_2	150	600	2000
	D_3	−660	100	3000

4-7 Seaside Properties está planeando el desarrollo de un conjunto de condominios cerca de Fort Myers, Florida. El terreno que se piensa comprar costará $600 000. El desarrollo del área común costará otros $400 000. Las unidades costarán $30 000 cada una, y se espera que se vendan por $80 000. El problema es decidir cuántas unidades construir, si se construyen. Si se obtiene una demanda alta por I as unidades, se podrán vender 40 de ellas a precio completo. Se piensa que la probabilidad de una demanda alta es 0.35. Si se obtiene una demanda media, sólo se podrán vender 30 a precio completo. Se hará un *"dumping"* de las unidades restantes con una pérdida de $5 000 por unidad. La probabilidad de una demanda media es 0.55. Si la demanda resulta ser pequeña, sólo 20 se podrán vender a precio completo y el resto tendrá que venderse con una pérdida de $5 000 por cada una. ¿Deberá la Seaside Properties construir 0, 20, 30 o 40 unidades?

4-8 Sue Farmer es un comprador en el departamento de damas de la tienda Goldsmith's. Está tratando de decidir cuántas docenas de vestidos de cierta línea de otoño comprar. Cada docena vendida durante el otoño generará $150 de ganancia para la tienda. Cada docena no vendida al final de la temporada tendrá un costo para la tienda de $50. Sue piensa que la demanda para la temporada será de 4, 5, 6 o 7 docenas de vestidos con probabilidades respectivas de 0.4, 0.3, 0.2 y 0.1. ¿Cuántas docenas deberá ordenar?

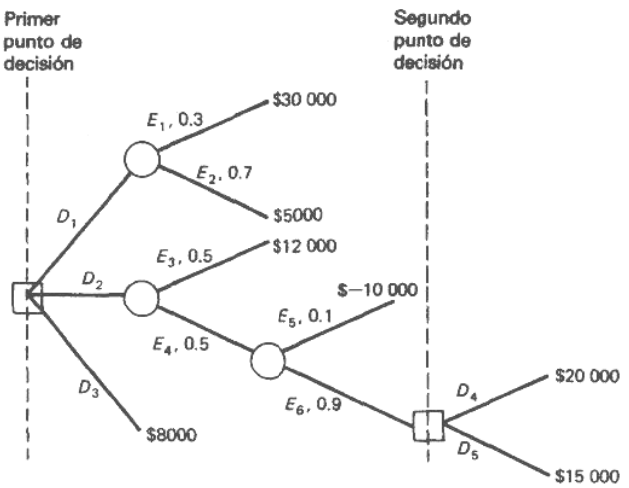
4-9 La compañía Gusher Oil está tratando de decidir si comprar los derechos de perforación sobre el rancho de Mr. Anthony. La compañía piensa que existe una probabilidad de 0.20 de encontrar petróleo y si se encuentra, se tendrá un rendimiento de $600 000 después de y sobre el costo de los derechos de perforación. Mr. Anthony quiere $100 000 por los derechos. ¿Qué curso de acción se debe recomendar a la Gusher?

4-10 La compañía Gammage necesita reemplazar una de sus máquinas y está considerando la compra de la máquina A o de la B. La máquina A tiene un costo inicial de $100 000 y costos de operación por unidad de $0.50. Por otro lado, la máquina B tiene un costo inicial de $140 000 y costos de operación de $0.35 por unidad. La demanda durante la vida útil de las máquinas es incierta, pero la administración piensa subjetivamente que puede ser de 100 000, 200 000 o 300 000 unidades con probabilidad respectivas de 0.2, 0.4 y 0.4. ¿Qué máquina deberá comprar la compañía?

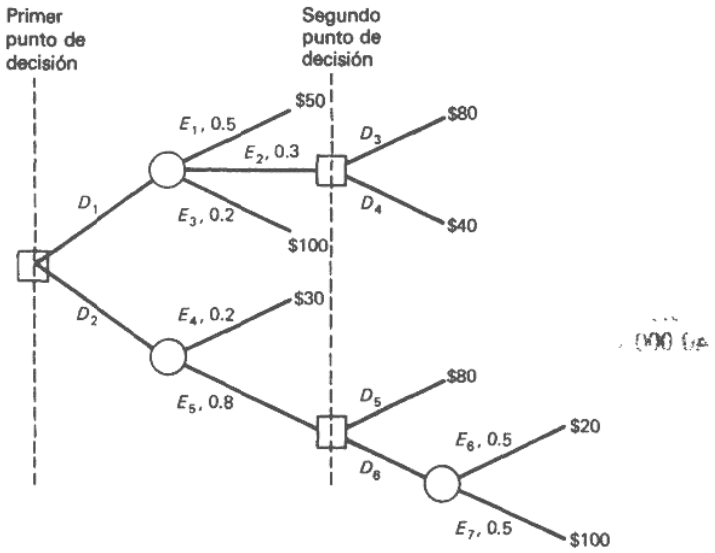
4-11 Bill Johnson, un agricultor de cítricos de Florida, ha recibido una oferta de contrato de $100 000 por la cosecha de este invierno. Bill piensa que si hay una helada fuerte, su cosecha rendirá sólo $20 000 en el mercado. Sin embargo, si no ocurre la helada fuerte, la cosecha deberá redituar $200 000. ¿Cuál es la probabilidad de una helada fuerte a la que Bill sería indiferente entre sus dos alternativas?

Árboles de decisión

4-12 Analícese el árbol de decisión que se muestra en seguida para un plan de acción que maximice.



4-13 Analícese el árbol de decisión que se muestra en seguida para un plan de acción que minimice.



4-14 La Sensual Cosmetics Company ha desarrollado un nuevo perfume que, según la opinión de la administración, tiene un potencial tremendo. No sólo interactúa con la química del cuerpo de la persona que lo usa para crear una fragancia única, sino también es especialmente duradero. Se ha gastado ya un total de $100 000 en este desarrollo. Se han diseñado dos planes de comercialización. El primero sigue la práctica usual de la compañía de regalar pequeñas muestras del nuevo producto en la compra de otros productos de esa línea y de colocar anuncios en las revistas populares de mujeres. Este plan costaría $50 000 y se piensa que se puede obtener una respuesta alta, moderada o baja del mercado con probabilidades de 0.2, 0.5 y 0.3, respectivamente. La ganancia neta, excluidos los costos de desarrollo y promoción en estos casos, serían de $200 000, $100 000 y $10 000, respectivamente. Si más tarde pareciera que la respuesta del mercado va a ser baja, todavía sería posible realizar una campaña de comerciales en televisión. La campaña costaría otros $75 000 y cambiaría la respuesta a alta o moderada como se describió antes pero con probabilidades de 0.5 cada una. El segundo plan de comercialización es más agresivo que el primero. Su mayor énfasis estaría en comerciales de televisión. El costo total de este plan sería de $150 000, pero la respuesta del mercado deberá ser excelente o buena con probabilidades respectivas de 0.4 y 0.6. La ganancia para los dos resultados posibles, descontados los costos de promoción y desarrollo, sería de $300 000 y $250 000. Identifíquese la secuencia óptima de decisiones que se debe seguir.

4-15 Algunas personas parecen tener toda la suerte del mundo. Debido a su mente sutil y a su encanto devastador, el gran Larry ha recibido tres propuestas de matrimonio durante la semana pasada. Después

de decidir que es tiempo de sentar cabeza, Larry necesita ahora escoger a una de sus pretendientes. Como es una persona muy lógica, ha determinado que los atributos emocionales y físicos de las tres mujeres son más o menos los mismos y ha decidido escoger en base a sus recursos financieros. Parece que una de las solicitantes, Jenny, tiene un padre rico que sufre de artritis crónica. Larry calcula una probabilidad de 0.3 de que el padre muera en los próximos años y les deje una herencia de $100 000 (después de impuestos). Si el padre de Jenny vive una larga vida, Larry no recibirá ni un centavo de él. Jana, otra de las novias, es una contadora ambiciosa en una compañía con reputación. Larry estima una probabilidad de 0.6 de que Jana siga su carrera y una probabilidad de 0.4 de que la deje y se dedique a sus hijos. Si continúa con su trabajo, ella podría seguir en la auditoría o cambiar al departamento de impuestos de la firma. Al quedarse con la auditoría existe una probabilidad de 0.5 de que gane $40 000 y una de 0.5 de que gane $30 000. Al tomar la opción de los impuestos, hay 0.7 de posibilidades de que sus ingresos sean de $40 000 y una posibilidad de 0.3 de que sean de $25 000. Si termina su carrera para dedicarse a sus hijos ganará $20 000 en un trabajo de tiempo parcial. Mary, la última competidora, sólo puede ofrecer a Larry su dote de $25 000.

a ¿Con quien deberá casarse Larry? ¿Por qué?

b ¿Cuál es el riesgo involucrado en la secuencia óptima de decisiones?

Utilidad

4-16 James B. Megabucks, un petrolero de renombre mundial, hombre arriesgado y gran deportista, está en sus vacaciones anuales de aventuras. Lo acompaña en las selvas de Sudamérica Homer Jones, un amigo muy cercano pero pobre. Al seguir la vereda junto a un río infestado de pirañas, James B. Megabucks tropieza con la raíz de un árbol y cae al agua. Jones, viendo a su amigo atacado por la horrible piraña salta al río y lo rescata. Huelga decir que Megabucks está en extremo agradecido con su amigo por arriesgar su vida y le dice, "Jones, te daré $1 000 000 por salvarme la vida". Para Jones la vida de pobreza ha tocado a su fin. No obstante, después de dar unos pasos, Jones oye decir a Megabucks. "Jones, siempre me han gustado las apuestas. Te diré lo que voy a hacer. Tiraré una moneda al aire, si aciertas te daré $2 100 000. Sin embargo, si pierdes, ese $1 000 000 que te iba a dar. . . Bueno, simplemente olvidaremos el asunto."

a Si el lector fuera Jones, ¿Qué le diría a Megabucks?

b ¿Es esta respuesta congruente con el concepto de optimizar el valor esperado?

c ¿Qué características de esta situación de toma de decisiones la hacen diferente de las usuales?

d ¿Cómo puede aplicarse aquí el concepto económico de utilidad marginal que disminuye?

ESTUDIO DE UN CASO: KEY WEST OF HAWAII

Billy Clyde estuvo siempre muy cerca de su abuelo. Incluso la gente decía que se parecían. Estando en buena posición financiera, el abuelo de Billy abrió un fondo de fideicomiso que Billy recibiría cuando cumpliera 25 años. Billy acaba de celebrar su vigésimo quinto aniversario y ha recibido $80 000 del fideicomiso que puso su abuelo.

Billy ha usado parte del dinero para financiar un viaje a Hawaii. Estando allí, decide que quiere invertir el resto del dinero en un área de condominios. Él usará el condominio parte del año y el resto del tiempo lo rentará. Existe un condominio por el que Billy se interesa en particular. Con un horizonte de planeación de 5 años, Billy piensa que recibirá netos $40 000 o $50 000 con probabilidades de 0.6 y 0.4, respectivamente, considerando los ingresos por renta, la reevaluación, el ahorro de impuestos, etc. Un viaje que Billy tiene planeado a Key West, Florida, está complicando su decisión. Ahora también se interesa por comprar un condominio allá, pero no tiene suficiente dinero para invertir en ambos lugares. Billy piensa que si se espera hasta después de su viaje a Key West, existe sólo un 50% de posibilidades de que la propiedad de Hawaii esté disponible. Si resulta que la propiedad de Hawaii ya no está disponible, sencillamente comprará algo en Key West. Si todavía está disponible la propiedad de Hawaii, Billy piensa que existe una probabilidad de 0.6 de que pueda comprarla más barata. Esto aumentaría su rendimiento neto esperado en $10 00). Para saber más sobre los rendimientos posibles de una inversión en Key West, Billy llama a su agente de bienes raíces allá. Basándose en su conversación, Billy estima que puede haber rendimientos de $20 000, $40 000 o $60 000 con probabilidades respectivas de 0.4, 0.4 y 0.2, en un horizonte de planeación de 5 años.

¿En dónde debe comprar Billy el condominio? ¿Por qué? ¿Cuál es el riesgo asociado con la secuencia óptima de decisiones?

BIBLIOGRAFÍA

Brown, Rex V., Andrew S. Kahr y Cameron R. Peterson: *Decisión Analysis for the Manager* (New York: Holt, 1974)

Brown, Rex V.: "Do Managers Find Decisión Theory Useful?" *Harvard Business Review* (Mayo-Junio 1970), pp. 78-89

Spurr, William A. y Charles P. Bonini: *Statistical Analysis for Business Decisions,* ed. rev. (Homewood, Ill.: Irwin, 1973).

Ulivila, Jacob, Rex B. Brown y Karle S. Packard: "A Case in On-Line Decision Analysis for Product Planning", *Decision Sciences* (Julio 1977), p. 598-615

5

CUANDO HAY UN OPONENTE: TEORÍA DE JUEGOS

Es fatal entrar a cualquier guerra sin la voluntad de ganar.

Douglas Mac Arthur

Cuando el Gran Apuntador viene a escribir contra tu nombre, él anota no que ganaste o perdiste, sino la forma como jugaste

Grantland Rice

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje
La matriz de pagos para un juego
Juegos de estrategia pura
- El criterio miximin
- Punto de silla de montar
- Valor del juego
- Resumen de juegos de estrategia pura
- Ejercicio de práctica (5-1)

Juegos de estrategia mixta
- Hallazgo de momios (oportunidades)
- Realización de una estrategia mixta
- Valor del juego
- Una sola jugada contra jugadas repetitivas
- Juegos con más de dos estrategias
- Resumen de juegos de estrategia mixta
- Ejercicio de práctica (5-2)

Casos especiales
- Estrategias dominantes
- Juegos con pagos cualitativos

Juegos con más de dos personas
Juegos de suma distinta de cero
- Ejercicio de práctica (5-3)

Experiencias del mundo real
Resumen
Ejercicios
Estudio de un caso: sindicatos de profesores
Bibliografía

Como en cualquier nación, en Estados Unidos hay pasión por ganar: guerras, juegos de fútbol y concursos de belleza, en los negocios y en el póquer. Cualquiera que sea el "juego", se quiere ganar. Vince Lombardi expresó esto en forma muy clara: "Ganar no es todo; es lo único". Sin embargo, existe un gran respeto por el juego justo o por jugar de acuerdo a las reglas, como lo expresó Grantland Rice. Sin duda, esta voluntad de ganar (justamente) a la luz de una competencia es fundamental para el sistema de la libre empresa, conduce en forma bastante natural a un fuerte interés en los juegos y en las estrategias óptimas para ganar.

Sería magnífico si se tuviera una gran estrategia universal para ganar todo tipo de juegos. Sin embargo, debido a la enorme variedad de juegos y reglas es poco probable que tal teoría universal se desarrolle. Pero pueden ponerse atención en ciertos tipos especiales de juegos y desarrollar estrategias óptimas para ellos.

La *teoría de juegos,* desarrollada por Von Neumann y Morgensterrn y descrito en su texto clásico en 1944, trata de la toma de decisiones *bajo conflicto.* Un *juego* incluye dos o más tomadores de decisiones que buscan maximizar su propio bienestar, es decir, ganar. El resultado del juego depende de las acciones que toma cada uno de los jugadores. Para analizarlos, los juegos se clasifican por el *número de jugadores,* por la *suma algebraica* de todos los pagos y por el *número de estrategias* o acciones posibles. Los juegos de *dos personas* son los más fáciles de analizar. Como se verá en este capítulo, los juegos con más de dos jugadores presentan mayores dificultades analíticas.

Cualquier juego en que las ganancias de los ganadores igualan exactamente a las pérdidas de los perdedores se llama un *juego de suma cero.* Ejemplos de esto son las apuestas amistosas con los amigos. La suma algebraica de los pagos es cero. Un juego en el cual existe una diferencia entre las ganancias y las pérdidas se llama *juego de suma distinta de cero.* Si la competencia entre dos negocios extiende su mercado total, ambos reciben pagos positivos y se obtiene una *suma total distinta de cero.* Los juegos de suma no cero también presentan obstáculos formidables para e1 análisis.

En teoría de juegos, el término *estrategia* significa curso de acción. Por ejemplo, una persona acusada de un crimen tiene sólo dos estrategias (defensas): culpable o inocente. En los negocios, sin embargo, puede disponerse de una gran variedad de estrategias competitivas, que incluyen reducción de precios, publicidad, introducción de un nuevo producto y la prestación de un mejor servicio. Los juegos con sólo dos estrategias son los más fáciles de analizar, pero se estudian también juegos, con más de dos estrategias.

En este capítulo se hace hincapié en los juegos de dos personas y suma cero, ya que la teoría correspondiente está bien desarrollada. Aunque esta es un tipo muy sencillo de juego, se han encontrado algunas aplicaciones en política internacional, en relaciones obrero-patronales en el análisis de políticas dobles, en comercialización y en la planeación empresarial. Lo que es más importante, la teoría de juegos ayuda a comprender las reglas de decisión que deben emplearse en situaciones conflictivas.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

En este capítulo el lector deberá aprender cómo:

1 Estructurar la matriz de pagos para un juego
2 Encontrar el punto de montura o demostrar que no hay ninguno
3 Encontrar el valor de un juego 2 x *M*
4 Desarrollar estrategias mixtas para juegos de 2 x 2
5 Reconocer estrategias dominantes
6 Explicar las limitaciones de la teoría de juegos
7 Definir los siguientes términos:

Juego	Valor del juego
Juegos de suma cero o suma no cero	Estrategia pura
Punto de silla de montar	Estrategia mixta
Dominancia	Criterio maximin

LA MATRIZ DE PAGOS PARA UN JUEGO

La herramienta básica para analizar los juegos es la matriz de pagos. Ésta es la misma matriz que se usó en el capítulo 4 para los problemas de decisión bajo riesgo. No obstante, en los juegos, la probabilidad de ocurrencia de los eventos está controlada por el oponente. El tamaño de la matriz está determinado por el número de jugadores y el número de estrategias disponibles. Un juego de 2 X 4, por ejemplo, tendría dos jugadores y cuatro estrategias. Tal como sucede, los juegos con más de dos estrategias se llaman juegos de 2 x M, ya que no hay diferencia analítica en relación con el número de estrategias.

La matriz de pagos para un juego de 2 x 2 se ilustra en la figura 5-1. Esta podría describir la situación a la que se enfrentan dos gasolineras colocadas en contraesquina en la misma intersección. Los compradores están bastante pendientes del precio y cada gasolinera debe decidir si cobrar un precio alto o bajo por su gasolina.

La matriz de la izquierda muestra los pagos con respecto a la gasolinera 1. Si ambas gasolineras ponen precios altos (o ambas bajos), cada una obtendrá un porcentaje igual del negocio. Pero si la gasolinera 1 pone precios altos cuando la 2 pone un precio bajo, entonces la gasolinera 2 atraerá algunos clientes de la 1, con lo cual le causa cierta pérdida. De igual manera, la gasolinera 1 ganará una parte adicional del negocio si tiene precios más bajos que la 2.

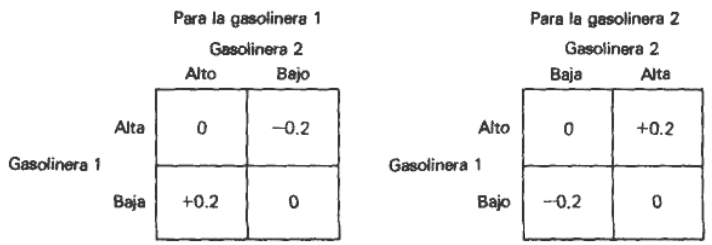


FIGURA 5-1
La matriz de pagos.

En el lado derecho de la figura 5-1 se muestra la misma situación desde el punto de vista de la gasolinera 2. Como puede observarse, la única diferencia es el signo de los pagos. Esto se cumplirá siempre, de manera que sólo se necesita una matriz para describir un juego. Por convención, los pagos se muestran para el jugador en la izquierda de la matriz, en el ejemplo, la gasolinera 1.

Podría el lector preguntarse si el ejemplo es real. Si cada gasolinera puede ver el precio que pone la otra, cada una podría cambiar el precio para perjudicar a la competencia. Esto llega a suceder, en especial durante las "guerras de precios". En otros tiempos, los precios se basan más en el costo y casi siempre se mantienen durante todo el día. Sin embargo, 1a teoría de juegos requiere que los dos jugadores muevan al mismo tiempo. Es como el viejo juego de "dos dedos escondidos" en el que cada jugador muestra uno o dos dedos, haciéndolo todos en forma simultánea.

La matriz crece si hay más de dos estrategias. Aún más, los jugadores pueden tener diferente número de estrategias. Así, si el primer jugador tuviera cuatro estrategias y el segundo sólo tres, la matriz tendría cuatro renglones y tres columnas.

¿Qué pasa cuando hay más de dos jugadores? Se necesita una dimensión para cada jugador. Tres jugadores requerirían una matriz de tres dimensiones: cuatro jugadores, cuatro dimensiones. Aunque esto es imposible gráficamente, sí puede describirse en forma algebraica.

Es necesario analizar otro aspecto de la matriz de pagos: los números que se usan para los pagos en sí. No se ha hablado de lo que +0.2 significa en realidad. La teoría de juegos requiere que los pagos expresen la *utilidad* o preferencia del evento para *ambos* jugadores. El 0.2 puede representar 2 000 galones de gasolina, o $2 000 de ingresos, 0.2 unidades en una escala de utilidad. La escala real que se use carece de importancia, ya que multiplicar por una constante no tienen ningún efecto. Para los propósitos que aquí se persiguen, se dirá que son unidades. Es importante notar que ambos jugadores deben tener las *mismas* funciones de utilidad.

¿Cómo se gana un juego? Pueden emplearse dos métodos para ganar: una estrategia *pura* y una estrategia *mixta.* El juego en sí indicará cuál debe usarse.

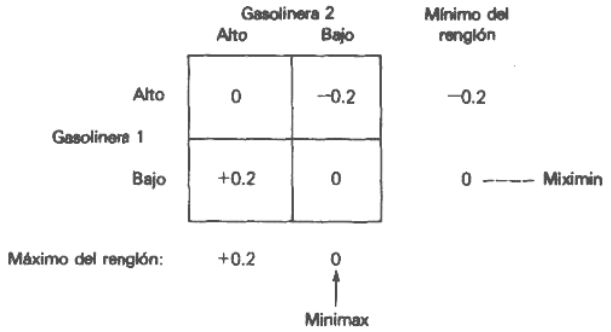
JUEGOS DE ESTRATEGIA PURA

Un *juego de estrategia pura* es aquél en el que cada jugador tiene una y sólo una estrategia óptima. En breve se mostrará cómo identificar un juego de estrategia pura, pero primero se verá cómo cada jugador puede encontrar una estrategia óptima.

El criterio maximin

Uno de los resultados más importantes de la teoría de juegos para los juegos de dos personas suma cero es que la estrategia óptima se encuentra aplicando el criterio de decisión *maximin.* Esto es cierto para ambos jugadores. Recuérdese que éste es un criterio pesimista (capítulo 2). Se exami-

FIGURA 5-2
Un juego de estrategia pura



nan los *peores* resultados (o mínimos) y se selecciona el *mejor* (o máximo) de éstos. Así, se está maximizando el pago mínimo.

Esto se muestra en la figura 5-2 para el ejemplo de las gasolineras. La gasolinera 1 selecciona el pago mínimo en cada renglón y lo registra a la derecha de la matriz. Estos mínimos por renglón se comparan y se selecciona el máximo. Entonces, usando el criterio maximin, la gasolinera 1 debe poner precios bajos.

Para el oponente, la gasolinera 2, esta lógica debe alterarse, ya que los pagos se muestran para la gasolinera 1. Como la imagen de un espejo, la lógica se convierte en *minimax.* Esto es, se identifican los *máximos* por columna y se selecciona el *mínimo* de entre ellos. En suma, debe aplicarse maximin para el jugador número 1 y minimax para el oponente.

Punto de silla de montar

La diferencia entre los juegos de estrategia *pura* y *mixta* es que los de estrategia pura poseen un *punto de silla de montar,* mientras que los de estrategia mixta, no. La presencia de un punto de silla de montar se identifica comparando los *valores* de la estrategia maximin para cada jugador. En la figura 5-2, el valor maximin de la gasolinera 1 es cero, que es igual que el valor minimax de la 2. Esta igualdad hace cero el punto de montura e identifica el juego como uno de estrategia pura.

La estrategia óptima para ambas gasolineras es poner siempre precios bajos. Ningún otro criterio de decisión como maximax o el principio de la razón insuficiente dará mejores resultados para ninguno de los dos jugadores. Supóngase, por ejemplo, que la gasolinera 1 decide poner un precio alto. Siendo razonable, la gasolinera 2 pondrá un precio bajo para ganar más clientes. De igual manera, cuando la gasolinera 1 pone un precio bajo, la gasolinera 2 actuaría tontamente al poner un precio alto y perder clientes. La teoría de juegos supone que ambos jugadores son racionales; así, la gasolinera 2 también debe poner precios bajos. Nótese que en la matriz de pagos no hay una ganancia adicional cuando ambas gasolineras ponen precios altos, de forma que no hay incentivo para confabularse.

Un juego puede tener más de un punto de silla de montar. Por ejemplo, si el pago de -0.2 en la figura 5-2 se cambia a 0, habría dos puntos de montura. Entonces, la gasolinera 1 podría seleccionar cualquiera de los dos.

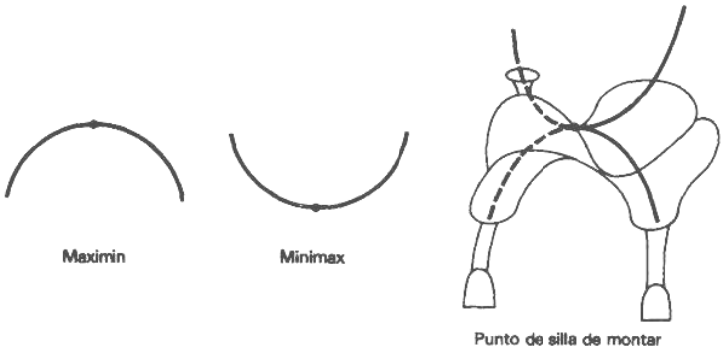


FIGURA 5-3
Concepto de punto de silla de montar

Podría el lector preguntarse cómo se originó el término "punto de silla de montar". Es evidente que uno de los primeros en desarrollar la teoría de juegos practicaba la equitación. En la figura 5-3 se ilustra su significado. Los resultados para las estrategias del jugador 1 forman una curva con el valor maximin en el punto más alto. Las alternativas del oponente también forman una curva con el minimax en el punto más bajo. Cuando estos dos valores son iguales, las dos curvas se intersectan en un punto, haciendo que se parezcan a las dos curvaturas de una silla de montar. De ahí el punto de silla de montar.

Valor del Juego

El pago promedio recibido en cada entrada del juego se llama *valor* del juego para cada jugador. Por supuesto, para juegos de suma cero, la suma algebraica de todos los pagos siempre es cero. Pero un jugador puede tener un promedio de pagos positivo y el otro un promedio de pagos negativo. El valor del juego para el jugador 1 es el valor maximin. Para el oponente, el valor es el negativo del valor minimax. En el ejemplo de las gasolineras (Fig. 5-2), ambas tienen el mismo valor del juego: cero.

Resumen de juegos de estrategia pura

El análisis de juegos de estrategia pura puede resumirse como sigue:

1 Desarrollo de la matriz de pagos
2 Identificación de los mínimos por renglón y selección del mayor como la estrategia maximin del jugador 1.
3 Identificación de los máximos por columna y selección del menor como la estrategia maximin del oponente.
4 Si el valor maximin es igual que el valor minimax, el juego es de estrategia pura y ese valor es el punto de silla de montar.
5 El valor del juego para el jugador 1 es el valor maximin y para el jugador 2, el valor es el negativo del valor minimax.
6 Ambos jugadores siguen una sola estrategia en cada entrada del juego, ya que ninguna otra estrategia puede ser mejor.

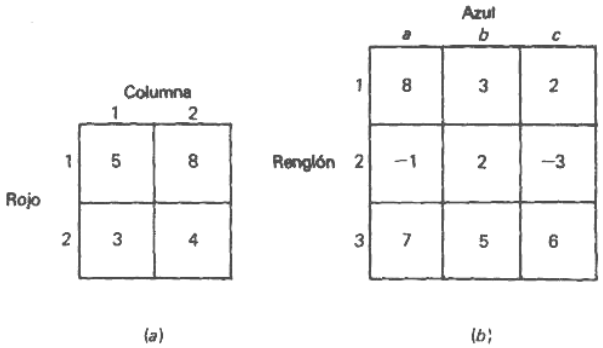


FIGURA 5-4
Ejercicio de práctica (5-1).

Es tiempo de que el lector trate de analizar algunos juegos. Uno de los ejercicios de práctica que se presentan tiene más de dos estrategias. Simplemente aplíquese la misma lógica de la misma manera que para los juegos de 2 x 2.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 5-1

1 Para el juego que se muestra en la figura 5-4*a*:
   a Encuéntrese la estrategia maximin para el primer jugador.
   b Encuéntrese la estrategia minimax para el oponente.
   c ¿Es éste un juego de estrategia pura? Si es así. ¿cuál es el punto de silla de montar.
   d ¿Cuál es el valor del juego para el jugador 1? ¿Para el jugador 2?
2 Repítase (1) para el juego de la figura *5-4b.*

JUEGOS DE ESTRATEGIA MIXTA

Si un juego no tiene punto de silla de montar, se llama juego de estrategia *mixta.* En breve, la razón de esto será evidente. Considérese el ejemplo de la figura 5-5. La estrategia maximin para el jugador uno es *B.* La estrategia minimax para el oponente es *X.* Pero los valores de estas estrategias son

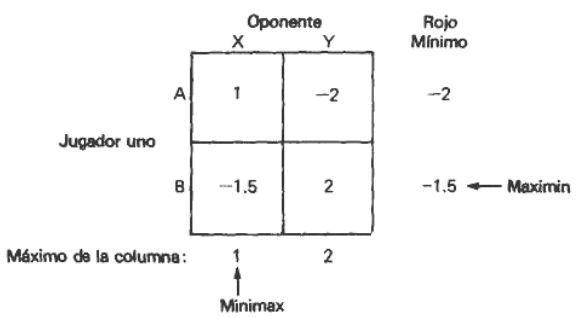


FIGURA 5-5
Un juego sin punto de silla de montar

diferentes, lo que significa que no existe un punto de silla de montar; éste no es un juego de estrategia pura.

Obsérvese lo que pasaría si cada jugador tratara de jugar como si éste fuera un juego de estrategia pura y usara sólo una estrategia. El jugador 1 perdería 1.5 en la primera jugada. Según la matriz de pagos, el jugador 1 estaría en mejor posición cambiando a la estrategia A para ganar +1. Pero cuando hace esto, el oponente cambia a la estrategia Y. En seguida, el jugador 1 regresa a la estrategia *B.* Y de esta manera siguen en círculos. El asunto es que ninguno de los jugadores tiene una sola estrategia óptima.

¿Qué deben hacer? *Mezclar* sus estrategias. Usar una estrategia parte del tiempo y la otra, el resto. Con la teoría de juegos, incluso cada jugador puede calcular que proporción del tiempo debe usar cada estrategia.

Hallazgo de momios (oportunidades)

La idea básica de las estrategias mixtas es igualar los valores esperados para cada estrategia. Considérese el mismo ejemplo de la figura 5-5. Supóngase que el jugador 1 selecciona la estrategia A p % del tiempo, y la estrategia B (1 — p) % del tiempo. Si el oponente juega la estrategia X, el pago esperado para el jugador 1 es:

$$1p + (-1.5)(1 - p) = -1.5 + 2.5p$$

Si el oponente selecciona la estrategia Y, el pago esperado es

$$(-2)p + 2(1-p) = 2-4p$$

Igualando los dos pagos esperados,

$$\begin{aligned} -1.5 + 2.5p &= 2 - 4p \\ 6.5p &= 3.5 \\ P &= \frac{3.5}{6.5} = 0.54 \end{aligned}$$

Así, el jugador 1 debe jugar con la estrategia A el 54 % del tiempo, y con 1 a estrategia Bel 46%.

Se mostrará otra forma de encontrar estas proporciones y se explicará por qué éste es un enfoque óptimo. Los momios o la oportunidad de ganar con una estrategia dada está determinada por las diferencias entre los pagos. Para la estrategia A, la diferencia es 3; para la estrategia B, la diferencia es 3.5. Estas diferencias influyen en el juego del oponente. Por ejemplo, una diferencia pequeña hará que el oponente sea más o menos indiferente en la selección de su estrategia. Sin embargo, una diferencia grande representa un fuerte castigo por un error. Si es razonable, el oponente tomará esto en cuenta al seleccionar sus estrategias.

La mejor estrategia para el oponente sería proporcionar la mayor diferencia un porcentaje pequeño del tiempo y la diferencia menor una mayor parte del tiempo. En el ejemplo, se esperaría que el oponente jugara X

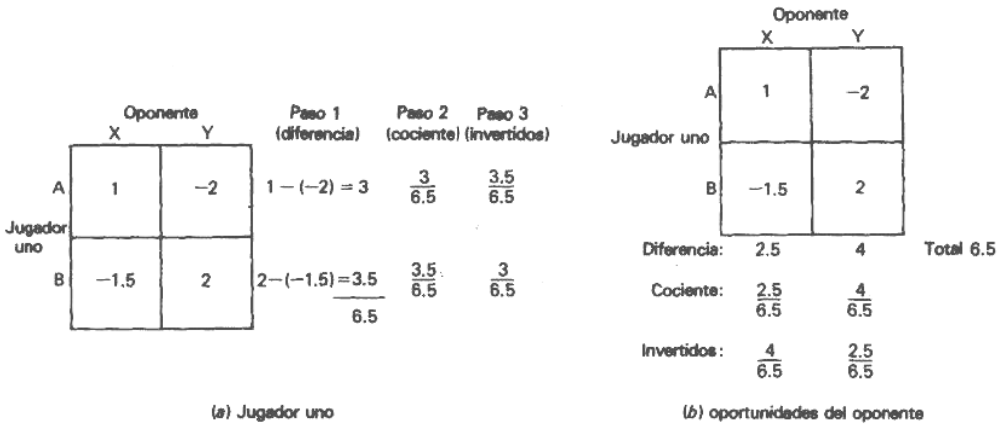


FIGURA 54
Hallazgo de los momios (oportunidades)

más que Y. El jugador uno debería jugar A más que *B.* La mecánica para encontrar las proporciones exactas se muestra en la figura *5-6a.* Tómese la diferencia entre los pagos en cada renglón. Súmense éstas para encontrar el denominador. Fórmense cocientes. Inviértanse los cocientes. Como se encontró antes, el jugador uno debe jugar la estrategia A(3.5/6.5) = 54% del tiempo y la *B*(3/6.5) = 46% del tiempo.

Según se ilustra en la figura *5-6b,* puede emplearse el mismo procedimiento para descubrir los momios del oponente. Se encuentran las diferencias de columnas; se forman los cocientes y luego se invierten. De acuerdo con nuestra especulación, el oponente deberá jugar *X* la mayor parte del tiempo (4/6.5) = 62%. La estrategia Y se jugará (2.5/6.5) = 38% del tiempo.

Realización de una estrategia mixta

Una parte importante al jugar juegos de estrategia mixta es la discreción. No debe permitirse al oponente saber cuál estrategia se planea usar la siguiente vez. La mejor forma de garantizar el secreto es seleccionar la estrategia de *una manera aleatoria.* El jugador uno puede hacer esto, por ejemplo, poniendo 100 números aleatorios en una urna y seleccionando 1 al azar. Los números del 1 al 54 significarían "jugar A" y del 55 al 100 "jugar *B″.* A primera vista esto puede parecer extraño. Pero ¿cómo puede el oponente saber qué estrategia seguirá si ni siquiera el propio jugador uno lo sabe? La mayoría de los códigos secretos que se usan en las comunicaciones militares operan en escencia de esta manera.

Valor del juego

Para encontrar el valor del juego, sencillamente se supone que el otro jugador emplea sólo una estrategia (cualquiera de las dos) y se usan las proporciones óptimas para encontrar el valor esperado. El jugador uno del ejemplo tiene un valor del juego de:

$$1\left(\frac{3.5}{6.5}\right) + (-1.5)\left(\frac{3}{6.5}\right) = (-2)\left(\frac{3.5}{6.5}\right) + 2\left(\frac{3}{6.5}\right) = -0.15$$

De igual manera para el oponente (nótese el cambio en todos los signos para los pagos):

$$\begin{aligned}\text{Valor del juego} &= (-1)\left(\frac{4}{6.5}\right) + 2\left(\frac{2.5}{6.5}\right)\\ &= 1.5\left(\frac{4}{6.5}\right) + (-2)\left(\frac{2.5}{6.5}\right)\\ &= +0.15\end{aligned}$$

Como este es un juego de suma cero, la suma algebraica de los juegos debe ser cero; y lo es. El jugador uno perderá, en promedio, 0.15 para cada jugada y el oponente ganará 0.15.

¿Hay algo que el jugador uno pueda hacer para mejorar esta situación? Supóngase que selecciona la estrategia *B* un porcentaje mayor de tiempo que el 46%. El oponente, si es razonable se quedará con su estrategia óptima de jugar *X* la mayor parte del tiempo. El aumento en el uso de la estrategia *B* por aparte del jugador uno sólo aumentará el que el oponente gane haciendo más frecuente el pago de –1.5. ¿Qué tal si se juega la estrategia A más seguido? Con el oponente jugando X la mayor parte del tiempo, ¿no aumentará esto el pago para el jugador uno? No. Supóngase que el juzgador uno escoge A el 80% del tiempo en lugar del óptimo de 54. El pagó promedio para el jugador uno será:

$$\begin{aligned}&.8(.62)(1) + .8(.38)(-2) + .2(.62)(-1.5) + .2(.38)(2)\\ &= .5 + (-.61) + (-.19) + .15\\ &= -0.15\end{aligned}$$

El jugador uno no está en mejor posición. La estrategia mixta óptima no puede mejorarse.

Una sola jugada contra Jugadas repetitivas

Se ha supuesto que el juego se repite muchas veces. ¿Cómo se selecciona una estrategia mixta si se juega sólo una vez? Esto debe hacerse también en forma aleatoria. No hay razón para suponer que el oponente escogerá una estrategia sobre la otra. Así, la mayor posibilidad de ganar se obtiene usando el mismo enfoque que se usaría con jugadas repetitivas.

Juegos con más de dos estrategias

El método para analizar juegos de estrategia mixta no funciona si uno o ambos jugadores tienen más de dos estrategias posibles. Pueden resolver se juegos de ese tipo subdividiéndolos en juegos separados de 2 X 2, pero esto resulta enfadoso y difícil de manejar. El mejor método de solución es la programación lineal. El lector debe consultar la bibliografía para este enfoque.

Resumen de Juegos de estrategia mixta

El procedimiento para analizar juegos de estrategia mixta de 2 x 2 se resumen en seguida:

1 Se establece la matriz de pagos.
2 Se aplica el criterio maximin para comprobar si el juego tiene un punto de silla de montar. Si no lo tiene, entonces se necesita una estrategia mixta.
3 Se calculan las posibilidades del jugador uno encontrando la diferencia en cada renglón, formando las razones o cocientes con la suma de las diferencias como denominador e invirtiendo los cocientes. Las posibilidades del oponente se encuentran de la misma forma con las columnas.
4 El método óptimo de juego es seleccionar aleatoriamente las estrategias con las posibilidades que se calcularon antes.
5 El valor del juego es el valor esperado de los pagos, suponiendo que el oponente siempre selecciona una estrategia.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 5-2

Para el juego que se muestra en la figura 5-7:

a ¿Tiene este juego un punto de silla de montar?
b Encuéntrese la estrategia mixta óptima para cada jugador.
c ¿Cuál es el valor del juego para cada jugador?

		Columna x	Columna y
Renglón	a	−3	4
	b	2	−1

FIGURA 5-7
Ejercicio de práctica (5-2).

CASOS ESPECIALES

Se consideran en esta sección dos casos especiales: estrategias dominantes y juegos con pagos cualitativos en lugar de cuantitativos.

Estrategias dominantes

No es poco común que algunas estrategias dominen a otras en la matriz de pagos. Se dice que una estrategia domina a otra, si todos sus resultados posibles son preferentes. Considérese el ejemplo en la figura *5-8a* y compárense los dos primeros renglones. El renglón *a* siempre da un pago mayor que el renglón *b,* sin importar qué hace el oponente. De igual manera, el primer renglón es mejor en todos los casos que el último, *d.* El primer jugador nunca escogerá el renglón *b* o *d,* ya que *a* es siempre preferente.

La dominancia existe también para un oponente. Compárense las columnas 2 y 3 en la figura *5-8a.* Para el oponente, la estrategia preferida tendrá un pago *menor* en cada caso. Usando esta prueba, la estrategia 3 domina a la estrategia 2.

Como nunca se seleccionan las estrategias dominadas, pueden eliminarse del análisis y la matriz de pagos reducirse como en la figura 5-8*b*. Este proceso de reducción puede simplificar mucho el análisis del juego.

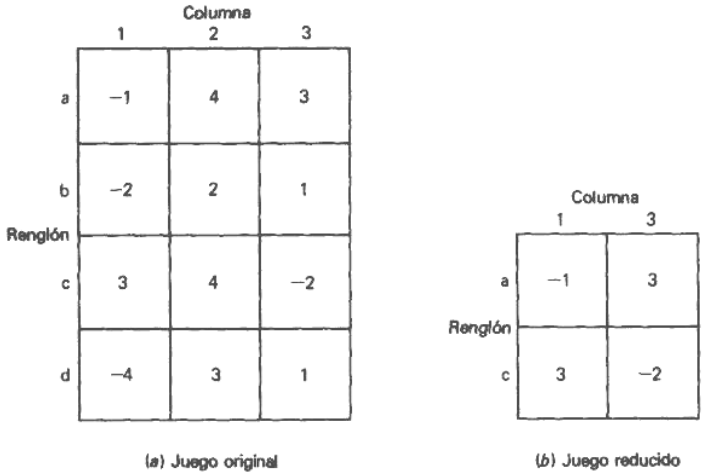


FIGURA 5-8
Algunas estrategias dominan.

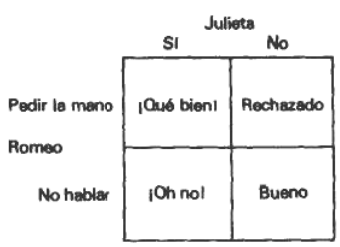
Juegos con pagos cualitativos

Existen muchas situaciones en que los resultados son cualitativos y no son fáciles de medir. Como ejemplo, considérese el pensamiento de Romeo antes de pedir la mano de Julieta. El pudo haber visto la situación como se muestra en la figura 5-9. Tal como se describe, esta situación es análoga a una de toma de decisiones bajo incertidumbre. Las herramientas de teoría de juegos no son útiles sin números.

Un método es tratar de estimar, subjetivamente, el valor de cada resultado siguiendo alguna escala de utilidad arbitraria. Es natural que los números escogidos deban reflejar la estructura de valor de la persona. Por ejemplo, un Romeo audaz y jugador podría asignar los números que se muestran en la figura 5-10*a*. Como éstas son sólo *sus* utilidades y no las de Julieta, él no puede hacer un análisis completo del juego, pero puede aplicar al criterio maximin para sus propias alternativas. Un Romeo muy conservador, sensible a un rechazo, podría estimar las utilidades de la figura 5-10*b*, lo cual conduce a una selección diferente.

Una crítica a este proceso es que la selección, en apariencia arbitrar a, de los números determina el resultado. Si así fuera, ¿por qué no sólo se selecciona "arbitrariamente" el resultado y se evitan todos los pasos intermedios? La idea es que el error agregado en una serie de estimaciones pequeñas será menor que el error en una estimación grande. Esto debe

FIGURA 5-9
Pagos cualitativos.



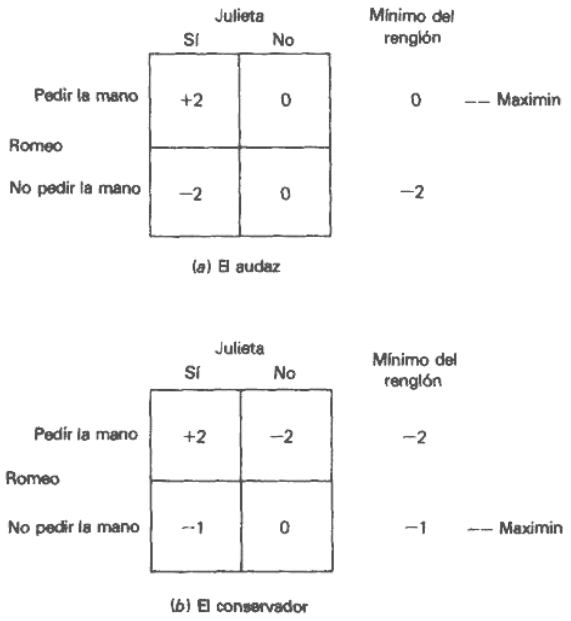


FIGURA 5-10
Asignación de utilidades.

preparar mejor a la persona que si no hace ningún análisis. No obstante, no existe prueba de esto, sólo la esperanza.

JUEGOS CON MÁS DE DOS PERSONAS

Los negocios, el póquer y muchos otros juegos incluyen tres o más jugadores. Desafortunadamente, se ha desarrollado muy poca teoría para juegos con más de dos jugadores. La razón principal es que las coaliciones se vuelven muy beneficiosas para algunos jugadores. Cuando se forman coaliciones, resulta inútil realizar cualquier análisis de estrategias óptimas. En los negocios, estas coaliciones se llaman consorcios o monopolios y tienen el objetivo general de fijar precios. Igual que en el póquer, el hecho de que estos consorcios puedan violar algunas "reglas" no evita su formación.

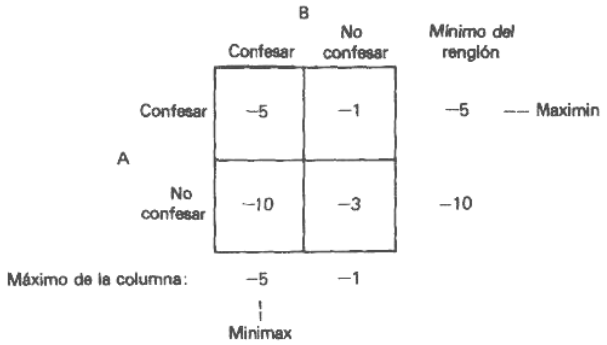
Con las comunicaciones modernas, los consorcios comerciales pueden formarse con sólo abstenerse de competir en los precios. Esto pasa con frecuencia en las industrias de capital total en donde es poco probable la entrada de nuevas firmas.

Si la formación de consorcios reduce el número efectivo de jugadores a dos, entonces puede aplicarse la teoría de juegos para dos personas

JUEGOS DE SUMA DISTINTA DE CERO

Un juego de suma distinta de cero es aquel que tiene una diferencia algebraica entre los pagos del ganador y del perdedor. El ejemplo clásico de este tipo de juegos es el *dilema del prisionero,* que se muestra en la figura 5-11. Se supone que dos personas, A y B, están acusadas de cometer un cri-

FIGURA 5-11
El dilema del prisionero.



men, que de hecho cometieron. El fiscal ha informado a cada uno por separado que pedirá una reducción en la sentencia para el *primero* que confiese. Si confiesa uno, se le dará un año de sentencia y al otro 10 años. Si ambos confiesan cada uno tendrá que pagar 5 años. Si ambos se declaran inocentes, lo más probable es que sean condenados y reciban una sentencia de 3 años.

Si se aplica el criterio maximin a cada una de las estrategias del jugador, se concluye que el juego tiene un punto de silla de montar y que ambos jugadores deben confesar.

Pero éste no es un análisis válido, ya que el prisionero B no gana lo que el prisionero A pierde. Si los dos confiesan, ambos jugadores tendrán un pago de –5. Observando la matriz, es claro que pueden obtener mejores resultados si ambos rehúsan confesar.

Sin embargo, el dilema lo crea el pago de un año si sólo uno de los dos confiesa. Ambos jugadores tienen un incentivo para traicionar al otro. Uno puede persuadir al otro de hacer un pacto de que ninguno de los dos confesará y después romper el pacto. Pero si ambos rompen el pacto, estarán en una situación peor que si ambos hubieran cumplido su palabra.

Un jugador puede amenazar al otro para influir en el resultado. Por ejemplo, A puede amenazar con mandar matar a B si este confiesa. Es obvio que si un jugador puede salirse con la suya por medio de amenazas, 1os resultados siempre favorecerán a ese jugador.

También existe la posibilidad de pagos por soborno. El prisionero A, por ejemplo, puede sugerir que si él confiesa y B no lo hace, una vez fue a de la prisión en un corto plazo como resultado de este trato, ayudará al prisionero B a escapar, o puede ofrecer una suma de dinero a B.

Estas posibilidades de trampa, confabulación, trato o soborno han estado que se desarrolle una teoría general para juegos de suma no cero. En efecto, cada juego de este tipo es un caso especial que incluye las personalidades de los jugadores y los pagos específicos de la situación.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 5-3

Supóngase que las dos gasolineras que compiten, a las que se hizo referencia antes, tienen la matriz de pagos que se muestra en la figura 5-12.

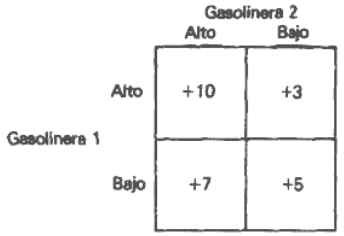


FIGURA 5-12
Ejercicio de práctica (5-3).

a Aplíquese el criterio maximin como si fuera un juego de suma cero. ¿Cuál es la estrategia óptima de precios para cada gasolinera de acuerdo con este análisis?

b Si éste es un juego de suma distinta de cero y los pagos de la gasolinera 2 son los mismos que los que se muestran para la gasolinera 1, excepto que se intercambian + 3 y +7, existe un incentivo para fijar los precios?

EXPERIENCIAS DEL MUNDO REAL

Para el administrador actual, la teoría de juegos proporciona algunas ideas útiles para la toma de decisiones en conflicto, pero muy pocas aplicaciones reales. Para entender por qué ha habido pocas aplicaciones en la administración, se examinará la teoría en sí y después el marco de referencia de los negocios.

La teoría de juegos de dos personas suma cero está bastante completa. Los juegos de estrategia pura pueden resolverse aplicando el criterio maxi-min para determinar las estrategias óptimas para los dos jugadores. Esto es fácil independientemente del número de estrategias disponibles para cada jugador. Los juegos de estrategia mixta también pueden resolverse con el método analítico que se ha descrito o con programación lineal, si hay más de dos estrategias. Así, pueden encontrarse estrategias óptimas para cualquier juego de dos personas suma cero.

Cuando el número de jugadores es mayor que dos o cuando los pagos son de suma distinta de cero, la teoría se debilita. Debido a la posibilidad de coaliciones, de soborno o de amenazas, los juegos son únicos y se frustran los esfuerzos por realizar teorías generales. No se trata de asegurar que no es posible la teoría, sino que todavía no se ha desarrollado una.

Ahora considérese el marco de referencia típico al que se enfrenta una empresa para la toma de decisiones. Muy pocas veces existe un solo competidor; casi siempre existen muchos, ya sea en forma directa o vía productos sustitutos. Por otro lado, los administradores deben representar a varios comités o grupos, no sólo a sí mismos. Accionistas, empleados, clientes, proveedores, la comunidad, el gobierno y el público en general, presionan sobre las decisiones de los administradores.

Por último, la mayoría de los juegos son de suma distinta de cero. Dos competidores hacen una fuerte publicidad y bajan los precios. Es típico que esto atraiga nuevos clientes y aumente las ventas de cada uno. O considérense los tratos entre la administración y el sindicato. Además de los salarios y las prestaciones, éstos con frecuencia incluyen contratación,

productividad, disciplina, procedimientos de indemnización, seguridad y escalafón. Cuando por las medidas de seguridad se reducen los accidentes, por ejemplo, ambas partes ganan. Aun los aumentos de salario los financia en general el cliente más que el accionista. Aunque se han realizado algunas aplicaciones, como por ejemplo a la postura competitiva y a estrategias de publicidad, el número de estas aplicaciones es pequeño.

¿Por qué se incluye el tema en este texto si se han encontrado tan pocas aplicaciones? Como se analizó en el capítulo 1, con frecuencia los métodos cuantitativos sirven de guía al pensamiento, aun cuando no se generen números específicos. La noción de que el criterio maximin conduce a estrategias óptimas es una idea útil en situaciones competitivas. También la idea de que las estrategias mixtas se deben seleccionar al azar no es del todo obvia. Por último, el método para clasificar los juegos por lo menos proporciona un punto de partida para un análisis más profundo. Se piensa que estas ideas servirán bien al lector en el futuro.

RESUMEN

La teoría de juegos se enfoca a la toma de decisiones bajo conflicto. Los juegos se clasifican de acuerdo con el número de jugadores (dos personas y *N* personas), a la suma algebraica de todos los pagos (suma cero y surtía distinta de cero) y al número de estrategias disponibles para los jugadores (2o*M*).

Los juegos de dos personas de suma cero tienen un punto de silla de montar si la estrategia tiene el mismo valor para ambos jugadores, Éstos son juegos de estrategia pura, ya que cada jugador siempre debe concretar su juego a una sola estrategia. Los juegos sin puntos de silla de montar requieren estrategias mixtas, 'seleccionadas al azar de acuerdo con proporciones óptimas. Se ha descrito el análisis de juegos de estrategia pura de 2 x M y de juegos de estrategia mixta de 2 x 2.

Los juegos con más de dos jugadores y los juegos de suma distinta de coro no tienen un método general de solución. Debido a las posibilidades de coalición entre los jugadores, de sobornos y de amenazas, cada juego de este tipo es único. Esto se ilustra por el juego clásico del dilema del prisionero.

Aunque las aplicaciones de la teoría de juegos a la administración han sido limitadas, los conceptos del criterio maximin, las estrategias mixtas, el valor del juego y las clases de juegos, dan una buena idea sobre situaciones competitivas a las que se enfrenta el administrador.

EJERCICIOS

Encuéntrense los puntos de silla de montar y los valores del juego para los siguientes juegos:

5-1

Amigo \ Contrario	Ataque	Retirada
Ataque	1	0
Retirada	−1	0

5-2

Rojo \ Azul	w	x	y	z
a	9	12	18	8
b	15	−4	1	9
c	11	12	13	10

5-3 Encuéntrense las estrategias óptimas para ambos jugadores y el valor del siguiente juego:

El lector \ Oponente	c	d
a	18	4
b	8	14

5-4 Considérese el siguiente juego:

Joe \ Tom	Arriba	Abajo
Arriba	4	−3
Abajo	−2	6

a Encuéntrese la estrategia óptima para cada jugador y el valor del juego.

b Reescríbase la matriz para Tom y repítase (a). ¿Cuál es la comparación entre estos resultados?

En los siguientes juegos, verifíquese la dominancia primero y después obténganse las estrategias óptimas y el valor de los juegos:

5-5

Rojo \ Azul	a	b	c
a	16	17	9
b	12	13	18
c	9	10	15

5-6

Renglón \ Columna	a	b	c	d	e
1	6	15	8	22	25
2	9	12	14	28	16
3	2	9	14	8	4
4	7	11	9	18	3

Encuéntrense las estrategias óptimas y los valores para los siguientes juegos:

Un juego justo de "dos dedos escondidos" puede tener la siguiente matriz de pagos:

Jugador A \ Jugador B	1	2
1	1	−1
2	−1	1

5-8

X \ Y	a	b
1	5	−2
2	5	5
3	4	−3

5-9 Considérense los tres juegos que se describen en seguida:

A \ B	1	2
1	6	−2
2	4	8

A \ B	1	2
1	12	−4
2	8	16

A \ B	1	2
1	2	−6
2	0	4

a Cómo se relacionan estos juegos?

b Encuéntrese la estrategia óptima para cada juego.

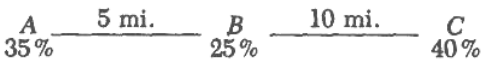
c ¿Cuál es el valor de cada juego?

5-10 Dos firmas dominan un mercado en particular y, de hecho, forman un duopolio. A través de los años han aprendido a restringir la competencia en los precios y a competir sólo a través de la publicidad. Cada firma está planeando introducir su nueva línea de otoño y está considerando las posibles promociones especiales. Después de considerar muchas opciones, las posibilidades se han reducido a dos: (1) una fuerte campaña publicitaria en televisión durante las horas de primacía o (2) un gran número de exhibidores de mercancía en puntos clave. El efecto sobre los porcentajes de mercado se muestra en seguida:

Firma A \ Firma B	TV	Exhibidores
TV	+1	0
POP	−1	−2

¿Qué debe hacer cada firma?

5-11 Fried Burgers (FB) y Broiled Burgers (BB) son cadenas de hamburguesas competitivas. Cada una se está expandiendo hacia pueblos más pequeños conforme se saturan las grandes áreas urbanas. Un grupo de tres pueblos está bajo consideración como se muestra en seguida.



Los porcentajes muestran la población de cada pueblo relativa al total de la población para los tres pueblos. Como FB es la cadena más grande, se concluye que puede capturar el 60 % del mercado cuando ambos restaurantes están equidistantes. No obstante, si BB está más cerca, FB obtendrá sólo el 30%. Si FB está más cerca, capturará el 80% del mercado.

Cada firma planea construir sólo un restaurante en el área. ¿Qué pueblo debe seleccionar cada una y cuáles serán los porcentajes del mercado?

5-12 Un comando militar tiene dos instalaciones que defender: un almacén de combustible y un almacén de municiones. Tiene fuerzas suficiente para repeler un ataque en sólo una de las instalaciones. Por

fortuna, el enemigo también está debilitado y podrá organizar e ataque sólo a un blanco y no a los dos. Como el combustible está es caso, se considera el doble de valioso que las municiones. Si el enemigo ataca una posición defendida, el resultado será un empate. ¿Cuáles deberán ser las estrategias del comando y del enemigo? (Sugerencia: Asígnese 1 utilidad al almacén de municiones y 2 utilidades al de combustible).

15-3 Un día, George iba del trabaje hacia su casa cuando recordó que era su aniversario. ¿O era al día siguiente? Como no estaba seguro, comenzó a explorar las posibilidades:

a Si compra flores para su esposa y hoy es su aniversario, todo estará muy bien.

b Si compra flores y mañana es su aniversario, parecerá un poco tonto, pero todavía está bien.

c Si no compra flores y mañana es el día, todo queda neutral.

d Si no compra flores y hoy es su aniversario, |se irá a dormir al sofá!

¿Qué debe hacer George? *(Sugerencia:* Considérese éste como un juego contra la naturaleza).

5-14 El gobierno local ha pedido a dos firmas, competidoras que establezcan su política sobre el control de la contaminación. Ambas deben decidir por adelantado, ya que las políticas se presentarán el mismo día. El presidente de la compañía A revisa las opciones

a Si su firma acepta voluntariamente hacer su proceso más limpio, incurrirá en grandes costos. Los costos agregados la pondrán en desventaja competitiva con la firma B, a menos que la firma B decida también tomar medidas voluntarias. Piensa que aceptar la opción sola tiene una utilidad de –2, y si las dos firmas la aceptan se tendrá una utilidad de +1 (relativo a la publicidad favorable).

b Si su firma se espera a los controles obligatorios, habrá una publicidad negativa. En este caso no se incurrirá en costos extra. La utilidad para esta estrategia será + 2 si la firma B acepta voluntariamente y –1 si ambas esperan los controles gubernamentales. ¿Qué harán las dos firmas? ¿Puede relacionarse este problema con los papeles que desempeñan el gobierno y la libre empresa?

5-15 Se estaba haciendo tarde y el jurado estaba cansado. Habían debatido por muchas horas sin llegar a un veredicto. La mayor parte de la evidencia indicaba culpabilidad, pero el caso no estaba aclarado. El presidente del jurado comenzó a jugar con su lápiz pensando en cómo podría contribuir la teoría de juegos a las deliberaciones. Asignando utilidades a los resultados posibles, dibujó la siguiente matriz:

		Acusado: Culpable	Acusado: Inocente
Veredicto	Culpable	+1	−1
	Inocente	−1	+1

Cuando el presidente analizó la estrategia óptima del jurado se quedó perplejo. Parecía estar en conflicto con las instrucciones del juez de llegar a un veredicto de culpabilidad sólo si el jurado estaba convencido *fuera de cualquier duda razonable.*

¿Cuál era la estrategia óptima del jurado? ¿Cómo se contrapone esto con las instrucciones del juez y cómo se explica esta contradicción?

5-16 La administración y los líderes del sindicato se están preparando para las negociaciones de revisión del contrato en un futuro cercano. La administración considera las posiciones que puede tomar y reduce las estrategias a dos: rígida y conciliatoria. Prepara una matriz de pagos (usando utilidades) como la que sigue:

Adm. \ Sindicato	Rígida	Conc.
Rígida	−5	−2
Conc.	−7	−4

Al mismo tiempo, los líderes del sindicato analizan sus estrategias y pagos. El resultado es la siguiente matriz:

Sindicato \ Adm.	Rígida	Conc.
Rígida	+1	+1
Conc.	+1	+2

a ¿Qué hará cada parte con la matriz de la administración?
b ¿Qué hará cada parte con la matriz del sindicato?
c ¿Cómo se explica la diferencia entre *(a)* y (*b*)? *d* En ambas matrices, las utilidades se asignaron de tal forma que la administración siempre pierde y el sindicato siempre gana, ¿Es ésta una buena representación de las negociaciones de revisión de contrato?

5-17 Un duopolio puede verse como un juego entre dos firmas. Supóngase que la ganancia para la firma A por altos o bajos precios está dada como sigue:

Firma A \ Firma B	Alto	Bajo
Alto	+10	+3
Bajo	+15	+5

a ¿Qué estrategia de precios seguirá cada firma?
b ¿Existe un incentivo para la trampa? ¿qué puede decirse de los acuerdos para fijar precios?
c Si se usan las ganancias como pagos, ¿resulta éste un juego de suma cero?

ESTUDIO DE UN CASO: SINDICATOS DE PROFESORES

Los contratos colectivos son más o menos nuevos entre el personal académico de las universidades: tuvo su inicio en la década de 1960 y no alcanzó importancia sino hasta la década de 1970. La atmósfera académica de las universidades aunada a un fuerte compromiso de profesionalismo parece imposibilitar que los profesores se sindicalicen. La presión de la disminución o la estabilización en el número de inscripciones, la inflación, el aumento de controles administrativos y otros factores, han obligado a crear sindicatos en las universidades.

Una universidad, previniendo los contratos colectivos, estableció un comité de profesores para investigar este fenómeno raro. El comité debía abstenerse de cualquier recomendación, en pro o en contra, pero tenía que examinar los efectos potenciales en el caso de que se eligiera un representante para la revisión. El informe del comité incluyó un buen número de temas. Se presenta aquí un extracto.

Observaciones filosóficas

Existen dos características generales respecto de los contratos colectivas que no son pertinentes a este informe. Éstas son: (1) la naturaleza del adversario del contrato colectivo y (2) el concepto de juego de suma cero implícito en un contrato colectivo. Cada una se analiza por separado.

La naturaleza de adversario del contrato colectivo La palabra "adversario" tiene como sinónimo a "enemigo", "contrario" y "oponente". La conducta adversaria incluye, por lo tanto, no sólo alguna presión para ganar, sino también, con frecuencia, una considerable polarización de los que están incluidos en los dos grupos a quienes preocupa menos resolver el caso con justicia que obtener la victoria. Además, en condiciones en que surgen emociones fuertes, cada grupo tiende a atribuir cualidades muy indeseables al bando contrario. Cuando esto ocurre —y con frecuencia pasa—, aun cuando una disputa en particular puede resolverse, existan actitudes y sentimientos que prevalecen —a veces en forma más o menos permanente— y que perjudican las relaciones de trabajo. Este comité piensa que, aunque ambas partes, en cualquier situación de contratos Colectivos, deben presentar sus casos tan hábilmente como sea posible, la Naturaleza de adversario de tales procesos debe "mantenerse baja" y en su lugar debe exaltarse al hombre y la mujer de buena voluntad que intentan llegar a conclusiones satisfactorias, por lo menos en parte, para ambos lados. Con seguridad en el medio académico, la objetividad, la racionalidad y el ejercicio de buenos modales y el respeto a la opinión de otros, no están fuera de lo posible.

El concepto de juego de suma cero Un juego de suma cero es aquel en que la suma algebraica de todas las ganancias y todas las pérdidas es igual que cero; esto es, cualquier ganancia queda balanceada exactamente por una pérdida. En el punto de vista más general de un contrato colectivo está implícita la idea de que lo que una parte gane en el proceso queda neutralizado por una pérdida equivalente para la otra parte. En las disputas laborales sobre los salarios, un sencillo enfoque de dólares y centavos hace que parezca obvio que pagar más a los trabajadores significa menos ganancias para la administración, o más bien para los accionistas. Este comité piensa que los contratos colectivos pueden ser un juego cooperativo de suma no cero en donde cualquier pérdida para una o ambas partes puede neutralizarse con ganancias sustancialmente mayores.

Al establecer las revisiones colectivas en forma regular, no sólo es importante sino esencial que tales revisiones se consideren como una oportunidad de ganar para todas las partes, incluso las ganancias para los estudiantes. El marco de referencia para iniciar casi cualquier actividad, desde revisiones colectivas hasta el matrimonio, es crítico para el éxito real de la actividad. Comenzar las revisiones colectivas con la esperanza de que ambas partes pueden ganar es factible que produzca resultados diferentes que comenzarlas con la suposición de que lo que una parte gane representa una pérdida para la otra parte.

Preguntas

1 Desarróllese un argumento que respalde la noción de que los contratos colectivos son un juego de suma distinta de cero entre el sindicato y la administración.

2 Desarróllese un argumento que fundamente la noción de que los contratos colectivos son un juego de suma cero.

3 ¿Qué piensa el lector que es en realidad el contrato colectivo: un juego de suma cero o de suma distinta de cero?

4 Si los contratos colectivos en realidad son juegos de suma distinta de cero, ¿por qué los participantes no se unen para incrementar los intereses de ambas partes? ¿O lo hacen?

BIBLIOGRAFÍA

Davis, M. D.: *Game Theory: A Nontechnical Introduction* (New York: Basic Books, 1970). Levin, R. L. y R. B. Desjardins: *Theory of Games and Strategies* (Serán ton, Pa.: International Textbook, 1970).

Luce, R. D. y H. Raiffa: *Games and Decisions* (New York: Wiley, 1957).

McDonald, J.: *The Game of Business* (Garden City, N. Y.: Doubleday, 1975).

Owen, G.: *Game Theory* (Philadelphia: Saunders, 1968).

Shubik, M.: *Games of Society, Business and War* (New York: North Holland/American Elsevier, 1975).

von Neumann, J. y O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behaviorl* (Princeton, N. J.: Princeton University, 1944).
Williams, J. D.: *The Compleat Strategyst,* edición revisada (New York: McGraw-Hill, 1966).

PARTE TRES

PLANEACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE LA EMPRESA

6

PRONÓSTICO DEL FUTURO

No *tenemos el ayer para recuperarlo, pero tenemos el futuro para ganar o perder.*

Lyndon B. Johnson

No conozco otra manera de juzgar el futuro sino por el pasado

Patrick Henry

PERFIL DEL CAPITULO

Objetivos de aprendizaje
Clasificación de los métodos de pronósticos
Selección de un método de pronósticos
Métodos de series de tiempo
- El método gráfico
- Ejercicio de práctica (6-1)
- Promedios móviles
- Ejercicio de práctica (6-2)
- Suavizamiento exponencial
- Ejercicio de práctica (6-3)
- Análisis de tendencia
- Ejercicio de práctica (6-4)

Métodos causales
- Análisis de regresión
- Ejercicio de práctica (6-5)
- Modelos econométricos i

Métodos cualitativos
- El método

Delphi Experiencias del mundo real
- American Can Company
- The Limits to Growth
- Proyecto Aware

Resumen
Ejercicios
Estudio de un caso: United Buyers Services
Bibliografía

La administración toma muchas decisiones importantes que requieren de *pronósticos* del futuro. Los gerentes de comercialización necesitan pronósticos de ventas futuras para tomar las decisiones sobre precios, contratación, promoción y distribución. Los gerentes de producción necesitan pronósticos respecto del tiempo de producción para tomar decisiones sobre compras, personal, programación e inventarios. Los gerentes de contabilidad y finanzas requieren pronósticos de flujo de caja con objeto de tomar decisiones sobre préstamos, inversiones a corto plazo y financiamiento en general. Lo que se está sugiriendo, por supuesto, es que virtualmente todos los gerentes o administradores necesitan algún tipo de pronósticos.

En este capítulo se explora una amplia variedad de métodos de pronósticos, ya que ningún método resulta ser el mejor para todos los objetivos. Este punto queda claro considerando dos situaciones en que se requieren pronósticos. En la primera, la firma debe pronosticar cuántas unidades de un artículo se demandarán la próxima semana. En la segunda, la administración debe pronosticar la rapidez de los efectos de un descubrimiento científico reciente en la industria en que la firma compite. Estos dos ejemplos deben servir para ilustrar que los pronósticos pueden diferir en cuanto a su importancia, al marco de referencia y al nivel administrativo. Debido a diferencias como éstas, existen muchos métodos de pronósticos que deben conocerse.

Se comenzará por explorar los tipos de métodos de pronósticos disponibles. Por ejemplo, parece tener significado pensar si los métodos de pronósticos son de *series de tiempo* o *causales* a *corto, mediano* o *largo plazo y cuantitativos o cualitativos.* Cualquier método de pronósticos puede describirse en términos de estas categorías. Según la situación se selecciona un método adecuado. Conforme se vayan estudiando el *método gráfico,* los *promedios móviles,* el *suavizamiento exponencial,* el *análisis de regresión,* los *modelos econométricos y* el *método Delphi,* se irán aclarando sus diferencias. También se verán aplicaciones al mundo real de estos métodos de pronósticos.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

En este capítulo, el lector conocerá:

1 Cómo clasificar los diferentes métodos de pronósticos
2 Los factores que se deben considerar al seleccionar un método de pronósticos
3 Cómo usar gráficas, promedios móviles, suavizamiento exponencial y análisis de tendencias para analizar los datos de series de tiempo
4 Cómo se usan el análisis de regresión y los modelos econométricos para hacer pronósticos basados en factores causales
5 Cómo se emplean los métodos de pronósticos cualitativos como el método Delphi, para hacer pronósticos
6 Las aplicaciones al mundo real de los diferentes métodos de pronósticos
7 El significado de los siguientes términos:

Análisis de series de tiempo	Métodos a corto plazo
Métodos causales	Métodos a mediano plazo

Métodos a largo plazo
Métodos cuantitativos
Métodos cualitativos
Variación de tendencia
Variación estacional
Variación cíclica
Variación aleatoria
Método gráfico
Promedios móviles
Suavizamiento exponencial
Análisis de tendencia
Criterio de mínimos cuadrados
Análisis de regresión
Diagrama de dispersión
Pronósticos tecnológicos
Pronóstico social
El método Delphi

CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE PRONÓSTICOS

Dado que existen muchos métodos de pronósticos, es necesario comprender su clasificación. Las categorías posibles incluyen, pero no están limitadas, a:

1 Series de tiempo o causales
2 A corto, mediano o largo plazos
3 Cuantitativos o cualitativos

Estas categorías no son mutuamente excluyentes y, de hecho, cualquier método particular puede describirse de varias formas.

Los *métodos de análisis de series de tiempo* utilizan sólo datos históricos del pasado para la variable que se pronostica, al generar proyecciones al futuro. Suponen de manera implícita que ha sucedido en el pasado proporciona información de lo que va a suceder en el futuro. Como dijo Patrick Henry: "No conozco otra manera de juzgar el futuro sino por e1 pasado". Se analizan los valores pasados de la variable que se está pronósticando con objeto de hacer pronósticos del futuro.

Por otra parte, los *métodos causales* consideran los factores que influyen o están relacionados con que se está pronosticando. Mientras que puede no haber una relación causa-efecto directa, es típico que exista una relación lógica entre las variables que se usan para generar el pronóstico y el pronóstico que resulta. Por ejemplo, al pronosticar las ventas futuras de una compañía, pueden incluirse los precios de los competidores y los gastos de publicidad ya que casi siempre influyen en las ventas.

En general, los *métodos de pronósticos a corto plazo* tienen un *horizonte de tiempo* de *un día* a *un mes* hacia el futuro. Dicho de otra manera, el punto en el tiempo que se está pronosticando está de un día a un mes de distancia. La mayor utilidad de estos pronósticos está al manejar las operaciones diarias de una organización. Por ejemplo, pueden utilizarse al decidir cuándo autorizar un permiso de salida, cuántas horas extras se deben programar, cuántas se necesitan y cuántas unidades se deben ordenar para mantener en inventario.

Es característico que con los *métodos de pronósticos a mediano plazo* se hagan proyecciones de *un mes* a *un año* hacia el futuro. Estos pronósticos son importantes como ayuda al administrador, en decisiones sobre qué recursos se necesitan y cómo pueden usarse de la manera más eficaz. Por

ejemplo, un horizonte de planeación observa decisiones que se toman respecto de cuántos empleados se deben contratar o despedir, si deben aumentarse o disminuirse los niveles de inventario y cuál es la utilización más eficaz de la capacidad de planta existente.

Los *métodos de pronósticos a largo plazo* tienen un horizonte de *más de un año.* Estos pronósticos influyen en decisiones como qué nuevos productos deben introducirse, qué instalaciones de producción se deben construir y qué nuevo financiamiento se debe obtener. Los pronósticos a largo plazo son quizá los más importantes, ya que ayudan al administrador a proporcionar una guía directriz para la organización. Sin embargo, también son los más difíciles de obtener pues mientras más largo sea el horizonte de tiempo mayor es la incertidumbre que existe sobre el futuro.

Cuando se piensa en los métodos de pronósticos, casi siempre vienen a la mente diferentes *métodos cuantitativos.* Aunque varía su complejidad, todos emplean modelos matemáticos que requieren datos para las variables independientes con objeto de generar un pronóstico.

Por otra parte, los *métodos cualitativos* con frecuencia se usan para situaciones a largo plazo, altamente inciertas en las cuales el empleo de un modelo matemático no parece apropiado. Por ejemplo, al intentar predecir el momento en que incurrirán adelantos tecnológicos, cambios en actitudes sociales o desarrollo de proyectos políticos, la situación está tan plagada de incertidumbre que es más común que se apliquen los métodos cualitativos que los cuantitativos. En estos casos, es normal que el juicio subjetivo sea la base para llegar a un pronóstico.

SELECCIÓN DE UN MÉTODO DE PRONÓSTICOS

La selección de un método de pronósticos depende de varios factores. Es obvio que el conocimiento que tiene la persona que hace los pronósticos de los varios métodos restringe hasta cierto punto los métodos que puede usar. En este capítulo se analiza la mayoría de las técnicas básicas. Como ya se mencionó, algunos métodos son más apropiados para ciertos horizontes de tiempo. El punto en el tiempo para el que se hace el pronóstico reduce los métodos entre los que se puede elegir. El grado en que los datos históricos o el juicio subjetivo deben influir en el pronóstico es importante. Muchos métodos de pronósticos operan sólo con datos históricos y algunos se basan en el juicio subjetivo. Con datos de series de tiempo, el patrón de comportamiento de los mismos influye en la decisión de selección. Por ejemplo, algunos métodos son buenos en particular para detectar tendencias y otros no lo son. Las consideraciones sobre beneficio/costo son importantes. Cuando el pronóstico se hace para respaldar la toma de decisiones más o menos importantes deben emplearse métodos menos costosos. No obstante, el tiempo y el gasto dedicados a los pronósticos deben aumentar con la importancia de la decisión. La disponibilidad de una computadora y de paquetes de programas también influye en la selección. Algunos de los métodos más complejos requieren tal volumen de cálculos que se necesita una computadora. Estos argumentos deben servir para

aclarar que la selección de un método de pronóstico requiere muchas consideraciones.

MÉTODOS DE SERIES DE TIEMPO

En los *métodos de series de tiempo* se utilizan los datos históricos de una variable para generar un pronóstico del futuro. Estos métodos suponen que la variable pronosticada tiene información útil para el desarrollo del pronóstico sobre su comportamiento anterior. Queda implícito que es probable que lo que sucedió en el pasado continúe ocurriendo en el futuro. Cuando éste es el caso, se dice que los datos de series de tiempo para la variable que se pronostica son *estacionarios.* Cuando esta suposición no Se cumple, la serie de tiempo es *dinámica* y, entonces, los métodos de análisis de series de tiempo no deben usarse o se deben emplear sólo como un punto de partida para tener una idea de cómo diferirá el futuro del pasado.

Cuando se analizan los datos de series de tiempo es importante pensar en y buscar variaciones de tendencia, estacionales, cíclicas y aleatorias. Según los datos, la importancia de estas componentes existe en diferentes grados.

La componentes de *tendencia* refleja un movimiento general a largo plazo, ya sea hacia arriba o hacia abajo a través del tiempo. Como ejemplo se tiene que el sector de servicio de la economía americana ha ido creciendo a través del tiempo. Un análisis de su contribución en el PIB mostraría una tendencia hacia arriba. En la figura 6-1 se ilustra la variación debida a una tendencia, igual que las otras componentes de la serie de tiempo.

La componente *estacional* refleja cambios hacia arriba o hacia abajo en puntos fijos en el tiempo. En general, se considera que esta componerte ocurre con un periodo de un año o menos. Como ejemplo se observa que la mayoría de las áreas de recreo tienen una estación pico de turismo.

Cuando existe un patrón de cambio en puntos fijos en el tiempo con duración de más de un año, el patrón refleja una componente *cíclica.* Por ejemplo, la intensidad de las manchas solares varía a través de un ciclo de once años e influye en la producción agrícola. En muchos casos, los ciclos son ya sea poco importantes o muy difíciles de identificar, por lo cual se dejan fuera del análisis de la serie de tiempo. Los métodos que tratar de identificar componentes cíclicas no es objetivo de este libro.

La última componente de los datos de una serie de tiempo es la variación *aleatoria.* Esto es lo que queda después que se han separado las demás componentes. Es el *nado* inexplicable que queda.

Éstas son las componentes de los datos de una serie de tiempo la variación de tendencia, estacional, cíclica y aleatoria. Debe estudiarse con cuidado la figura 6-1 para comprobar como se cambian al formar un patrón típico de series de tiempo.

Existe una gran variedad de métodos de análisis de series de tiempo que pueden usarse en la tabla 6-1 se resumen las características de algunos de ellos. Como puede observarse en la tabla, los distintos métodos varían en cuanto al funcionamiento, exactitud para los diferentes horizontes de tiempo, capacidad para detectar puntos de cambio, aplicaciones apro-

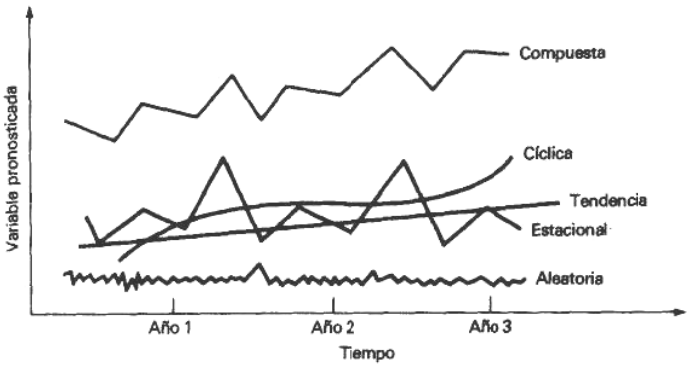


FIGURA 6-1
Componentes de los datos de series de tiempo.

piadas, requerimientos de datos, costo, necesidad de computadora y paquetes de programas y tiempo que se requiere para desarrollar un pronóstico. El alcance de este libro no permite que se examinen todos estos métodos; en cambio se estudian el método gráfico, los promedios móviles, el suavizamiento exponencial y el análisis de tendencia.

Método gráfico

Se han desarrollado muchos modelos de series de tiempo. Antes de proseguir se ilustra un enfoque que no requiere de un modelo matemático: el graficar los datos y obtener un pronóstico a partir de la gráfica. Más que confiar en el poder analítico de las matemáticas y la estadística, el *método gráfico* depende de la experiencia y capacidad del analista para identificar, con su juicio subjetivo, los patrones en los datos y hacer proyecciones basadas en esos patrones.

Aun cuando se planee emplear métodos de pronósticos más complicados, se recomienda que primero se grafiquen los datos. Casi siempre es posible juzgar a partir de la gráfica cuan fuertes son las variaciones por tendencia, estacionales, cíclicas o aleatorias. Esta información ayuda a seleccionar un método apropiado de pronósticos.

En la figura 6-2 se muestra una situación bastante sencilla. Las únicas fuerzas que influyen son una tendencia lineal hacia arriba y una variación aleatoria. Se ha trazado "a ojo" una línea recta, a través de los puntos, que puede usarse para hacer un pronóstico. El analista sólo tiene que encontrar el periodo que se está pronosticando sobre el eje horizontal, moverse hacia arriba hasta la línea de tendencia y encontrar el valor del pronóstico sobre el eje vertical

En la figura 6-3 se presenta un caso un poco más complicado. Aparece aquí una tendencia curvilínea. No obstante, todavía pueden hacerse pronósticos basado en una línea trazada "a ojo" a través de los puntos.

En la figura 6-4 se muestra un último caso más complejo. Aquí se ha intentado identificar una variación estacional que es obvio que existe. Esta última ilustración señala que cuando existen varias fuentes de variación es más difícil hacer ponósticos precisos con el método gráfico. Es en este pun-

TABLA 6-4
Métodos básicos de análisis de serles de tiempo

Técnica	*Promedios móviles*	*Suavizamiento exponencial*
Descripción	Cada punto del promedio móvil de una serie de tiempo es el promedio aritmético o ponderado un número de puntos consecutivos de la serie, en donde esté número de puntos se escoge en tal forma que se eliminen los efectos de estacionalidad o de irregularidad o ambos.	Parecido a promedios móviles, excepto que los datos más recientes reciben más peso. Descriptivamente, el nuevo pronóstico es igual que el anterior más una proporción del error del pronóstico anterior. Los pronósticos aditivos son más o menos lo mismo, excepto que calculan también las estacionalidades. Existen muchas variaciones del suavizamiento exponencial : algunas son más adecuadas que otras; algunas son más complejas en cálculos; algunas requieren más tiempo de computadora.
Exactitud	De pobre a buena	De buena a muy buena
A corto plazo (0-3 meses)	Pobre	De pobre a buena
A mediano plazo(3 meses - 2 años)	Muy pobre	Muy pobre
A largo plazo (2 años o más)	Pobre	Pobre
Identificación del punto de cambio	Control de inventarios para bajos volúmenes	Control de producción e inventarios pronósticos de márgenes y otros datos financieros
Aplicación típica		
Datos requeridos	Un mínimo de dos años de historial de ventas si se presentan estacionalidades. De otra manera, menos datos. (Por supuesto, entre más, mejor.) El promedio móvil debe especificarse.	Los mismos para promedios móviles
Costo del pronóstico con una computadora	$.005	$.005
¿Es posible el cálculo sin computadora?	Si	Sí
Tiempo requerido para desarrollar una aplicación y obtener los pronósticos	1 día	1 día

Fuente: John C. Chambers, Satinder, K. Mullick y Donald D. Smith., "How to Choose the Rigth Forecasting Technique" *Harvard Business Review,* vol 49, No. 4 (julio-agosto de 1971), pp. 55-64. Copyrigth © 1971 por el President and Follows of Harvard College; todos los derechos reservados.

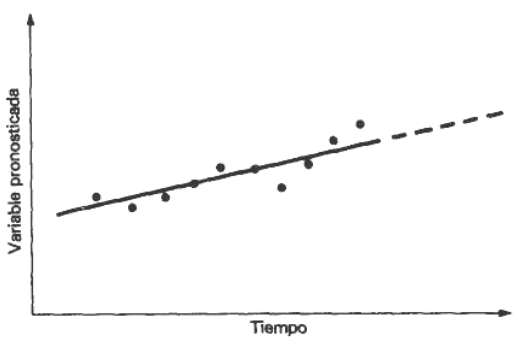


FIGURA 6-2
Pronóstico gráfico con una componente de tendencia lineal.

Box-Jenkins	*X-11*	*Proyecciones de tendencia*
El suavizamiento exponencial es un caso especial de la técnica de Box-Jenkins. La serie de tiempo se ajusta con un modelo matemático que es óptimo en cuanto a que asigna a los datos históricos errores más pequeñas que ningún otro método. Debe identificarse el tipo de modelo y después estimarse los parámetros. En apariencia, la rutina estadística más exacta en la actualidad es ésta, pero también la *más* costosa y tardada.	Descompone una serie de tiempo en estacionalidades, ciclos de tendencia y elementos irregulares. Se usa primordialmente para análisis de series de tiempo detallados (incluso estimaciones estacionales); pero su uso se ha extendido a pronósticos, detección y prevención al incorporarle otros métodos analíticos. Si se usa con conocimientos especiales, tal vez sea la técnica más eficaz para pronósticos a mediano plazo, lo cual permite predecir puntos de cambio y programar eventos especiales.	Ajusta una línea de tendencia a una ecuación matemática y después proyecta al futuro por medio de esta ecuación. Existen algunas variaciones: el método de la característica de la pendiente, polinomios, logaritmos, etc.
De- muy buena a excelente	De muy buena a excelente	Muy buena
De pobre a buena	Buena	Buena
Muy pobre	Muy pobre	Buena
Regular	Muy buena	Pobre
Control de producción e inventarios para grandes volúmenes de artículos, pronósticos de balances.	Detección y prevención. Pronósticos de ventas de la compañía, la división o el departamento.	Pronósticos para nuevos productos (en particular a mediano y largo plazo).
Los mismos que para promedios móviles. Sin embargo, en este caso más historial es muy ventajoso en la identificación del modelo	Un mínimo de tres años de historial para comenzar. En adelante, el historial completo	Varía con la técnica que se usa. Sin embargo, una buena regla es utilizar un mínimo de cinco años de datos anuales para comenzar. En adelante, el historial completo Varía con la aplicación Sí
$10.00	$10.00	día
Sí	No	
1 día	1 día	

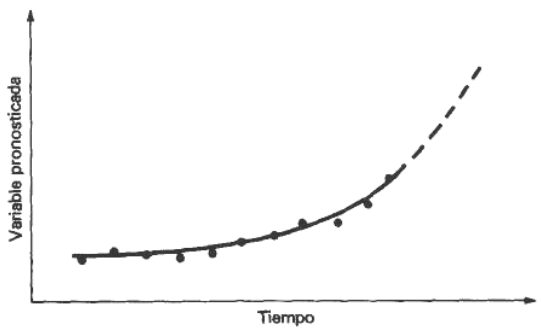


FIGURA 6-3
Pronóstico gráfico con una componente de tendencia curvilínea.

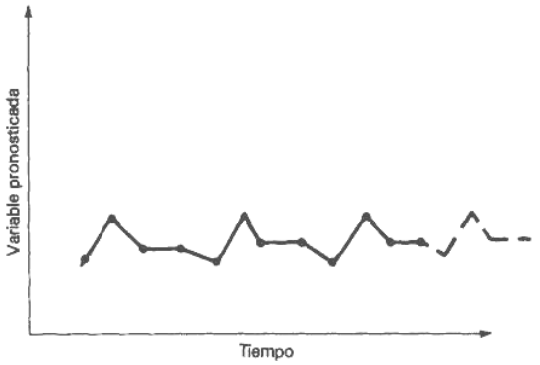


FIGURA 6-4
Pronóstico gráfico con una componente estacional.

to en que los métodos basados en las matemáticas y la estadística son particularmente útiles.

Puntualizada la posibilidad de usar un enfoque gráfico, ahora se estudian los métodos que emplean modelos matemáticos para generar pronósticos. Sobre todo, estos métodos pueden proporcionar pronósticos exactos.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 6-1

La American Cable TV quiere pronosticar la demanda de televisión por cable para años futuros. Esta opción de cablevisión proyecta películas recientes y otros eventos especiales y su aceptación ha ido creciendo en la comunidad de Carlton. En seguida se muestran los datos sobre el número de suscriptores desde que se introdujo.

Año	*Número de suscriptores*
1975	310
1976	390
1977	420
1978	430
1979	450
1980	460

Con el método gráfico pronostíquese el número de suscriptores en 1981 y 1982.

Promedios móviles

Promedios móviles es un modelo de pronósticos útil y sencillo. Sobre todo se usa para hacer pronósticos a corto y mediano plazo. El promedio de lo que ha ocurrido en el pasado se emplea para pronosticar el futuro. Si X_t es el promedio móvil calculado hasta e incluso el valor de X en el periodo *t,* el pronóstico del valor de X en el periodo $t + 1$ se toma como X_t. Si se

expresa el valor pronosticado de X en el periodo $t + 1$ como F_{t+1}, puede decirse que

$$F_{t+1} = \bar{X}_t \tag{6-1}$$

Con un promedio móvil , sólo se usan las últimas N observaciones. Cada vez que se dispone de una nueva observación, el promedio "se mueve" para incluir la observación más nueva y deja la más vieja de las observaciones que se usaron antes. Matemáticamente, un promedio móvil se calcula de la siguiente manera:

$$\bar{X}_t = \frac{X_t + X_{t-1} + \cdots + X_{t-N+1}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^{t} X_i \tag{6-2}$$

El promedio móvil hasta el periodo t se usa para el pronóstico del periodo $t + 1$.

$$F_{t+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^{t} X_i \tag{6-3}$$

Tabla 6-2
Demanda, promedios móviles y demanda pronosticada

Periodo t	*Mes*	*Demanda*	$\bar{X}_t$, *pormedio móvil de 3 términos*	F_{t+1}, *pronóstico*	$\bar{X}_t$, *promedio móvil de 5 términos*	F_{t+1}, *pronóstico*
1	enero, 1980	200				
2	febrero, 1980	280				
3	marzo, 1980	250	243.3			
4	abril, 1980	300	276.7	243.3		
5	mayo, 1980	310	286.7	276.7	268	
6	junio, 1980	320	310	286.7	292	268
7	julio, 1980	300	310	310	296	292
8	agosto, 1980	320	313.3	310	310	296
9	septiembre, 1980	360	326.7	313.3	322	310
10	octubre, 1980	370	350	326.7	334	322
11	noviembre, 1980	380	370	350	346	334
12	diciembre, 1980	380	376.7	370	362	346
13	enero, 1981			376.7		362

En la tabla 6-2 se ilustra el uso del promedio móvil como un método de pronóstico. Los pronósticos que se muestran usan uno el promedio móvil de tres términos y otro el de cinco términos. En la figura 6-5 se presentan la demanda real (línea continua) y las demandas pronosticadas (líneas punteadas) para ambos promedios móviles. En este ejemplo pueden basarse varias observaciones sobre los promedios móviles.

Primero, el número de términos que se incluyen en el cálculo del promedio móvil influye en la respuesta del promedio. Cuanto más pequeño es el número de términos incluidos, mayor es la sensibilidad del promedio a los cambios y viceversa. En una situación más bien dinámica en que los cambios son muy rápidos y la administración desea detectar estos cambios, debe usarse un promedio móvil de unos cuantos términos. Por otro lado, si la situación es más o menos estable y la mayoría de los cambios de un periodo a otro se deben a una variación aleatoria, debe emplearse un número mayor de términos con objeto de minimizar la respuesta a la variación aleatoria. En última instancia, el número de términos que se usan es una transacción entre un promedio mayor para reducir los efectos de una variación poco significativa y un promedio menor para reducir el retraso en la respuesta a información importante.

Es posible experimentar con promedios móviles de diferentes términos para identificar el que proporcione el mejor pronóstico. En la tabla 6-3 se ilustra un análisis de este tipo para el ejemplo que se ha venido estudiando. Para cada promedio se calcula la desviación media absoluta entre el pronóstico y la demanda real. Puede observarse que en este caso el promedio de tres términos proporciona pronósticos un poco mejores que el de cinco términos. Esto tiene otro motivo que conduce a otra observación importante sobre los promedios móviles como un método de pronósticos.

Un promedio móvil siempre tiene un retraso respecto de la tendencia. La magnitud del retraso depende de la fuerza de la tendencia y del número de términos en el promedio móvil. Cuanto más fuerte es la tendencia

FIGURA 6-5
Demanda real y pronosticada con promedios móviles.

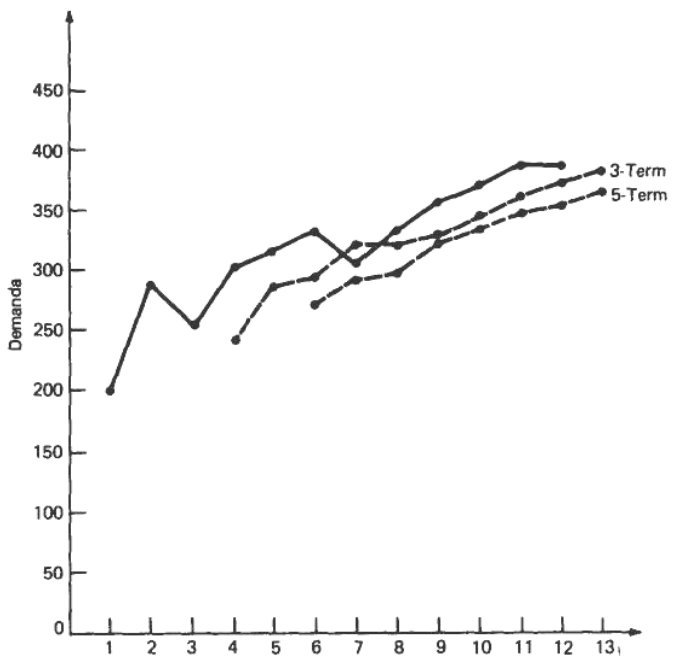


Tabla 6-3
Comparación del promedi móvil de tres cinco términos

Mes	Demanda real	Demanda pronosticada de 3 términos	Valor absoluto de demanda real-pronóstico	Demanda pronosticada de 5 términos	Valor absoluto de demanda real-pronóstico de 5 términos
junio, 1980	320	286.7	33.3	268	52
julio, 1980	300	310	10	292	8
agosto, 1980	320	310	10	296	24
septiembre, 1980	360	313.3	46.7	310	50
octubre, 1980	370	326.7	43.3	322	38
noviembre, 1980	380	350	30	334	46
diciembre, 1980	380	370	10	346	34
			183.7*		252 +

*Desviación media absoluta $= \frac{183.7}{7} = 26.2$

+ Desviación media absoluta $= \frac{252}{7} = 36.0$

mayor es el retraso. Al usar más términos para calcular el promedio el retraso también es mayor. Ésta es la razón fundamental por la que el promedio de cinco términos proporcionó un pronóstico más pobre que el de tres términos. Los datos del ejemplo tienen una componente creciente de tendencia.

Un promedio móvil también tendrá un retraso respecto de cualquier patrón cíclico y fracasará en tomar en cuenta una variación estacional. Estas son limitaciones bastante serías para los promedios móviles como método de pronósticos y ayudan a explicar por qué es más común que se usen para pronósticos a corto plazo. Existen extensiones al modelo básico de promedios móviles diseñadas para reducir estas limitaciones, pero están fuera de los objetivos de este libro.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 6-2

La Experiential Toy Company produce una variedad de juguetes que requieren triplay. En seguida se presenta la demanda de triplay para los meses de junio a septiembre de 1980. Pronostíquese la demanda de triplay para el mes de octubre usando promedios móviles de dos y de cuatro términos.

Periodo	Mes	Demanda, pies cúbicos
1	junio, 1980	4000
2	julio, 1980	4500
3	agosto, 1980	4800
4	septiembre, 1980	5000

Suavizamiento exponencial

Una alternativa a los promedios móviles, popular entre los analistas, es *suavizamiento exponencial.*[1] Igual que los promedios móviles, se usa para pronósticos a corto y mediano plazo. Un promedio suavizado exponencialmente se calcula de la siguiente manera:

$$X_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)F_t \tag{6-4}$$

Igual que en el caso de promedios móviles, el promedio calculado hasta el periodo t se usa para pronosticar el periodo $t + 1$. Esto lleva al siguiente modelo de pronósticos:

$$F_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha)F_t \tag{6-5}$$

El pronóstico para el periodo $t + 1$ es igual que la constante de suavizado α (alfa), multiplicada por la observación más reciente más 1 menos la constante de suavizado multiplicada por el pronóstico que se hizo para el periodo *t.* A la constante de suavizado se le asigna un valor entre 0 y 1; esto se analizará en breve.

El suavizamiento exponencial tiene varias características que hacen atractivo su empleo. Primero, no requiere mucho espacio de almacenamiento cuando se trabaja con computadoras. Al hacer un pronóstico, todo lo que se requiere es la constante de suavizado, la observación más reciente y el pronóstico anterior. No es necesario guardar todas las observaciones previas. Segundo, en este modelo nunca se descarta por completo ninguna observación; siempre queda incorporada en algún grado en el pronóstico anterior. Por supuesto, para valores altos de alfa, la repercusión de las ob-

Tabla 6-4
Demanda y pronóstico de demanda por suavizamiento exponencial

			Pronósticos F_{t+1} *por suavizamiento exponencial*	
Periodo	*Mes*	*Demanda*	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.5$
1	enero, 1980	600	—	—
2	febrero, 1980	580	600	600
3	marzo, 1980	580	598	590
4	abril, 1980	520	596	585
5	mayo, 1980	570	588	552
6	junio, 1980	510	586	561
7	julio, 1980	500	578	536
8	agosto, 1980	470	570	518
9	septiembre, 1980	450	560	494
10	octubre, 1980	460	549	472
11	noviembre, 1980	430	540	466
12	diciembre, 1980	400	529	448
13	enero 1981	—	516	424

[1] Este método se conoce como suavizamiento exponencial, porque la contribución que hace cualquier observación a un pronóstico decrece de manera exponencial al pasar el tiempo. Esto puede demostrarse algebraicamente, pero la prueba no concierne a este texto

servaciones anteriores disminuye con rapidez. Tercero, el valor de alfa puede ajustarse en tal forma que los pronósticos respondan, rápida o lentamente, a los cambios posibles en el sistema. Un valor alto de alfa es análogo al cálculo de los promedios móviles basándose en un número pequeño de observaciones.[2]

En la tabla 6-4 se ilustra el uso del modelo de suavizamiento exponencial. Los pronósticos están hechos usando un alfa de 0.1 y de 0.5. En la figura 6-6 se presenta la demanda real (línea continua) y la demanda pronosticada (líneas punteadas) para los dos valores de alfa.

Cuando se hace el primer pronóstico con un modelo de suavizamiento exponencial ocurre un problema interesante. Como es el primero, no existe un pronóstico previo que pueda usarse con el término $(1 - \alpha)F_t$. Este no es un problema serio y puede manejarse de varias maneras. En la tabla 6-4 se supone que el pronóstico anterior es el mismo que la observación más reciente. Matemáticamente, esto equivale a asignar un peso de 1 a alfa cuando se hace el primer pronóstico. Para los pronósticos subsecuentes ya se tiene el anterior que puede usarse en el modelo.

Por inspección puede observarse que el pronóstico que usa un alfa de 0.5 proporciona proyecciones más precisas. Esto se debe a que los datos

[2] Puede demostrarse que un modelo de suavizamiento exponencial con constante de suavizado *a* tiene una variabilidad equivalente a un promedio móvil que contiene $(2/\alpha) - 1$ términos. Para ilustrar, un modelo de suavizamiento exponencial con $\alpha = 0.5$ es equivalente a un promedio móvil de tres términos; $(2/0.5) - 1 = 3$.

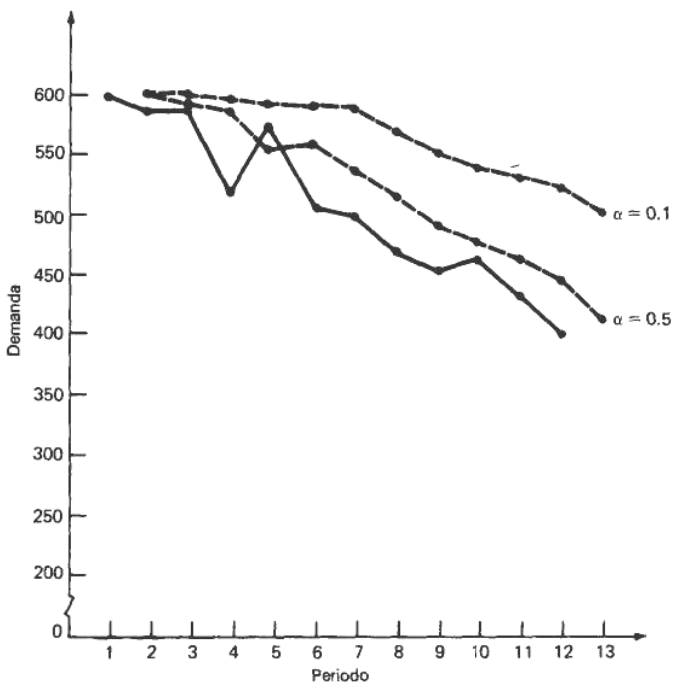


FIGURA 6-6
Demanda real y pronosticada con suavizamiento exponencial.

contienen una tendencia hacia abajo el valor mayor de alfa es más sensible a esto. Aun así, el pronóstico tiene un retraso respecto de las observaciones reales. Aun cuando los datos no contienen variaciones estacional o cíclica, el modelo básico de suavizamiento exponencial también se queda corto al no tomar en cuenta estas fuentes de variación. Debido a tales deficiencias, este modelo se emplea sobre todo para pronósticos a corto plazo. Existen modelos más avanzados de suavizamiento que incluyen estas fuentes de variación en sus pronósticos, pero quedan fuera del interés de este estudio.

EJERCICIO DE PRACTÍCA 6-3

El Barrett's Newstand vende copias del *Sports Illustrated.* La demanda semanal de esta revista en el mes pasado se muestra en seguida.

Periodo	*Semana*	*Demanda*
1	julio 3	50
2	julio 10	65
3	julio 17	63
4	julio 24	58
5	julio 31	66

Pronostíquese la demanda para el 7 de agosto usando suavizamiento exponencial con un alfa de 0.2.

Análisis de tendencia

El último método de series de tiempo que se considerará es el de *análisis de tendencia.* Como indica su nombre, es apropiado para detectar tendencias. Con frecuencia, ésta es una consideración importante cuando se hacen pronósticos a mediano y largo plazo.

El objetivo del análisis de tendencia es ajustar matemáticamente una curva a un conjunto de datos. Aquí se estudia sólo el análisis de tendencia *lineal,* pero existen otros tipos de análisis de tendencia (por ejemplo, cuadrática, logarítmica) que también pueden realizarse. Un modelo de análisis de tendencia tiene el tiempo como variable independiente, y 1 la variable que se está pronosticando es la variable dependiente. Para obtener un pronóstico, sólo es necesario insertar el periodo para el cual se desea el pronóstico y calcular el valor pronosticado.

Igual que con todos los métodos de series de tiempo, el análisis debe comenzar con una gráfica de los datos. Para ejemplificar, en la tabla 6-5 se presentan los datos de una demanda. Al graficar estos datos resulta la figura 6-7. El lector debe notar que ahora se están manejando datos trimestrales en lugar de mensuales. Esto es apropiado, ya que el análisis de tendencia es un método de pronósticos de mediano o largo plazo. En la gráfica puede observarse que en los tres últimos años ha habido una demanda creciente con una componente de tendencia lineal definitiva. Los

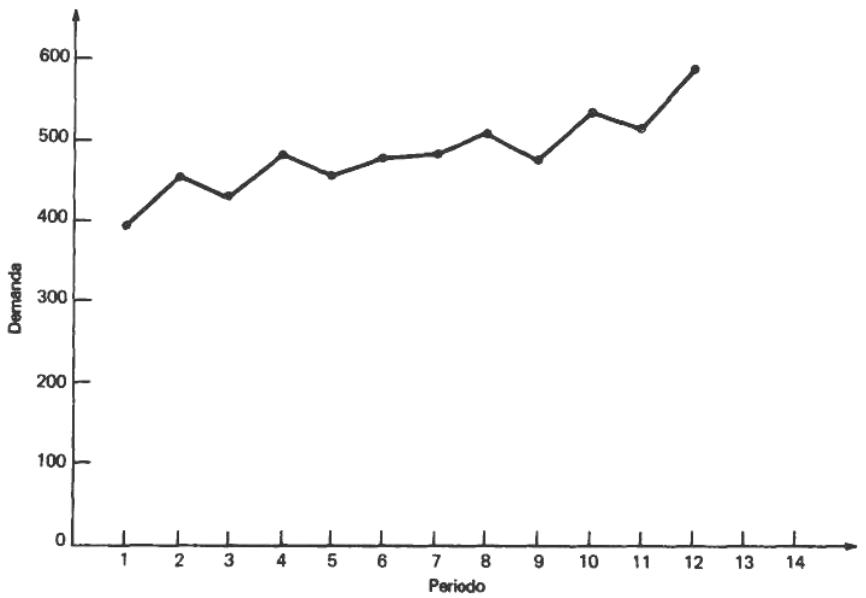
TABLA 6-5
Dato de demanda

Periodo	*Trimestre*	*Demanda*
1	Invierno 1978	390
2	Primavera 1978	25
3	Verano 1978	420
4	Otoño 1978	475
5	Invierno 1979	40
6	Primavera 1979	60
7	Verano 1979	465
8	Otoño 1979	500
9	Invierno 1980	455
10	Primavera 1980	520
11	Verano 1980	495
12	Otoño 1980	560

datos también contienen una componente estacional fuerte, pero se pospondrá su estudio hasta después que se haya analizado la tendencia.

La pregunta principal es: "¿Qué curva o ecuación lineal describe mejor los datos de demanda?" La respuesta a esta pregunta depende del criterio que se quiera aplicar. Con el enfoque gráfico simplemente se traza a ojo una curva; es decir, se dibuja una curva que parezca el mejor ajuste a los datos. Este enfoque, que se analizó antes en este capítulo, incluye una combinación de juicio subjetivo y adivinanzas.

Un enfoque matemático para el análisis de tendencia lineal es mucho más estructurado y preciso. Identifica la ecuación de una línea recta de la



¡URA 6-7
tos de demanda
ıneados.

forma $y = a + bx$, en donde y es el valor pronosticado, a es la ordenada, en el origen (intercepción de la recta con el eje vertical), b es la pendiente de la línea y x el periodo para el que se prepara el pronóstico. Los valores de a y b se encuentran con el método de *mínimos cuadrados*. La aplicación de este criterio da como resultado una línea recta que minimiza el cuadrado de las distancias verticales desde cada observación a la línea. En la figura 6-8 se ilustra el criterio de mínimos cuadrados. Los valores para a y b que minimizan la suma de los cuadrados de todas las distancias verticales definen la ecuación que mejor se ajusta a los datos.

Es posible derivar matemáticamente las ecuaciones para a y b, pero aquí sólo se dará el resultado final. Las ecuaciones son las siguientes:

$$a = \frac{\Sigma y}{N} - \frac{b\Sigma x}{N} \tag{6-6}$$

$$b = \frac{N\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \tag{6-7}$$

Ahora se usarán estas ecuaciones con los datos de la tabla 6-5. Los cálculos intermedios que se requieren se muestran en la tabla 6-6. Primero se encuentra el valor de b:

$$b = \frac{N\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = \frac{12(38\,075) - 78(5\,605)}{12(605) - (78)^2} = 11.5$$

Cuando se conoce el valor de b, puede usarse la ecuación (6-6) para encontrar el valor de a.

$$a = \frac{\Sigma y}{N} - \frac{b\Sigma x}{N} = \frac{5\,605}{12} - \frac{11.5(78)}{12} = 392.3$$

FIGURA 6-8
Criterio de mínimos cuadrados.

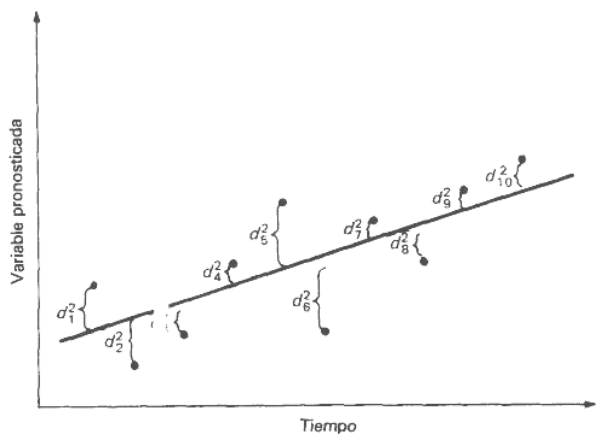


TABLA 6-6
Cálculos intermedios para ajustar una tendencia lineal por el método de mínimos cuadrados

Periodo x	*Demanda* y	xy	x^2
1	390	390	1
2	425	850	4
3	420	1260	9
4	475	1900	16
5	440	2200	25
6	460	2760	36
7	465	3255	49
8	500	4000	64
9	455	4095	81
10	520	5200	100
11	495	5445	121
12	560	6720	144
$\Sigma x = 78$	$\Sigma y = 5605$	$\Sigma xy = 38\,075$	$\Sigma x^2 = 650$

El modelo de pronóstico es, por tanto,

$$\text{Pronóstico}_t = 392.3 + 11.5(t)$$

Por ejemplo, si se quiere el pronóstico de demanda para el invierno de 1981, se reconoce que esto corresponde al periodo 13 (con base en la numeración dada a los periodos al realizar el análisis) y el pronóstico es

$$\text{Pronóstico}_{t=13} = 392.3 + 11.5(13) = 542$$

El pronóstico para el invierno de 1982 es

$$\text{Pronóstico}_{t=17} = 392.3 + 11.5(17) = 588$$

Todos los cálculos se realizaron a mano. Debe señalarse que existen muchos paquetes de programas para llevar a cabo un análisis de tendencia. Aun algunas calculadoras tienen esta capacidad construida dentro de la unidad de circuitos lógico/aritméticos.

Los modelos de promedios móviles y de suavizamiento exponencial que se describieron antes dejaban atrás cualquier tendencia en los datos. En consecuencia, se afirmó que su mejor uso es para pronósticos a corto plazo. Con el análisis de tendencia se hace una consideración directa de cualquier tendencia al efectuar los pronósticos. La pendiente de la línea, dada por el valor de *b,* muestra lo que las observaciones tienden a aumentar de un periodo a otro.

Sin embargo, con frecuencia se necesita una variación estacional. Afortunadamente, puede hacerse la extensión al modelo de análisis de tendencia sin agregar mucha complejidad. Se hará esta modificación calculando cuanto debe *aumentarse o disminuirse* el pronóstico de tendencia de

TABLA 6-7
Cálculo del ajuste estacional

Invierno	*Demanda*	*Pronóstico de demanda*	*Demanda pronóstico de demanda*	*Primavera*	*Demanda*	*Pronóstico de demanda*	*Demanda pronóstico de demanda*
Invierno 1978	390	404	—14	Primavera 1978	425	415	10
Invierno 1979	440	450	—10	Primavera 1979	460	461	—1
Invierno 1980	455	496	—41	Primavera 1980	520	507	13

Ajuste de invierno $= \frac{-14 - 10 - 41}{3} = -22$ Ajuste de primavera $= \frac{10 - 1 + 13}{3} = 7$

Verano	*Demanda*	*Pronóstico de demanda*	*Demanda pronóstico de demanda*	*Otoño*	*Demanda*	*Pronóstico de demanda*	*Demanda pronóstico demanda*
Verano 1978	420	426	—6	Otoño 1978	475	438	37
Verano 1979	465	473	—8	Otoño 1979	500	484	16
Verano 1980	495	519	—24	Otoño 1980	560	530	30

Ajuste de verano $= \frac{-6 - 8 - 24}{3} = -13$ Ajuste de otoño $= \frac{37 - 16 + 30}{3} = 28.$

acuerdo con la estación. Entonces, en esencia, el modelo de pronósticos se convierte en

$$\text{Pronóstico} = \text{tendencia} + \text{ajuste estacional} \qquad (6\text{-}8)$$

Los ajustes estacionales pueden determinarse calculando cuánto y en qué dirección se desvían los pronósticos de tendencia en cada estación. Para este pronóstico es conveniente organizar los datos del último ejemplo por estaciones, como se muestra en la tabla 6-7. Se usa el modelo de análisis de tendencia para pronosticar cuál debió ser la demanda en cada trimestre, de no haber una variación estacional. En esencia, lo que se hace es pronosticar hacia atrás para comprobar lo que se debía haber pronosticado si se hubiera tenido el modelo de pronósticos por tendencia. La diferencia entre la demanda real y la demanda pronosticada hacia atrás se atribuye a la variación estacional. En consecuencia, se calcula la cantidad promedio que se desvió el pronóstico en cada uno de los cuatro trimestres para determinar el ajuste estacional. Se hace el ajuste apropiado de acuerdo con e1 trimestre que se está pronosticando.

Con el modelo completo con las dos componentes de tendencia y estacional, se pronosticará la demanda para el otoño de 1981. Este periodo corresponde a $t = 16$ y a un ajuste estacional de + 28. Por tanto, el pronóstico es

$$\text{Pronóstico} = \text{tendencia} + \text{ajuste estacional}$$
$$\text{Pronóstico}_{t=16} = 392.2 + 11.5(16) + 28 = 604$$

EJERCICIO DE PRÁCTICA 6-4

En el ejercicio de práctica (6-1) se usó el método gráfico para pronosticar el número de suscriptores a cable visión. Con los datos presentados ahí desarróllese un modelo de tendencia lineal basado en el método de mínimos cuadrados. Pronostíquese el número de suscriptores en 1981 y en 1982. Compárense estos pronósticos con los que se hicieron antes.

MÉTODOS CAUSALES

Los *métodos causales de pronósticos* se caracterizan por tomar en cuenta múltiples factores que influyen o se relacionan con la variable que se quiere pronosticar. Así, tienden a ser más ricos en cuanto a su poder descriptivo que los métodos de series de tiempo. Estos operan partiendo sólo de los valores pasados de la variable que se pronostica.

Los factores que se consideran en el análisis causal pueden ser internos o externos a la organización. Como ejemplo, considérese el pronóstico de demanda para los productos de una compañía. Algunos factores externos que se relacionan con la demanda pueden ser el PIB, la tasa de desempleo, los precios del competidor y los gastos de promoción. Los factores internos podrían incluir los precios de venta del producto y los gastos de comercialización. Cualquier factor que esté ligado de manera lógica a la variable que se está pronosticando es un candidato posible para ser incluido en el análisis causal.

Mientras que los métodos de series de tiempo son cuantitativos, los métodos causales incluyen técnicas tanto cuantitativas como cualitativas. En esta sección se consideran sólo las técnicas cuantitativas. Los métodos cualitativos son los suficientemente particulares como para que se presenten en una sección aparte.

Existe una gran variedad de métodos causales que pueden usarse para generar pronósticos. Las características de muchos de ellos se resumen en la tabla 6-8. Se considerarán brevemente el análisis de regresión y el modelado econométrico. Por desgracia, estos métodos son tan complejos que no es posible más que un tratamiento descriptivo.

Análisis de regresión

En el *análisis de regresión* el objetivo es identificar una relación funcional entre una o más variables independientes (predictoras) y la variable dependiente (pronóstico). El análisis de regresión no sólo indica cuáles variables independientes son buenos predictores, sino que también establecen un modelo matemático específico que puede emplearse para propósitos de los pronósticos.

Las variables independientes que se usan en un análisis de regresión difieren según lo que se está pronosticando. En general, las variables independientes tienen una relación causal con la variable que se pronostica, o están relacionadas con ésta en alguna forma lógica. Considérese un ejemplo específico. En seguida se muestra un modelo desarrollado para

pronosticar la productividad de individuos que habían solicitado empleo en una compañía específica.

$$\text{PRODUCTO} = -3.20 + 0.25 * \text{PRUEBA} + 0.40 * \text{EXPERIENCIA}$$

El modelo indica que la productividad de un solicitante puede pronosticarse sumando una constante (–3.20), un coeficiente (0.25), multiplicado por la calificación obtenida en la prueba de aptitudes (PRUEBA), y un coeficiente (0.40), multiplicado por el número de años de experiencia en trabajos relacionados (EXPERIENCIA).

El modelo descrito es el resultado de la aplicación de regresión *lineal múltiple.* Es lineal y no *curvilínea,* puesto que se supuso que existía una relación en línea recta entre las variables independientes y la dependiente. Ejemplifica el uso de regresión múltiple y no *simple,* ya que existe más de una variable independiente.

Una presentación completa del análisis de regresión no está dentro de los objetivos de este texto. Es un tema complejo que requiere muchas consideraciones estadísticas. No obstante, es posible hacer una presentación suficiente de regresión lineal simple como para proporcionar una base con el fin de utilizarlo para desarrollar modelos de pronósticos.

Como ejemplo, considérese una firma que quiere comercializar un dispositivo automático para abrir puertas de garaje. La compañía ha estado poniendo anuncios en los periódicos de 10 áreas de mercado diferentes. Está interesada en relacionar el número de personas que escribirán pidiendo la información gratis con el número de dispositivos que al final se vendan. En la tabla 6-9 se muestran los datos de las 10 áreas de mercado).

Un punto de partida es graficar los datos con objeto de establecer la naturaleza de la relación entre el número de unidades vendidas y el número de folletos de información pedidos. En la terminología de análisis de regresión, una gráfica de este tipo se llama *diagrama disperso.* Los datos graficados en la figura 6-9 muestran una relación lineal que sugiere que es apropiado aplicar el análisis de regresión lineal simple.

El análisis de regresión emplea el criterio de mínimos cuadrados que se describió antes. Igual que en el análisis de tendencia, este criterio sirve para desarrollar una ecuación específica que relacione las variables independiente y dependiente. La característica que distingue al análisis de tendencia del de regresión lineal es, en esencia, conceptual, ya que cada uno desarrolla un modelo usando las mismas ecuaciones de mínimos cuadrados. La distinción está en que al emplear análisis de regresión se supone que las observaciones para la variable independiente son independientes. Con los datos de series de tiempo es obvio que éste no es el caso. Una observación en cualquier periodo se relaciona con las observaciones en otros periodos. Esta falta de independencia impide la interpretación estadística usual del análisis de regresión. En consecuencia, no es correcto considerar el análisis de tendencia como un sinónimo de análisis de regresión aun cuando empleen las mismas ecuaciones.

TABLA 6-8
Métodos básicos de análisis causal

Técnica	*Modelo de regresión*	*Modelos econométricos*	*Investigaciones de intención de compra*
Descripción	Funcionalmente relaciona las ventas con otras variables económicas, competitivas o internas y estima una ecuación con la técnica de mínimos cuadrados. Las relaciones analizan principalmente por estadística, aunque puede seleccionarse relación para probarlas en términos racionales	Un sistema de ecuaciones de regresión interdependientes que describe la actividad económica de ventas o ganancias de algún sector. Los parámetros de las ecuaciones de regresión en general se estiman al mismo tiempo. Como regla, estos modelos son relativamente caros en su desarrollo y puede constar entre $5 000 y $10 000 según el detalle. No obstante, debido al sistema de ecuaciones inherente, expresarán mejor las causas que una ecuación de regresión ordinaria y, por tanto, predecirán con más exactitud los puntos de cambio	Investiga las intenciones determinadas del público en general de comprar ciertos productos y obtiene un índice que mide el sentimiento general sobre el presente y el futuro y estima cómo este sentimiento afectará los hábitos de compra. Más útil para detectar y prevenir que para pronosticar. El problema básico al emplearlos es que puede señalar un punto de cambio incorrecto (que puede nunca ocurrir)
Exactitud	De buena a muy buena		De pobre a buena
A corto plazo (0-3 meses)	De buena a muy buena	De buena a muy buena	De pobre a buena
A mediano plazo (3 meses—2 años		De muy buena a excelente	
A largo plazo (2 años y más)	Pobre	Buena	Muy pobre
Identificación del punto de cambio	Muy buena	Excelente	Buena
Aplicación típica	Pronóstico de ventas por clases de productos, pronósticos de márgenes.	Pronósticos de ventas por clase de producto	Pronósticos de ventas por clases de productos, pronósticos de márgenes.
Datos requeridos	Historia de varios años por trimestres para obtener relaciones buenas y significativas. Matemáticamente es necesario tener dos observaciones más que el número de variables independientes	Los mismos que para regresión	En general se requieren varios años de datos para relacionar los índices con las ventas de la compañía
Costo del pronóstico con una computadora	$100	$5 000 +	$5 000
¿Es posible el cálculo sin computadora?	Sí	Sí	Sí
Tiempo requerido para desarrollar, una aplicación y obtener los pronósticos	Depende de la capacidad para identificar relaciones	2 meses +	Varias semanas

Fuente: John C. Chambers, Satinder, K. Mullick y Donald D. Smith., "How to Choose the Rigth Forecasting Technique" *Harvard Business Review,* vol. 49, No. 4 (julio-agosto de 1971), pp. 55-64. Copyrigth © 1971 por el President and Fellows of Harvard College; todos los derechos reservados.

Modelo de insumo-producto	*Modelo económico de insumo-producto*	*Indicador principal*	*Análisis del ciclo de vida*
Un método de análisis que se ocupa del flujo interindustrial o interdepartamental de bienes o servicios en una economía o en una compañía y sus mercados Muestra que flujos de insumes deben ocurrir para obtener productos. Debe realizarse un esfuerzo considerable para usar estos modelos en forma apropiada, y si se quieren aplicar a una empresa específica deben obtenerse detalles adicionales en general no disponibles. Las corporaciones que usan modelo de insumo producto han gastado tanto como $100 000 y más anuales para desarrollar aplicaciones útiles.	**A veces se combina con modelos econométricos para pronósticos. El modelo de insumo producto se usa para proporcionar tendencias a largo plazo para los modelos los modelos econométricos;**	**La serie de tiempo de una actividad económica cuyo movimiento en una dirección dada precede al movimiento de alguna otra serie de tiempo en la misma dirección.**	**Analiza y pronostica las tasas de crecimiento de un nuevo producto basándose en curvas—S. Las fases de aceptación del producto por los diferentes grupos como innovadores, adaptadores, mayoría temprana, mayoría tardía y rezagados son el punto central de este análisis.**
No aplicable	**No aplicable**	**De pobre a buena**	**Pobre**
De buena a muy buena	**De buena a muy buena**	**De pobre a buena**	**De pobre a buena**
De buena a muv buena	**De buena a excelente**	**Muy pobre**	**De pobre a buena**
Regular	**Buena**	**Buena**	**De pobre a buena**
Pronósticos de ventas de la compañía y ventas de la división para sectores y subsectores industriales.	**Ventas de la compañía para sectores y subsectores industriales.**	**Pronósticos de ventas por clases de productos.**	**Pronósticos de ventas de un nuevo producto.**
10 o 15 años de historia.	**Los mismos que para promedios móviles y X-11**	**Los mismos que para las investigaciones de intensión de compra + historia de de cinco a diez años.**	**Como mínimo, las ventas anuales del producto en consideración o de un producto similar. Con frecuencia es necesario hacer investigaciones de mercado**
Fluye una cantidad considerable de información sobre productos y servicios dentro de una compañía (o una economía) en cada año para el que se desea el análisis de insumo producto	**investigaciones de mercado**		
$50 000 +	**$100 000**	**$1000**	**$1500**
No **6 meses +**	**No** **6 meses +**	**Sí** **Un mes +**	**Sí** **Un mes +**

TABLA 6-9
Datos de demanda

Número de folletos pedidos	*Número ¿le dispositivos automáticos vendidos*	*Número de folletos pedidos*	*Número de dispositivos automáticos vendidos*
200	**18**	**212**	**19**
86	**10**	**150**	**15**
57	**3**	**114**	**12**
340	**32**	**88**	**11**
120	**14**	**136**	**12**

El desarrollo del modelo para pronosticar las ventas del dispositivo automático se muestra en la tabla 6-10. El modelo de pronóstico que resulta es el siguiente.

$$\text{VENTAS} = 1.22 + 0.089*\text{FOLLETOS}$$

Si les pidieran 300 folletos en un área dada, se pronosticaría que la venta es de 28 dispositivos.

$$\text{VENTAS} = 1.22 + 0.089*300 = 28$$

EJERCICIO DE PRÁCTICA 6-5

La Kirby Publications piensa que el número de libros vendidos durante la primera semana que sigue a la publicación puede usarse para ayudar a pronosticar el número de copias que se venderán durante el primer año de la publicación del libro. Con los datos que se muestran en la tabla 6-11, aplíquese el análisis de regresión para desarrollar un modelo de pronósticos apropiado.

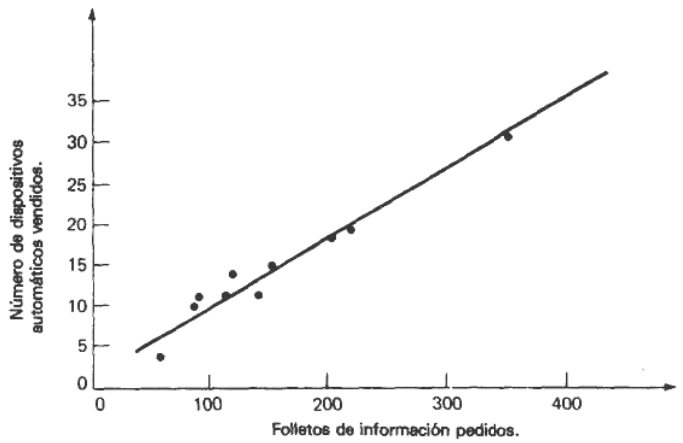


FIGURA 6-9
Diagrama de dispersión para datos de la demanda

TABLA 6-10
Desarrollo del modelo de regresión para pronosticar ventas de dispositivos automáticos

Número de folletos requeridos x	*Número de dispositivos automáticos vendidos* x	xy	x^2
200	18	3 600	40 000
86	10	860	7 396
57	3	171	3 249
340	32	10 880	115 600
120	14	1 680	14 400
212	19	4 028	44,944
150	15	2 250	22 500
114	12	1 368	12 996
88	11	968	7 744
136	12	1 632	18 496
$\Sigma x = 1\ 503$	$\Sigma y = 146$	Σxy 27 437	$\Sigma x^2 = 287\ 325$

$$b = \frac{N\Sigma yx - \Sigma x\Sigma y}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = \frac{10(27\ 437) - 1503(146)}{10(287\ 325) - (1503)^2} = 0.089$$

$$a = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{b\Sigma x}{N} = \frac{146}{10} - \frac{0.089(1503)}{10} = 1.22$$

TABLA 6-11
Número de libros vendidos

Primera semana	*Primer año*	*Primera semana*	*Primer año*
3000	18 000	15 000	9000
1500	6000	2800	14 000
14 000	64 000	2000	8000
5000	30 000	3 800	22 000

Modelos econométricos

Los *modelos econométricos* los utilizaron por primera vez organizaciones como la Brookings Institute y la Wharton School of Business, para pronosticar el comportamiento de la economía de Estados Unidos. Con modelos de este tipo es posible pronosticar el efecto de las distintas políticas y condiciones económicas. Estos modelos contienen hasta miles de ecuaciones que describen el sistema económico. Emplean variables como gastos federales y programas de trabajo para pronosticar variables como la tasa, de desempleo. En la actualidad, estos modelos desempeñan un papel importante al dar forma a las políticas económicas nacionales.

Muchas empresas de negocios grandes operan ahora con modelos econométricos. Sin embargo, el foco de atención más importante está en la compañía más que en la economía nacional. Aun así, podrían ser necesarios algunos datos nacionales, pero en muchos casos éstos pueden obtener-

se de compañías privadas que operan modelos econométricos nacionales y venden sus pronósticos.

Como ejemplo de un modelo econométrico típico, considérese el que se muestra a continuación.[3]

$$\text{VENTAS} = a + bP + \text{cPUB} + \text{dPIB} + e\text{ID} + fP_c + \mu$$

Esta ecuación indica una relación lineal entre la cantidad vendida de un producto dado (VENTAS) y el precio (P), los gastos de publicidad (PUB), el producto interno bruto (PIB), los gastos de investigación y desarrollo (ID), el precio del primer competidor de la firma (P_c) y un término de error aleatorio (μ).

Es característico, en el nivel organizacional, que los modelos econométricos formen parte de un modelo más grande de planeación corporativa. Además de los modelos econométricos, un modelo corporativo contiene muchas ecuaciones que son de naturaleza contable. Para ilustrar, un modelo econométrico sobre el número de unidades de un artículo que puede venderse. Este dato después puede incluirse en el siguiente modelo contable para pronosticar los costos directos de producción.

$$\left(\begin{array}{c}\text{Costos}\\ \text{directos de}\\ \text{producción}\end{array}\right) = \left[\left(\begin{array}{c}\text{Costos de}\\ \text{producción}\\ \text{por unidad}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{Costos de}\\ \text{materia prima}\\ \text{por unidad}\end{array}\right)\right] \left(\begin{array}{c}\text{ventas en}\\ \text{unidades}\end{array}\right)$$

Muy probablemente este pronóstico se incluya en otra ecuación. Los resultados finales de todos estos pronósticos son los estados pro forma de los ingresos, las hojas de balance, los recursos, los estados de manejo de fondos y otros semejantes.

Desde el punto de vista de construcción de modelos, los modelos econométricos son bastante complejos y quedan fuera del alcance de este libro. En general emplean en su desarrollo el análisis de regresión, pero ocurren complicaciones debidas a la suposición de que las variables independientes son independientes. Con frecuencia éste no es el caso en situaciones del modelado econométrico. Puede darse como ejemplo cuando estas variables incluyen el precio de venta, las ventas, los gastos de publicidad, los costos de producción y los costos de venta.[4] Es obvio que las variables son interdependientes. Cuando esta interdependencia es fuerte, no se recomienda el análisis de regresión, sino un sistema de ecuaciones simultáneas que maneje de manera directa esta interdependencia. Para el ejemplo anterior podría tenerse.[5]

$$\begin{aligned}\text{Ventas} &= f(\text{PIB, precio, publicidad})\\ \text{Costos} &= f(\text{producción y niveles de inventario})\\ \text{Gastos de ventas} &= f(\text{publicidad, otros gastos de ventas})\\ \text{Precio} &= f(\text{costo, gastos de ventas})\end{aligned}$$

[3] Thomas H. Naylor y Daniel R. Gattis, "Corporate Planning Models",*California Mana gement Review* (verano de 1976), p. 76.

[4] Steven C. Wheelwright y Spyros Makridakis, *Forecasting Methods for Management* (New York: Wiley, 1974), pp. 135-140.

[5] Ibíd., p. 138.

TABLA 6-12

Métodos básicos de análisis cualitativo

Técnica	*Método Delphi*	*Investigación de mercado*
Descripción	Se interroga a un panel de expertos mediante una serie de cuestionarios en que las respuestas a uno de ellos se usan para elaborar el siguiente cuestionario. Cualquier información que conocen unos expertos y no otros, se pasa a estos últimos, lo cual permite que todos tengan acceso a la información global para el pronóstico. Esta técnica elimina *el* efecto de seguir la corriente de la opinión de la mayoría.	Un procedimiento sistemático, formal y profundo para obtener y probar las hipótesis sobre los mercados reales.
Exactitud		
A corto plazo (0-3 meses)	De regular a muy buena	Excelente
A mediano plazo (3 meses — 2 años)	De regular a muy buena	Buena
A largo plazo (2 años y más)		De regular a buena
Identificación del punto de cambio		De regular a muy buena
Aplicación típica	Pronósticos de ventas a largo plazo y de nuevos productos, pronósticos de márgenes	Pronósticos de ventas a largo plazo y de nuevos productos, pronósticos de márgenes
Datos requeridos	Un coordinador prepara una serie de cuestionarios editante y consolidando las respuestas	Un mínimo de dos conjuntos de informes a través del tiempo. Una colección considerable de datos de mercado a partir de cuestionarios, investigaciones y análisis de series de tiempo, serán necesarios para las variables de mercado
Costo del pronóstico con una computadora	$2 000 +	$5 000+
¿Es posible el cálculo sin computadora?	Sí	Sí
Tiempo requerido para desarrollar una aplicación y obtener los pronósticos	2 meses-i-	3 meses +

Fuente: John C. Chambers, Satinder K. Mullick y Donald D. Smith, "How to Choose the Right ForecastingTechnique", *Harvard Business Review, val.* 49, No. 4 (julio-agosto de 1971), pp. 55-64. Copyrigth © 1971 por el President and Fellows of Harvard College; todos los derechos reservados.

Debido a estas y otras complejidades, son las grandes organizaciones las que emplean modelos econométricos, ya que cuentan con los recursos de personal y financieros que pueden dedicarse a desarrollar modelos de pronósticos sofisticados.

MÉTODOS CUALITATIVOS

Desde la década de 1950 el uso de.los métodos *cualitativos* de pronósticos se ha popularizado. Estos métodos se utilizan más cuando no existe un conjunto de datos históricos útiles en los cuales pueda basarse un análisis. Los métodos cualitativos confían principalmente en el juicio de los expertos y tienden a ser menos precisos que los métodos cuantitativos.

Acuerdo de panel	*Pronóstico visionario*	*Analogía histórica*
Se basa en la suposición de que varios expertos pueden llegar a un mejor pronóstico que una sola persona. No existe secreto y se fomenta la comunicación. A veces los pronósticos tienen influencia de factores sociales y pueden no reflejar un consenso	**Una profecía que usa ideas y juicio personales, y cuando es posible hechos sobre los diferentes escenarios del futuro. Se caracteriza por trabajo subjetivo dse adivinanza e imaginación, los métodos usados no son científicos.**	**Un análisis comparativo de la introducción y la expansión de nuevos productos similares; basa el pronóstico en patrones de similitud.**
De pobre a regular	**Pobre**	**Pobre**
Pobre		**De buena a regular**
Pronósticos de ventas a largo plazo y de nuevos productos, pronósticos de márgenes. La información de un panel de expertos se presenta abiertamente en una junta para llegar a un pronóstico por acuerdo general. El mínimo de dos conjuntos de informes a través del tiempo.	**Pronósticos de ventas a largo plazo y de nuevos productos, pronósticos de márgenes. Un conjunto de escenarios posibles sobre el futuro preparado por unos cuantos expertos a la luz de eventos pasados.**	**De buena a regular Pronósticos de ventas a largo plazo y de nuevos productos, pronósticos de márgenes Varios años de historia de uno o más productos.**
$1000 +	**$100 +**	**$1000 +**
Sí	**Sí**	**Sí**
2 semanas +	**1 semana +**	**1 mes +**

En general, los métodos cuantitativos sirven para pronósticos a largo plazo cuando es importante identificar *cuándo o cuáles* cambios importantes ocurrirán. Por ejemplo, una compañía en el campo farmacéutico puede preguntarse cuándo se podría poner en marcha un programa nacional de seguros médicos y qué efectos tendría para la compañía.

Se usan también otros nombres para los métodos cualitativos de pronósticos. *Pronósticos tecnológicos* es un término que se emplea con frecuencia cuando se trata de pronosticar los cambios en tecnología. Por ejemplo, el pronosticar los efectos de un gran desarrollo en energía de fusión sería una aplicación de los pronósticos tecnológicos. Cuando los cambios incluyen las áreas social, política, de medio ambiente o legal, muchas veces se usa el término *pronósticos sociales.* Por ejemplo, el análisis de los efectos que

traería la legalización de la venta de marihuana involucraría un pronóstico social.

Los pronósticos cualitativos son cada vez más importantes y comienzan a formar parte de los esfuerzos de planeación a largo plazo de muchas compañías por varias razones. Primero, los cambios ocurren mucho más rápidamente que antes. Segundo, el tiempo que transcurre entre estos cambios y las repercusiones en las organizaciones se vuelve cada vez más corto. Por lo tanto, muchas compañías se están dando cuenta de que es más difícil *reaccionar* y se están interesando en los pronósticos cualitativos para poder *preactuar* en respuesta a los cambios venideros.

Los métodos de pronósticos cualitativos no están tan bien desarrollados como los cuantitativos. Su uso en general requiere una considerable flexibilidad para satisfacer las necesidades de la situación. Estos métodos tienden a ser costosos, ya que muchas veces requieren la opinión de un experto. Como resultado, los que los usan con más frecuencia son el gobierno y las grandes organizaciones.

Existen muchos métodos de pronósticos cualitativos. En la tabla 6-12 se resumen algunos de ellos. Aquí se describirá el método Delphi.

El método Delphi

Un método de pronóstico cualitativo muy popular es el *método Delphi.* Fue desarrollado por Olaf Helmer y otros en la RAND Corporation a mediados de la década de 1960. Utiliza un grupo de expertos, que se mantienen aislados con objeto de minimizar el efecto de presión social y otros aspectos del comportamiento de pequeños grupos. Los expertos pueden ser empleados de la organización o especialistas externos. Igual que en todos los métodos de pronósticos cualitativos, se hace hincapié en qué cambios se deben esperar y en qué tiempo. Una compañía típica podría estar preocupada con preguntas como éstas: (1) ¿Cuándo escasearán los recursos clave? (2) ¿Qué nuevas técnicas de producción estarán disponibles? (3) ¿Qué nuevos productos se necesitarán?

No existe una estructura rígida para aplicar el método Delphi, pero es usual que se siga la siguiente secuencia:

1 Se pone uno en contacto con los expertos conocedores y se les pide que participen en panel.
2 Se manda un cuestionario a los miembros del panel y se les pide que den su opinión en los temas de interés.
3 Se analizan las respuestas y se identifican las áreas en que están de acuerdo y en las que defieren.
4 Se manda el análisis resumido de todas las respuestas a los miembros del panel, se les pide que llenen de nuevo el cuestionario y den sus razones respecto de las opiniones en que difieren.
5 Se repite el proceso hasta que se estabilizan las respuestas.

El método Delphi no requiere que se llegue a un consenso. Más bien, el objetivo es obtener un número de opiniones que se haya reducido por la

aplicación del método Delphi. Esta información sirve después para formular planes a largo plazo.

El método Delphi tiene limitaciones. Se ha criticado por su poca seguridad, demasiada sensibilidad de los resultados a la ambigüedad de las preguntas, dificultad para establecer el grado de experiencia de los miembros del panel, la imposibilidad de que tome en cuenta lo inesperado y por los grandes retrasos entre las repeticiones del proceso. A pesar de estas limitaciones, su uso actual que le dan las organizaciones sugiere que con frecuencia su potencial excede a sus limitaciones.

EXPERIENCIAS DEL MUNDO REAL

Se ha explorado una amplia variedad de métodos de pronósticos. Para finalizar este capítulo, se consideran algunas aplicaciones de estos métodos al mundo real. De manera específica, se describe el desarrollo de un modelo de promedios móviles en la American Can Company, un modelado econométrico de las condiciones del mundo en el futuro y el Proyecto Aware que empleó el método Delphi.

American Can Company

Los modelos de pronósticos no tienen que ser complejos para ser útiles; de hecho, los modelos sencillos a veces son más valiosos que los complicados. La American Can Company desarrolló un modelo de pronósticos a corto plazo que pone de manifiesto este y otros puntos.[6]

Se ha venido usando un método complicado de pronósticos en la división de empaques de la American Can Company. Por desgracia, una larga historia de grandes errores de pronóstico combinada con una complejidad del modelo, que no permite que un obrero lo entienda, ha traído como resultado que se deje de usar. Al no conocer las suposiciones básicas y la lógica que hay detrás del modelo, los usuarios dejaron de confiar en él; no tenían idea de *cómo* obtenía el modelo sus pronósticos. Vale la pena establecer la razón principal de los errores en los pronósticos. Pocos clientes compraban el grueso de las ventas en varios grupos de productos de los que se pronosticaron. Mientras que el personal clave de ventas sabía, con frecuencia por adelantado, el programa de órdenes de estos clientes, esta información no se consideraba en el modelo. Esto señala que, aun con métodos complicados de pronósticos, el juicio subjetivo desempeña un papel crítico y debe incluirse en el modelo o aplicarse cuando se interpretan los resultados del modelo.

Con todos estos antecedentes, el grupo de ciencias de la administración tenía la responsabilidad de desarrollar un modelo que pudiera aplicarse para evaluar las estimaciones de ventas que se recibían del departamento correspondiente, para proporcionar pronósticos precisos similares a los que daba el personal de ventas después del análisis de los datos y de las es-

[6] Cari Kallina, "Development and Implementation of a Simple Short Range Forecasting Model —A Case Study", *Interfaces* (mayo de 1978), pp. 32-41.

timaciones, que las partes básicas del modelo fueran comprensibles para cualquier empleado y que se desarrollara rápido y no fuera muy costoso. En respuesta a estos criterios, se desarrolló un modelo de promedios móviles con ajustes de tendencia y estacionales. Las pruebas del modelo den mostraron que tenía un potencial predictivo similar al del departamento de ventas. Con el paso del tiempo, la confianza en el modelo creció, lo cual permitió al personal de ventas dedicar más tiempo a mejorar sus actividades en lugar de trabajar en pronósticos.

The LImIts to Growth

Sin duda, los pronósticos de mayor controversia en los últimos tiempos son; los que se publicaron en *The Limite to Growth.*[7] Este libro dio a conocer los resultados de un estudio patrocinado por el Club de Roma para pronosticar las condiciones futuras del mundo. Se emplearon técnicas de modelado econométrico a nivel mundial y se identificaron, para su estudio, cinco subsistemas: (1) población, (2) inversión de capital, (3) recursos naturales, (4) agricultura y (5) contaminación. Con base en este trabajo de modelado, se vaticinó para la humanidad y el planeta tierra un futuro bastante gris. Esto se hace patente en una de las conclusiones.

> Si las tendencias de crecimiento actuales en la población mundial, la industrialización, la contaminación, la producción de alimentos y el uso de los recursos continúa sin cambio, los límites del crecimiento de este planeta se alcanzarán en algún momento durante los próximos cien años. El resultado más probable será una declinación más bien repentina e incontrolable tanto en la capacidad de población como en la industrial.[8]

Las conclusiones a las que se llegó en *The Limite to Growth* no se han aceptado en forma unánime. Las críticas han variado desde consideraciones técnicas de modelado hasta objeciones a algunas suposiciones en que se basa la construcción del modelo. Independientemente de las opiniones personales en cuanto a su exactitud, las proyecciones han fomentado útiles debates sobre cómo debe manejarse el crecimiento.

Proyecto Aware

Cuatro grandes compañías —Du Pont, Scott Paper, Lever Bros, y Monsanto— contrataron a un grupo de expertos de California, el Instituto for the Future, para predecir cambios a largo plazo en el ámbito social, económico y tecnológico.[9] El Institute for the Future fue fundado hace varios años por un grupo de científicos de la RAND Corporation y del Stanfor Reserach Institute, y es uno de los principales usuarios del método Delphi. El estudio para las cuatro compañías, llamado Proyecto Aware, era sólo uno de los muchos estudios realizados para el gobierno y la industria.

[7] **Dennis L. Meadows y otros., *The Limits to Growth* (New York: Universe, 1972).**

[8] **Ibíd. p. 23.**

[9] **"A Think Tank That Helps Companies Plan", Business *Week* (agosto 25 de 1973), pp. 70,71.**

TABLA 6-13
Datos del proyecto Aware

Evento	*Probabilidad porcentual*
Muchos pesticidas químicos eliminados	85
Seguro de salud nacional activado	90
El gasto en calidad ambiental excede al *6%* del PIB	00
Hormonas de insectos ampliamente usadas como pesticidas	80
Revisión de la localización de fábricas por la comunidad	80
Entendimiento sustancial de la calvicie y las amuras en la piel	40
Aprobación de un modesto (3%) impuesto al valor agregado	40
Amplio uso de computadoras en la educación elemental	25
Desarrollo de vacunas contra el catarro	20
Prohibición de la entrada de autos en el área central de al menos siete ciudades	20
Prohibición de reactores de reproducción por razones de seguridad	20

Fuente: Institute for the Future.

En la tabla 6-13 se muestran algunos aspectos que se encontraron en este proyecto. Las compañías, que en este caso eran los clientes, eran responsables de identificar los temas que se exploraron. El mayor hincapié se hizo en aislar tendencias y describir las influencias que les dan forma.

Los que estaban asociados con el proyecto Aware no esperaban respuestas definitivas en todas las áreas. J. Kenneth Crower de Monsanto dijo: "Si no hace más que poner de manifiesto una tendencia clave de la que debamos estar concientes, habrá valido la pena".[10] Andrew J. Lipinski, investigador veterano del proyecto Aware, hizo eco a esta afirmación afirmando que "No estábamos buscando en una bola de cristal. El futuro es un medio nebuloso, con cosas que se asoman entre la niebla al movernos a través de ella. Estamos tratando de dibujar el bosquejo de un mapa para que alguien pueda señalar los obstáculos importantes".[11] Los métodos cualitativos de pronósticos, como el método Delphi, pueden ayudar en esta tarea.

RESUMEN

Los pronósticos del futuro son datos importantes para la toma de decisiones administrativas. Existen muchos métodos de pronósticos debido a la amplia variedad de pronósticos que se requieren en una organización típica. Los métodos de series de tiempo generan pronósticos empleando los datos históricos para la variable que se quiere pronosticar. Los métodos causales consideran factores que afectan o están relacionados con la variable de interés. Los métodos de corto plazo hacen proyecciones de un día a un mes; los métodos a mediano plazo tienen un horizonte de tiempo de un mes a un año, y los métodos a largo plazo ven a más de un año en el

[10] **Ibíd. p. 70.**
[11] **Ibíd. p. 71.**

futuro. Los métodos cuantitativos de pronósticos usan modelos matemáticos en su funcionamiento, los métodos cualitativos confían fuertemente en el juicio subjetivo de los expertos. La selección de un método de pronósticos depende de factores como el conocimiento de las técnicas disponibles, el horizonte de tiempo para el pronóstico, lo apropiado que resulte confiar en datos históricos o en el juicio subjetivo, el patrón que exhiben los datos, las consideraciones sobre beneficio/costo y en algunos casos la disponibilidad de computadoras y paquetes de programas.

Los datos de series de tiempo pueden contener varias fuentes de variación: tendencia, estacional, cíclica y aleatoria. Los distintos métodos de series de tiempo difieren por su capacidad para tomar en cuenta estas fuentes de variación. Un enfoque gráfico de una idea visual del patrón de la serie de tiempo, pero requiere que el analista extrapole subjetivamente más allá de los datos. A pesar de la falta de estructura, el método gráfico es una herramienta útil para pronósticos. Un promedio móvil toma las últimas *N* observaciones de la variable que se pronostica y calcula una media. Esta media se usa como el pronóstico para el siguiente periodo. El modelo básico de promedios móviles tiene su mejor aplicación en pronósticos a corto plazo, ya que no intenta identificar los patrones para largos periodos que puedan existir en los datos. Lo mismo es cierto para el modelo básico de suavizamiento exponencial. Sin embargo, cada vez más se prefiere éste, puesto que sólo requiere la observación más reciente, la constante de suavizado y el pronóstico anterior para generar un nuevo pronóstico. El análisis de tendencia es útil para pronósticos a largo plazo, pues identifica las tendencias que existen. En los modelos de este tipo, el "tiempo" se usa como variable independiente y la variable que se quiere pronosticar es la variable dependiente.

Los métodos causales de pronósticos incluyen técnicas tanto cuantitativas como cualitativas. El análisis de regresión y los modelos econométricos son dos técnicas cuantitativas importantes. El análisis de regresión usa una o varias variables independientes que ayudan a pronosticar los valores de la variable independiente. El análisis de regresión puede ser simple o múltiple y lineal o curvilíneo según el número de variables independientes que se usen y de la linealidad de la relación entre las variables dependiente e independientes. Los modelos econométricos describen un sistema económico a nivel nacional u organizacional. Cuando se usan a nivel de la organización, los modelos identifican las condiciones en el medio exterior que afectan a la organización. También, a este nivel, casi siempre son parte de un modelo más grande de planeación corporativa.

Desde la década de 1950 se han desarrollado muchos métodos cualitativos de pronósticos. Con frecuencia se les llama métodos de pronósticos tecnológicos o sociales según que intenten identificar cambios en el ámbito tecnológico o en el social. Los métodos tienden a funcionar principalmente a partir del juicio subjetivo que los expertos proporcionan, son menos precisos que las técnicas cuantitativas y se usan para pronósticos a largo plazo. El más conocido de los métodos cualitativos es el método Delphi. Usa un panel de expertos que responden a un cuestionario muchas veces iterativamente con

retroalimentación resumida después de cada vez. Intenta proporcionar un rango más reducido de opiniones para el tema o temas que se estudian.

Muchas organizaciones usan modelos de pronósticos. Se describe un modelo de promedios móviles desarrollado por la American Can Com-pany, los pronósticos del futuro publicados en *The Limits to Growth* y el proyecto Aware patrocinado por Du Pont. Scott Paper, Lever Bros, y Monsanto y llevado a cabo por el Institute for the Future.

EJERCICIOS

Selección de un modelo apropiado de pronósticos

6-1 Sugiérase un método apropiado para pronosticar lo siguiente:

a La demanda de vajillas para el próximo mes en la tienda de departamentos Johnson's

b El número de reclamaciones por seguro de automóvil registradas durante el próximo año en la aseguradora West Coast.

c Las ventas trimestrales de cerveza para el siguiente año en 5th Quarter, que es un bar de estudiantes en la zona universitaria.

d Cuándo habrá una estación espacial en la luna.

Métodos de análisis de series de tiempo

6-2 Clearview tiene una cámara de comercio muy activa. A continuación se muestra cómo han aumentado los fondos operativos desde 1968.

Año	*Fondos de operación*	*Año*	*Fondos de operación*
1968	$14 000	1975	$26 000
1969	15 000	1975	30 000
1970	16 000	1977	34 000
1971	17 000	1978	40 000
1972	18 000	1979	50 000
1973	21000	1980	65 000
1974	23 000		

El número de horas de mano de obra voluntarias también ha ido creciendo con el tiempo.

Año	*Horas de mano de obra*
1976	30 000
1977	32 000
1978	34 000
1979	35 000
1980	38 500

Con el método gráfico pronostíquese la disponibilidad de fondos operativos y de horas de mano de obra para 1981 y 1982.

6-3 El Essie's Cafe ofrece barbacoa de cordero en su menú del viernes. Este platillo tan raro ha sido pedido por 75, 64, 68 y 70 clientes durante las últimas cuatro semanas. Prepárese un pronóstico para la demanda de la próxima semana usando un promedio móvil de cuatro términos.

6-4 En seguida se muestra el precio por onza de plata en el primer día de transacciones de cada mes. Con un promedio móvil de 10 términos, pronostíquese el precio de la plata para el siguiente mes.

Mes	*Precio de la plata por onza*	*Mes*	*Precio de la plata por onza*
1	**$4.23**	**7**	**$4.46**
2	**4.27**	**8**	**4.67**
3	**4.21**	**9**	**4.95**
4	**3.94**	**10**	**4.54**
5	**4.21**	**11**	**4.15**
6	**4.08**		

6-5 Precisión Calculators quiere pronosticar la demanda del próximo mes para su calculadora modelo 127. Abajo se muestra la demanda durante los últimos seis meses. Con un promedio móvil de tres términos, pronostíquese la demanda en julio del modelo 127,

Mes	*Demanda en miles de unidades*
Enero	**127**
Febrero	**114**
Marzo	**130**
Abril	**142**
Mayo	**135**
Junio	**140**

6-6 Los promedios móviles se usan en el análisis técnico de los precios de bienes. Los precios reales y los promedios móviles se presentan en la gráfica. Cuando el precio del bien intersecta el promedio móvil, éste es el momento de comprar bien. Cuando el precio del bien es menor que el promedio móvil, esto indica que debe venderse. A continuación se da una lista de precios de frijol de soya y un promedio móvil de cinco términos para un periodo. Suponga el lector que ya compró un contrato de frijol de soya, indique en qué punto vendería su contrato o compraría más.

Día	Precio centavos/medida	Promedio móvil	Día	Precio centavos/medida	Promedio móvil
1	690		18	709	708.6
2	691		19	710	708.6
3	692		20	709	708.8
4	692		21	710	709.2
5	693	691.6	22	710	709.4
6	693	692	23	711	709.8
7	696	693	24	709	709.6
8	698	694.2	25	702	708.2
9	700	697	26	700	706.2
10	708	700	27	702	704.6
11	706	702.6	28	702	702.8
12	706	704.6	29	701	701.2
13	708	706.6	30	694	699.6
14	710	707.4	31	690	697.6
15	708	707.4	32	686	694.4
16	708	707.8	33	682	690.6
17	709	708.4			

6-7 El número de toneladas de bienes enlatados que recibió un centro de distribución de una cadena de abarrotes el mes pasado fue 560. La cantidad pronosticada era 785. La compañía usa un modelo de suavizamiento exponencial con una constante de suavizado de 0.6 para desarrollar- sus pronósticos. ¿Cuál será el pronóstico de la compañía para el próximo mes?

6-8 El número de accidentes de trabajo en Simkin Electronics durante el mes pasado fue como sigue:

Mes	Número de accidentes
Abril	20
Mayo	36
Junio	24
Julio	30

Pronostíquese el número de accidentes de trabajo en agosto con un modelo de suavizamiento exponencial con una constante de suavizado de 0.1.

6-9 La asistencia durante los últimos seis días en el teatro Roxy ha sido 120,130,127,115,105 y 100. Con un modelo de suavizamiento exponencial con un alfa de 0.7, pronostíquese la asistencia para el siguiente día.

6-10 La demanda del libro *Accounting 399, Selected Topics in Accounting* varía según el maestro. Los profesores Goodguy y Toughtime se alternan cada año para impartir el curso. En seguida se dan los datos de inscripción al curso.

Año	*Instructor*	*Inscripción*
1976	Coodguy	33
1977	Toughtime	12
1978	Goodguy	40
1979	Toughtime	14
1980	Coodguy	38

Con un promedio móvil de tres términos, pronostíquese la demanda del libro en 1982 cuando el profesor Goodguy imparte el curso. Úsese un modelo de suavizamiento exponencial con una constante de suavizado de 0.5 para pronosticar la inscripción de 1981 cuando es el profesor Toughtime quien imparte el curso.

6-11 La demanda semanal de préstamos para automóviles en el Washingt ton Federal Credit Union en las últimas seis semanas se muestra en seguida.

Semana	*Demanda de préstamos para automóvil*	*Semana*	*Demanda de préstamos para automóvil*
1 2	20	4 5	24
3	18	6	28
	22		23

Determínese si una constante de suavizado de 0.1, de 0.3 o de 0.5 proporciona el mejor pronóstico si se emplea el criterio de minimizar la desviación media absoluta entre el pronóstico y la demanda red.

6-12 La Donut Hut es una nueva cadena de comida rápida que se especializa en donas y café. En los pasados 12 meses la cadena ha realizado un crecimiento estable abriendo más cafeterías, y la aceptación por parte de los clientes ha aumentado. En seguida se muestran las ventas mensuales de donas desde que la cadena comenzó a operar. Con ecuaciones de mínimos cuadrados, desarróllese un modelo de tendencia para pronosticar las ventas mensuales de donas en el Donut Hut. ¿Cuál debe ser el pronóstico de ventas para los meses 11 y 14?

Mes	*Venta de donas, en 1 000 por mes*	*Mes*	*Venta de donas, en 1 000 por mes*
1	21.0	7	35.0
2	23.4	8	36.2
3	26.1	9	37.5
4	28.0	10	40.0
5	30.4	11	42.7
6	31.6	12	44.8

6-13 Carter's Sporting Goods vende raquetas de tenis. La demanda de raquetas ha aumentado de manera considerable durante los últimos tres años como se puede observar en seguida.

Trimestre	*Demanda de raquetas*	*Trimestre*	*Demanda de raquetas*
Invierno 1978	70	Verano 1979	180
Primavera 1978	150	Otoño	170
Verano 1978	130	Invierno 1980	
Otoño 1978	130	Primavera 1980	
Invierno 1979	100	Verano 1980	
Primavera 1979	180	Otoño 1980	

Con el análisis de tendencia con ajustes estacionales, pronostíquese la demanda de raquetas de tenis para los siguientes cuatro trimestres.

Métodos de análisis causal

6-14 Los requerimientos de personal en el centro de salud de la universidad del estado se basan en los pronósticos del número de visitas de los estudiantes. Éstas a su vez se relacionan con la inscripción a la universidad. En seguida se muestran los datos sobre las visitas de estudiantes y la inscripción a la universidad. Aplíquese el análisis de regresión lineal simple para desarrollar un modelo de pronósticos para el número de visitas. Si la inscripción para el año próximo es de 22 000, ¿cuántas visitas de estudiantes deben esperarse?

Inscripción a la universidad	*Número de visitas de estudiantes*
12 000	48 000
16 000	62 000
18 000	75 000
20 000	85 000

6-15 La Madison Chamber of Commerce quiere pronosticar sus ingresos debidos a las cuotas de sus miembros en el año de 1981. Los datos que se muestran revelan cómo han variado los ingresos con el número de licencias para los negocios. Suponiendo que la estructura de cuotas y otros factores permanecieron constantes durante el tiempo en que se registraron los datos, úsese el análisis de regresión para pronosticar los ingresos en 1981 cuando se estima que habrá 30 000 licencias de negocios.

Número de licencias	*Ingresos por pagos de membresía*
15 000	$390 000
20 000	500 000
22 000	550 000
25 000	620 000

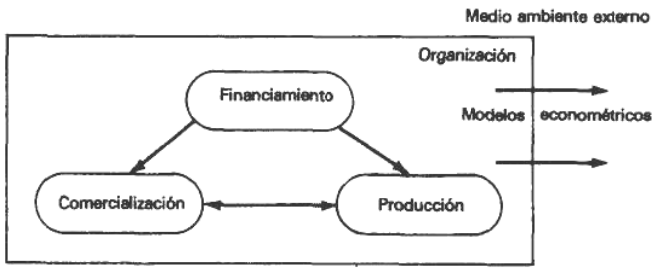
6-16 El director de los estudios de postgrado en administración en una universidad del estado tiene la responsabilidad de escudriñar las solicitudes de admisión al programa de maestría. Para tener una mejor base para llevar a cabo sus responsabilidades, el director ha decidido realizar un análisis de regresión múltiple con objeto de identificar las variables que serán útiles para predecir el éxito.

a ¿Qué se debe usar como variable dependiente?

b ¿Qué variables independientes deben considerarse para incluirse en el análisis?

c ¿En dónde deben obtenerse los datos para efectuar el estudio?

6-17 Un número cada vez más grande de organizaciones opera con modelos complicados de planeación corporativa. Con mucha frecuencia, estos modelos contienen otros modelos integrados para los subsistemas de producción, comercialización y financiamiento. Por supuesto, la relación entre estos modelos es importante, pero los pronósticos del medio ambiente externo también son necesarios y muchas veces se usan los modelos econométricos para proporcionar estos pronósticos. El diagrama que se muestra en seguida ilustra estas relaciones. Para cada uno de los subsistemas, indíquese qué información sobre el medio ambiente pueden proporcionar los modelos econométricos.



Métodos cualitativos de análisis

6-18 Selecciónese un panel entre amistades que les guste el basquetbol para realizar un estudio Delphi. Prepárese un cuestionario que explore: (1) las marcas del equipo de basquetbol de la escuela para el año próximo, (2) el resultado de varios juegos clave, (3) el campeonato de la conferencia a la que pertenece y (4) el campeonato de la conferencia nacional. Hágase que el panel responda al cuestionario y resúmanse los resultados. Proporciónense los resultados resumidos al panel y pídase que contesten de nuevo el cuestionario. Esta vez háganse notar las razones de todas las opiniones que más se distinguen. Repítase este procedimiento hasta que las respuestas se estabilicen.

ESTUDIO DE UN CASO: UNITED BUYERS SERVICES

La United Buyers Services (UBS) es una empresa mediana de pedidos por correo localizada en el medio oeste. Sus miembros pagan una cuota inicial

de $5 que les permite comprar, a precios de descuento, los artículos anunciados en el catálogo de UBS. Para comprar un artículo, un miembro sólo necesita llenar una forma de orden por correo y mandarla junto con un cheque, una orden de pago o el número de su tarjeta de crédito. AI paso de los años, UBS ha crecido sustancialmente como resultado de una promoción eficaz, mercancía de alta calidad, precios de descuento y servicio rápido.

Chester Good, fundador y presidente de UBS, siempre ha estado orgulloso de la capacidad de la compañía para satisfacer una orden con rapidez. Bajo las mejores condiciones, una orden que se recibe en la mañana puede salir la tarde siguiente. Este tipo de respuestas han ayudado a UBS a competir con otras empresas del ramo y con tiendas de descuento.

Igual que otras firmas en la industria, UBS tiene que estar muy consciente de los costos. El vender a precios de descuento deja muy poca oportunidad para "extras en la organización". En consecuencia, el personal de la oficina siempre se han entrenado para realizar varios trabajos: procesar órdenes, llevar el registro de inventario, mandar por correo los catálogos, etc. Esta flexibilidad ha ayudado a asegurar que las tareas necesarias se realicen con prontitud y que el personal de oficina se utilice en toda su capacidad. Sin embargo, por desgracia, al crecer la organización se ha vuelto más difícil programar al personal de la manera más eficaz. Antes, todo el personal de oficina se encontraba localizado en un salón grande, ahora se encuentran separados en departamentos en todo el edificio. Esto ha hecho más difícil movilizar a la gente con agilidad.

Chester Good ha estado examinando un informe especial preparado por Arnold Adams, su gerente de operaciones. Este informe se prepara una vez al año; muestra el tiempo promedio que UBS tarda en satisfacer una orden. La parte más importante de este informe se muestra en la tabla 1. Ahí puede observarse por qué Mr. Good no está contento. El tiempo para satisfacer una orden ha aumentado en forma dramática este año.

"Arnold. ¿qué pasa aquí? —pregunta M. Good—. Simplemente no podemos vivir con este tiempo de respuesta tan grande para las órdenes de los clientes. |Algo tiene que hacerse!"

Aun antes de presentar el informe de este año, Arnold sabía que no se estaban satisfaciendo las órdenes tan rápido como antes, pero ni siquiera él había sospechado que las cosas andaban tan mal. Esto ocasionó que Arnold recordara una conversación que sostuvo el otro día con Susan Brown,

TABLA 1
Tiempo promedio para satisfacer una orden

Año	*Tiempo promedio*
1977	2.7 *días*
1978	2.9
1979	3.4
1980	5.1

TABLA 2
Datos sobre el peso del correo y el número de órdenes recibidas

Teso del correo, libras	*Número de órdenes*	*Peso del correo, libras*	*Número de órdenes*
70.4	**255**	**96.3**	**356**
20.2	**65**	**93.5**	**368**
50.1	**198**	**24.0**	**84**
55.7	**215**	**53.1**	**182**
40.6	**150**	**10.5**	22
7.2	**30**	**58.9**	**208**

su gerente de procesamiento de órdenes. Susan dijo que con el crecimiento de la organización era importante crear programas de trabajo tan pronto como fuera posible para que el personal supiera cuáles eran sus tareas para el día. Estaba sucediendo que había un marcado aumento en la cantidad de personal que tenía relativamente poco trabajo en un departamento mientras que otro departamento estaba, por lo menos a ratos, ahogado en trabajo. Aún más, Susan tenía una idea respecto de cómo podían planear mejor los programas de trabajo. "Todo —había dicho ella— se basa en cuantas órdenes se reciben en el correo de la mañana. Nada se mueve hasta que se abre una carta y se registra. Apuesto a que puedo pronosticar cuántas órdenes hay con sólo mirar el tamaño de la bolsa de correo. Dado ese pronóstico podríamos programar mejor a los empleados."

Arnold sabía que esta no era la única área en donde se podían hacer mejoras, pero la idea de Susan le intrigó. Un pronóstico preciso permitirla que se programara el personal de oficina con más rapidez y eficiencia. Pero él quizá podía mejorar la idea de Susan. En lugar de confiar en su juicio subjetivo sobre el tamaño del correo, podían rápidamente *pesar* todas las cartas recibidas y basar el pronóstico en el peso total del correo. En respuesta a esta idea Arnol recabó los datos que se muestran en la tabla *%.*

Preguntas

1 Prepárese un diagrama disperso para los datos que se presentan en la tabla 2. ¿Parece factible predecir el número de órdenes basándose en él peso del correo?

2 Con la regresión lineal simple desarróllese un modelo de pronósticos para el número de órdenes recibidas.

3 ¿Qué pronosticaría el modelo si el correo pesara cero libras? Qué ilustra esto sobre el papel que desempeña el juicio subjetivo al desarrollar pronósticos?

BIBLIOGRAFÍA

Chanbers, John :C. Satinder K, Mullick y Donald D. Smith: "How to Choose the Right Forecasting Technique," *Harvard Business Review* (julio-agosto 1971), pp. 55-64

Wheelwright, Steven C, y Darral Clarke: "Corporate Forecasting Promise and Reality," *Harvard Business Revino* (noviembre-diciembre 1976), pp. 40-42, 47-48, 52, 60, 64, 198.
Wheelwright, Steven C, y Spyros Makridakis: *Forecasting Methods for Management* (New York: Wiley, 1974).

7

SELECCIÓN DE ALTERNATIVAS CON PROGRAMACIÓN LINEAL

¿Cuál es el problema?
¿Cuáles son las alternativas?
¿Qué alternativa es la mejor?

John Dewey

Ningún hombre, sabiéndolo, escoge la peor de dos posibilidades.

Pitágoras

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje
Formulación de las restricciones
  Restricciones de no negatividad
La función objetivo
Tres ejemplos
  Un problema de dieta
  Un problema de mezclas
  Un problema de inversión
  Características comunes de los problemas de programación lineal
  Ejercicio de práctica (7-1)
Solución de problemas de programación lineal
El método gráfico
  Problema de mezcla de productos
  Paso 1 Formulación del problema
  Paso 2 Gráfica de las restricciones
  Paso 3 Obtención de la solución óptima; prueba y error
  Obtención de la solución óptima: líneas de indiferencia
  Resumen del método gráfico
  Ejercicio de práctica (7-2)
  Uso del método gráfico para minimización
  Problema de dieta
  Paso 1 Formulación del problema
  Paso 2 Gráfica de las restricciones
  Paso 3 Localización de la solución óptima
  Ejercicio de práctica (7-3)
Soluciones múltiples

Sin solución Soluciones enteras
Limitaciones del método gráfico
Otros métodos de solución
Solución por computadoras
Dualidad y precios sombra
La simetría de los problemas de programación lineal
Interpretación del problema dual
Precios sombra
Suposiciones y limitaciones de la programación lineal
Linealidad
Determinismo
Una sola función objetivo
Algunas limitaciones prácticas
Aplicaciones de la programación lineal
Asignación de gastos de publicidad
Selección de estilos de camisas
Planeación de la fuerza de trabajo
Experiencias del mundo real
Administración del combustible para aviones
Administración de alimentos
Planeación de la fabricación de triplay
Resumen
Ejercicios
Estudio de un caso: Madison Wire Company
Bibliografía

La programación lineal es un método determinista de análisis para elegir la mejor entre muchas alternativas. Cuando esta mejor alternativa incluye un conjunto coordinado de actividades, se le puede llamar plan o *programa.* La palabra "programa" se usa comúnmente en el medio del entretenimiento en donde, por ejemplo, los conciertos tienen un programa o listado de la música que se va a tocar. No obstante, no limita el término a los aspectos de entretenimiento. Como se usa aquí, programar significa seleccionar la mejor combinación de actividades.

Con frecuencia, seleccionar una alternativa incluye satisfacer varios criterios al mismo tiempo. Por ejemplo, cuando se compra una pieza de pan se tiene el criterio de frescura, tamaño, tipo (blanco, de centeno u otro), costo y rebanado o sin rebanar. Se puede ir un paso más adelante y dividir estos criterios en dos categorías: restricciones y el objetivo. Las *restricciones* son las condiciones que debe satisfacer una solución que está bajo consideración. Si más de una alternativa satisfacen todas las restricciones, el *objetivo* se usa para seleccionar entre todas las alternativas factibles. Cuando se elige una pieza de pan, puede quererse una libra de pan blanco rebanado y hecho no antes del día anterior. Si varias marcas satisfacen estas restricciones, puede aplicarse el objetivo de un costo mínimo y escoger la más barata.

Existen muchos problemas administrativos que se ajustan a este molde de tratar de minimizar o maximizar un objetivo que está sujeto a una lista de restricciones. Un corredor de inversiones, por ejemplo, trata de maximizar el rendimiento sobre los fondos invertidos pero las posibles inversiones están restringidas por las leyes y las políticas bancarias. Un hospital debe planear que las comidas para los pacientes satisfagan ciertas restricciones sobre sabor, propiedades nutritivas, tipo y variedad, al mismo tiempo que se trata de minimizar el costo. Un fabricante, al planear la producción futura, busca un costo mínimo al mismo tiempo cómo cumplir restricciones sobre la demanda del producto, la capacidad de producción, los inventarios, el nivel de empleados y la tecnología. La programación lineal se ha aplicado con éxito a estos y otros problemas.

La programación lineal es una técnica determinista, no incluye probabilidades. El objetivo y cada una de las restricciones se deben expresar como una relación lineal, de ahí el nombre de *programación lineal.* Para las aplicaciones más reales es necesaria una computadora para resolver el problema. A pesar de estas limitaciones, la programación lineal, (PL) es una de las técnicas más poderosas y útiles que se presentan en este texto.

El tema de programación lineal es muy extenso. Forma una de las ramas del campo de la programación matemática, como se muestra en la figura 7-1. En este capítulo se hace incapié en la forma general del problema de programación lineal y en las aplicaciones más comunes. Se presenta el método gráfico de solución, que es aplicable en algunas situaciones limitadas, para ilustrar los conceptos de solución. En el siguiente capítulo se describe una técnica general de solución llamada *método simplex.* En los capítulos 9 y 10 se consideran, ciertas clases especiales de problemas de PL para los cuales se han desarrollado métodos especiales de solución. Al avanzar en el estudio no debe perderse de vista que la meta siempre es la misma: seleccionar la mejor alternativa entre varias.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

En este capítulo, el lector conocerá:

1 Cómo reconocer las situaciones de toma de decisiones que pueden analizarse con programación lineal

2 Cómo formular problemas en términos del modelo general de programación lineal

3 Cómo resolver pequeños problemas de programación lineal con el método gráfico

4 Las tres suposiciones de programación lineal

5 El significado de los siguientes términos:

Programación lineal	Dual
Función objetivo	Método gráfico
Restricción	Método simplex
Línea de indiferencia	Región de soluciones factibles

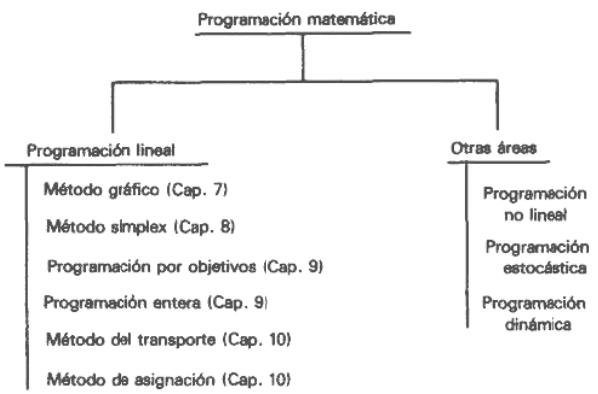


FIGURA 7-1
Campo de la programación matemática

FORMULACIÓN DE LAS RESTRICCIONES

Aunque el lector lo ponga en duda, la parte más difícil de PL es reconocer cuándo ésta puede aplicarse y formular el problema matemáticamente. Una vez hecha esa parte, resolver el problema casi siempre es fácil. Como ayuda para reconocer problemas de programación lineal, se dan ejemplos de los tipos de problemas y se les calificará. Así, se verán aplicaciones a problemas de dieta, de mezclas y de selección de productos.

Para formular un problema en forma matemática, deben expresarse afirmaciones lógicas en términos matemáticos. Esto se realiza cuando se resuelven "problemas hablados" al estudiar un curso de álgebra. Algo muy parecido sucede aquí al formular las restricciones. Por ejemplo, considérese la siguiente afirmación: A usa 3 horas por unidad y B usa 2 horas por unidad. Si deben usarse todas las 100 horas disponibles, la restricción será:

$$3A + 2B = 100$$

Sin embargo, en la mayoría de las situaciones de negocios, no es obligatorio que se usen todos los recursos (en este caso, horas de mano de obra). Más bien la limitación es que se use, *cuando mucho,* lo que se tiene disponible. Para este caso, la afirmación anterior puede escribirse como una desigualdad:

$$3A + 2B \leq 100$$

Para que sea aceptable para PL, cada restricción debe ser una suma de variables con exponente 1. Los cuadrados, las raíces cuadradas, etc., no son aceptables, ni tampoco los productos de variables. Además, la forma estándar para una restricción pone a todas las variables del lado izquierdo y sólo una constante *positiva* o cero del lado derecho. Esto puede requerir algún reacomodo de los términos. Si, por ejemplo, la restricción es que A debe ser por lo menos el doble de B, esto puede escribirse como:

$$A \geq 2B \qquad \text{o} \qquad A - 2B \geq 0$$

Nótese que pueden moverse términos de un lado a otro de la desigualdad como si fuera un signo de igualdad. Pero al multiplicar una desigualdad por –1, el sentido de esta desigualdad se invierte. Puede ser necesario hacer esto para que los coeficientes del lado derecho sean positivos. Por ejemplo, si se quiere que A sea por lo menos tan grande como B – 2, entonces:

$$A \geq B - 2$$

o

$$A - B \geq -2$$

por último

$$B - A \leq 2$$

Una nota final sobre desigualdades: es sencillo convertir una desigualdad en una ecuación. Todo lo que se tiene que hacer es agregar (o restar) una variable extra. Por ejemplo,

$$B - A \leq 2 \quad \text{es lo mismo que} \quad B - A + S = 2$$

en donde S representa la diferencia, o la holgura, entre *B* — A y 2. S se llama *variable de holgura.* Por otro lado, se restaría una *variable de superávit* en el caso siguiente:

$$A - 2B \geq 0 \quad \text{es lo mismo que } A - 2B - S = 0$$

Algunos métodos de solución y la mayoría de los programas de computad dora requieren que todas las desigualdades se conviertan en igualdades. Esto se llama *aumento* y se estudia con más detalle en el capítulo 8.

Restricciones de no negatividad

La metodología de PL requiere que todas las variables sean positivas o cero, es decir, no negativas. Para la mayoría de los problemas esto es real no se querría una solución que diga: prodúzcanse menos dos cajas o contrátense menos cuatro personas. De tener un problema en que se quiera qué una variable sea negativa, existe una forma para que se cumplan las restricciones de no negatividad.[1]

LA FUNCIÓN OBJETIVO

Mientras que no existe un límite en el número de restricciones que puede tener un problema de PL, *sólo puede haber un objetivo.* La forma matemática del objetivo se llama *función objetivo.* Debe llevar consigo el maximizar o minimizar alguna medida numérica. Podría ser maximizar e1 rendimiento, la ganancia, la contribución marginal o los contactos con los clientes. Podría ser minimizar el costo, el número de empleados o el material de desperdicio. Con frecuencia el objetivo es evidente al observar el problema.

Como el valor de la función objetivo no se conoce hasta que se resuelve el problema, se usa la letra Z para representarlo. La función objetivo tendrá, entonces, la forma:

$$\text{Maximizar} \quad Z = \quad 4A + 6B$$

o

$$\text{Minimizar} \quad Z = \quad 2A + 5B$$

TRES EJEMPLOS

Se analizan algunas aplicaciones para ilustrar el formato de los problemas de PL.

[1] **Lo que se haría en este caso es representar la variable como la diferencia de dos variables no negativas. Por ejemplo, puede usarse A — B en lugar de la variable negativa C. Entonces C = A — B, en donde A y B son no negativas.**

Un problema de dieta

El problema de dieta es un problema típico de PL. Como se sabe por experiencia, las dietas se seleccionan para cumplir con una serie de criterios. Cada persona necesita cantidades diarias de calorías, vitaminas, proteínas, minerales y otros. También se tienen preferencias por los tipos de comida y las marcas. La dieta óptima será la que cumpla todas las necesidades a un costo mínimo.

Para simplificar este problema, se supone que existen sólo tres restricciones: la cantidad diaria de tres vitaminas. También se supone que sólo se están considerando dos tipos de alimento. Así, el problema consiste en decidir cuánto comprar de cada alimento para satisfacer las tres restricciones y minimizar el costo.

Supóngase que el alimento A y el alimento B son los dos tipos bajo consideración. El alimento A cuesta 12 centavos/onza y el alimento B 8 centavos/onza. Se quiere minimizar el costo total de los alimentos al mismo tiempo que satisfacer las tres restricciones vitamínicas. Se desean, por lo menos, 30 unidades de la vitamina W, 50 unidades de la vitamina X y 60 unidades de la vitamina Y. Cada onza del alimento A proporciona 2 unidades de la vitamina W, 4 unidades de la vitamina X y 7 unidades de vitamina Y. El alimento B proporciona 3,3 y 6 unidades de W, X y Y, por onza, respectivamente. ¿Cuántas onzas de cada alimento deben comprarse?

Comenzando con el objetivo de minimizar el costo total, sea:

A = total de onzas que se compran del alimento A
B = total de onzas que se compran del alimento B

La función objetivo puede escribirse como:

$$\text{Minimizar: } Z = 12A + 8B$$

Esto expresa el costo total en centavos. Pudieron haberse usado decimales y expresar el costo en dólares.

Cada requerimiento vitamínico es una restricción. Además, cada una será una desigualdad, ya que las necesidades son tener *por lo menos* el número estipulado de unidades; más es aceptable. Para la vitamina W, el alimento A da 2 unidades/onza y B da 3 unidades/onza. La restricción es:

$$2A + 3B \geq 30 \text{ (vitamina W)}$$

Para la vitamina X, el alimento A da 4 unidades/onza y el alimento B da 3 unidades/onza. Se necesitan por lo menos un total de 50, es decir,

$$4A + 3B \geq 50 \text{ (vitamina X)}$$

De igual manera, para la vitamina Y se tiene:

$$7A + 6B \geq 60 \text{ (vitamina Y)}$$

Las restricciones de no negatividad son A≥O, *B≥0.*

Reuniendo todo esto, puede escribirse la formulación del problema, comenzando con la función objetivo.

Minimizar:	Z - 12A + 8B
Restricciones:	2A + 3B ≥ 30 vitamina W
	4A + 3B ≥50 vitamina X
	7A + 6B ≥ 60 vitamina Y
	A ≥0,B ≥0 No negatividad

Cada una de las restricciones tiene una constante positiva del lado derecho. El lado izquierdo es una suma de variables lineales y cada variable aparece en la función objetivo.

Un problema de mezclas

Éste es otro tipo de problemas de PL. Aquí el problema es encontrar la combinación de ingredientes con el menor costo y que satisfaga las especificaciones del producto final. Ejemplos de esto ocurren al refinar gasolina, en las preparaciones químicas y en las mezclas de concreto.

Supóngase que una compañía que da servicio de limpieza prepara sus propias soluciones mezclando dos ingredientes. Hace esto para obtener una solución que tiene lo que considera una combinación apropiada de fosfatos y cloruro. Un ingrediente tiene 5% de fosfatos y 2% de cloruro y cuesta 25 centavos/onza. El otro ingrediente tiene 7% de fosfato y 1 % {de cloruro y cuesta 20 centavos/onza. La firma necesita que la mezcla final tenga no más del 6% de fosfatos y $1^1/_2$% de cloruro.

El objetivo es minimizar el costo total. Pero ¿cuáles son las variables |de decisión? ¿El número de onzas en cada ingrediente? Nótese que el problema no dice nada sobre la cantidad total de solución que debe prepararse. No obstante, puede encontrarse una fórmula para la mezcla definiendo las variables como la proporción de cada ingrediente en una onza de solución. Así, sea

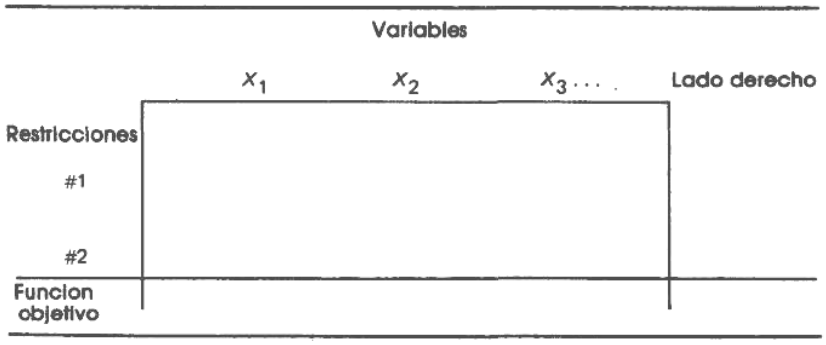
X = onzas de ingrediente uno por onza de solución
Y = onzas de ingrediente dos por onza de solución

Con esta definición, las variables tendrán un valor entre cero y 1.

Existe un truco para ayudar a organizar los datos en un problema de PL: ponerlos en forma de tabla. Si se hace esto, entonces la función objetivo y las restricciones pueden escribirse en forma directa. El formato se muestra en la tabla 7-1. En el interior de la tabla se colocan los coeficientes apropiados del problema.

Para el problema de mezclas, existen dos variables: X y Y. Déjese el primer renglón de la tabla para la restricción de fosfatos. Abajo de X, se coloca la cantidad de fosfato que contiene X: (5 %). Bajo Y, se coloca la cantidad en porcentaje de fosfato contenida en Y; 7. Por último, bajo LD (lapo

TABLA 7-1
Tabla de datos de PL



derecho) se pone el límite en fosfato: 6. El primer renglón, entonces, se ve como sigue:

Restricciones	*X*	*Y*	*LD*
Fosfato	**5**	**7**	**6**

De igual manera, se agrega la restricción de cloruro:

Restricciones	*X*	Y	*LD*
Fosfato	**5**	**7**	**6**
Cloruro	**2**	**1**	**1.5**

Es necesario que se incluya una restricción más: las proporciones deben sumar 1. Si se omite esto, (Entonces la mejor solución sería cero para X y YI ¿Puede el lector ver esto? Cero satisface ambas restricciones y minimiza el costo.

Si se agrega la restricción de proporcionalidad y la función objetivo, la tabla 7-2 queda completa. La ventaja de la tabla es que pueden escribirse de manera directa las relaciones matemáticas. Todo lo que resta hacer es agregar los signos apropiados en cada renglón. Por ejemplo, el primer renglón se convierte en:

$$5X + 7Y \leq 6$$

Ahora se formulará el problema completo, y se dará primero la función objetivo:

$$\text{Minimizar:} \quad Z = 25X + 20\,Y$$

$$\text{Restricciones:} \quad 5X + 7Y \leq 6$$
$$2X + 1Y \leq 1.5$$
$$1X + 1Y = 1$$
$$X \geq 0,\ Y \geq 0$$

TABLA 7-2
Problema de mezclas

Restricciones	X	Y	*RHS*
Fosfato	**5**	**7**	**6**
Cloruro	**2**	**1**	**1.5**
Proporciones	**1**	**1**	**1**
Función objetivo	**25**	**20**	

Nótese que se han usado porcentajes en las restricciones y no decimales (es decir, 6 y no 0.06). Entonces, el multiplica toda la restricción por una constante no tiene efecto en la solución. Lo mismo es cierto para la función objetivo.

Un problema de inversión

Ésta es otra forma del problema de mezclas. Supóngase que se acaba de recibir una herencia de $10 000 de un tío lejano y que se quiere invertir este dinero para maximizar el rendimiento sobre la inversión. Se decide invertir tanto en acciones como en bonos. Para estar seguros, se piensa que las acciones deben ser no más del 25% del total y debe ser, por lo menos, el 10 %. Existe un bono que resulta en particular interesante y se quiere invertir en él por lo menos $4 000. Se estima que la tasa anual de rendimiento en bonos es el 8 % y en acciones el 10 %. ¿Cuánto debe invertirse en acciones y cuánto en bonos?

Las variables son las cantidades de dinero que deben ponerse en acciones y en bonos. Sea

S = dólares invertidos en acciones
B = dólares invertidos en bonos

El objetivo es, entonces, maximizar el rendimiento anual:

$$\text{Maximizar:} \qquad Z = 10S + 8B$$

Existen cuatro restricciones en este problema. Una muy importante, que a veces se pasa por alto es la restricción de presupuesto: sólo se tienen $10 000 disponibles. Como no tiene que invertirse el total, éste es un límite superior.

$$\text{Presupuesto} \qquad S + B \leq 10\,000$$

Existen dos restricciones sobre las acciones. La primera es que no más del 25 % del total de acciones y bonos debe invertirse en acciones. Nótese que esto no es el 25 % de $10 000, sino sólo lo que se invierte en acciones y bonos, o sea:

$$S \leq 0.25(S + B)$$

Rearreglando los términos para ponerla en forma estándar, se tiene

$$S - .25(S + B) \leq 0$$
$$.75S - .25B \leq 0$$

La siguiente restricción sobre acciones es que, por lo menos, el 10% del total invertido se ponga en acciones.

$$S \geq .1(S + B)$$
$$S - .1(S + B) \geq 0$$
$$.9S - IB \geq 0$$

Por último, deben invertirse en bonos por lo menos $4 000.

$$B \geq 4000$$

Poniendo esto todo junto:

$$\text{Maximizar: } Z = 10S + 8B1$$
$$\text{Restricciones: } S + B \leq 10\,000$$
$$.75S - .25B \leq 0$$
$$.9S - .1B \geq 0$$
$$B \geq 4\,000$$
$$S \geq 0, B \geq 0$$

Características comunes a los problemas de programación lineal

Ahora que se han visto varios ejemplos de cómo se establecen los problemas de programación lineal para su solución, debe pensarse en las características comunes a ellos. En cada caso:

1 Se busca alguna combinación de cosas.
2 Existen varios criterios que se deben satisfacer.
3 Uno de los criterios puede identificarse como el objetivo global.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 7-1

Formúlese el siguiente problema de inversión en términos de PL, estableciendo la función objetivo y las restricciones. Un banco tiene $1 millón disponibles para préstamos. Puede prestar dinero a empresas, proporcionar hipotecas o conceder préstamos personales. Las políticas del banco limitan los préstamos personales a un máximo del 25% de todos los préstamos, mientras que los préstamos a empresas no pueden exceder la cantidad de hipotecas. También el banco quiere que los préstamos a empresas sean por lo menos 10% más que los préstamos personales. Los intereses promedio son 12% en préstamos personales, 10% en préstamos a empre-

sas y 8 % sobre hipotecas. Los fondos que no se han prestado se invierten en valores a corto plazo al 5%. El banco quiere un programa para maximizar el interés. (*Sugerencia',* este problema tiene cuatro variables de decisión.)

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Los tres ejemplos han sido sencillos y se podrían resolver sin programación lineal. El problema de inversión es particularmente fácil; ¿sabe el lector la respuesta? Las acciones son preferibles a los bonos, así, se invierte en ellas el máximo permitido: $2 500. Esto deja $7 500 para bonos. Las restricciones de $4 000 en bonos y 10% en acciones son innecesarias o redundantes. ¿Podría el lector resolver el problema de la mezcla o el de la dieta?[2]

Para los problemas sencillos se sugiere que se use el sentido común. La programación lineal puede ayudar a ordenar los pensamientos en cuanto a lo que se refiere a restricciones y objetivos, pero no es necesario escribir las expresiones matemáticas. Sin embargo, en problemas más grandes, no es fácil obtener la solución con un simple razonamiento. Para estos casos se necesita un procedimiento formal para resolver problemas de PL.

EL MÉTODO GRÁFICO

Existen varias maneras para resolver problemas de PL. En esta sección se usa el método gráfico aplicado a un problema muestra.

Problema de mezcla de productos

Un fabricante está tratando de decidir sobre las cantidades de producción para dos artículos: mesas y sillas. Se cuenta con 96 unidades de material y con 72 horas de mano de obra. Cada mesa requiere 12 unidades de material y 6 horas de mano de obra. Por otra parte, las sillas usan 8 unidades de material cada una y requieren 12 horas de mano de obra por silla. El margen de contribución es el mismo para las mesas que para las sillas: $5 por unidad. El fabricante prometió construir por lo menos dos mesas.

Paso 1: formulación del problema

El primer paso para resolver el problema es expresarlo en términos mate máticos en el formato general de PL.

¿Cuál es el objetivo? Es maximizar la contribución a la ganancia. Cada unidad de mesas o sillas producidas contribuirá con $5 en la ganancia.

[2] Para el problema de mezclas, puede comenzarse observando que Y es menos cara que X, de forma que se quiere tanto de Y como lo permitan las restricciones. La segunda restricción no es problema; puede tenerse todo de Y y satisfacerla. La primera restricción, la de fosfato, limita a Y. ¿Cuál es lo máximo que permite? Puede ser hasta el 50% de Y pero no más. Si Y es más grande, entonces la restricción queda violada. Como una fórmula de mitad y mitad cumple con todas las restricciones, es óptima. El costo total es 22.5 centavos/onza.

El problema de la dieta es más difícil de razonar, pero el lector debe tratarlo. La respuesta les A = 0, B = $16\ ^{2}/_{3}$ y Z = $133\ ^{1}/_{2}$.

Así, las dos alternativas son la producción de mesas y la producción de sillas. Ahora puede escribirse la función objetivo:

$$\text{Maximizar: } Z = 5X_1 + 5X_2$$

en donde X_1 = mesas producidas
X_2= sillas producidas

¿Cuáles son las restricciones o limitaciones del problema? Existen tres restricciones. Primero, el material está limitado a 96 unidades. Cada mesa se lleva 12 unidades de material y cada silla usa 8 unidades. La primera restricción es, entonces,

$$12X_1 + 8X_2 \leq 96$$

La segunda restricción es el total de horas de mano de obra. Una mesa se lleva 6 horas, una silla 12 horas y se dispone de un total de 72 horas. Así,

$$6X_1 + 12X_2 \leq 72$$

Existe una limitación más. El fabricante prometió producir por lo menos dos mesas. Esto puede expresarse como

$$X_1 \geq 2$$

Por último, las restricciones de no negatividad son

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$$

Poniendo junto todo el modelo, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } Z &= 5X_1 + 5X_2 \\ \text{Restricciones: } 12X_1 &+ 8X_2 \leq 96 \\ 6X_1 &+ 12X_2 \leq 72 \\ X_1 &\geq 2 \\ X_1 &\geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Paso 2: gráfica de las restricciones

El siguiente paso en el método gráfico es dibujar todas las restricciones en una gráfica. Esto puede hacerse en cualquier orden. Por conveniencia se comenzará con las restricciones de no negatividad. Éstas se muestran en la figura 7-2. En esta gráfica, una solución se representaría por un punto con coordenadas X_1 (mesas) y X_2 (sillas). Las coordenadas representarían las cantidades de cada artículo que se deben producir.

El cuadrante superior derecho se llama *región factible* puesto que es el único cuadrante en que pueden estar las soluciones. Los otros tres cuadrantes no son factibles, ya que requerirían la producción de cantidades negativas de mesas o de sillas o ambas.

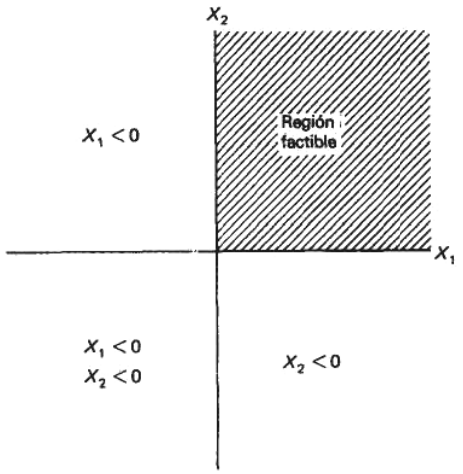
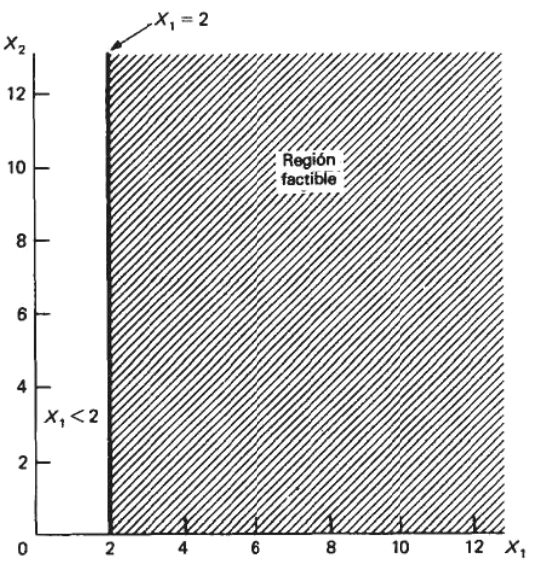


FIGURA 7-2
Restricciones de no negatividad.

La siguiente restricción es $X_1 \geq 2$. La manera más sencilla de dibujar las restricciones de recursos es en dos pasos: (1) convertir una desigualdad en una ecuación y granear la ecuación y (2) sombrear el área apropiada arriba y abajo de la línea que resulta en el paso 1. Convertir una igualdad en una ecuación aquí significa ignorar la parte de "mayor que" o "menor que" de la restricción.

Así, en el ejemplo, $X_1 \geq 2$ se convierte en $X_1 = 2$. Esta ecuación está trazada en la figura 7-3. Cualquier punto en la línea $X_1 = 2$ satisface la ecuación. Sin embargo, la restricción es más amplia, ya que cualquier punto $X_1 > 2$ también la cumplirá. Esto incluye todos los puntos que están a *la derecha* de la línea $X_1 = 2$. Entonces, la región factible incluye todos los valores de *X_1 que están sobre o ala derecha de la línea* $X_1 = 2$.

FIGURA 7-3
Restricción $X_1 \geq 2$.



La limitación sobre las horas de mano de obra es la siguiente restricción. Como antes, primero se convierte en una ecuación: $6X_1 + 12X_2 = 72$. Puede granearse esta línea, si se encuentran dos puntos sobre ella. El par de puntos más sencillo de localizar son las intersecciones con los ejes X_1 y X_2 Para encontrar la intersección con el eje X_2 se hace $X_1 = 0$. La ecuación se reduce, entonces, a:

$$12X_2 = 72$$
$$X_2 = 6$$

La intersección con el eje X_1 se encuentra haciendo $X_2 = 0$. Así,

$$6X_1 = 72$$
$$X_1 = 12$$

Estos dos puntos y la línea que los une se muestran en la figura 7-4. Cualquier punto que está *sobre o abajo* de esta línea cumplirá con la restricción.

Cualquier punto arriba de esta línea requerirá más de 72 horas de mano de obra y no es aceptable. En la figura 7-5 se combina esta restricción con la anterior. En la región factible, ambas restricciones se cumplen.

La última restricción es la de material. Siguiendo el procedimiento anterior, primero se encuentran las intersecciones para la igualdad. Éstas son $X_1 = 0$, $X_2 = 12$ y $X_1 = 8$, $X_2 = 0$. Se localizan los dos puntos en la gráfica; se traza la línea, y como la restricción es del tipo menor o igual que, se sombrea el área que está abajo de la línea. El resultado se muestra en la figura 7-6. Cualquier solución que esté en la frontera o dentro del área sombreada cumplirá con todas las restricciones. Ahora se utilizará la función objetivo para seleccionar la solución óptima.

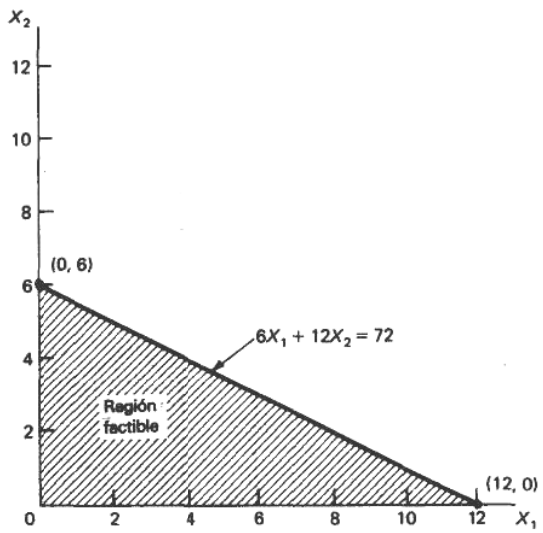


FIGURA 7-4
Restricción de mano de obra.

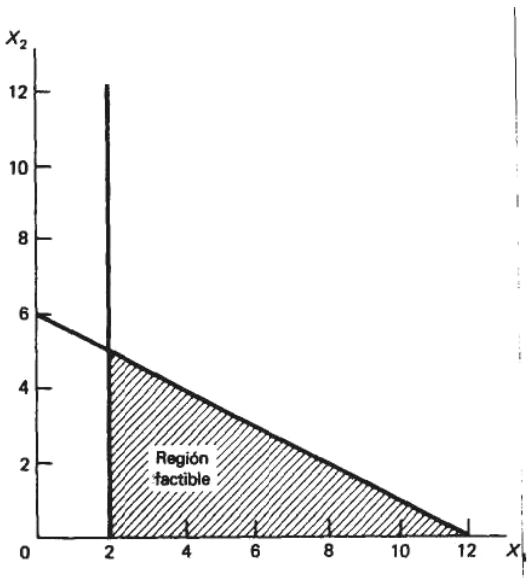


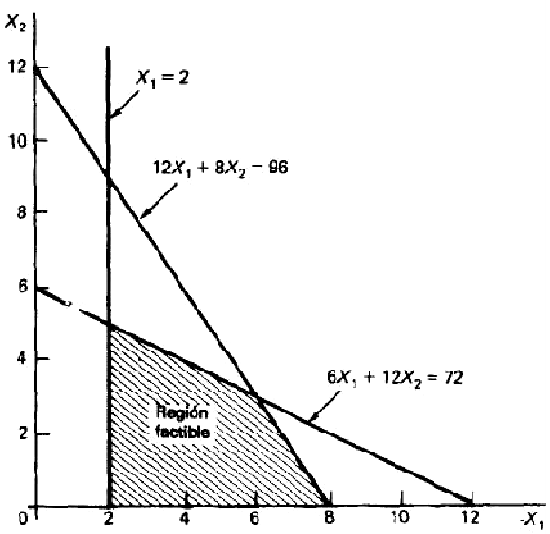
FIGURA 7-5
Las primeras dos restricciones.

Paso 3: obtención de la solución óptima: prueba y error

El método de prueba y error para encontrar la solución óptima, aprovecha una propiedad especial de los problemas de PL. Considérese la figura 7-7 que muestra las restricciones del problema. *La frontera extrema* de la región factible está formada por las líneas que conectan los cuatro puntos A, B, C y D. La frontera extrema es de especial interés porque:

Por lo menos uno de los puntos de intersección en la frontera extrema será una solución óptima.

FIGURA 7-6
Todas las restricciones combinadas.



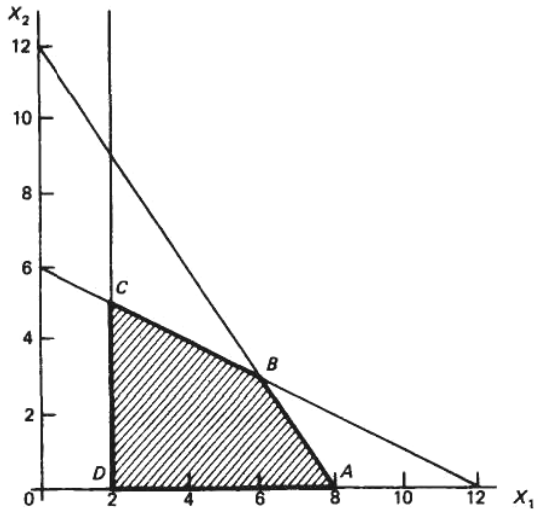


FIGURA 7-7
Frontera extrema de la región factible

Con esta propiedad especial puede reducirse la lista de las posibles soluciones óptimas a sólo cuatro puntos: A, B, C y D. El punto entre ellos que dé el valor más grande de la función objetivo será la solución óptima. Entonces, la tarea es encontrar las coordenadas de estos cuatro puntos, sustituir los valores en la función objetivo y seleccionar el punto que dé el mayor valor de Z.

En cuanto al punto A, se sabe que sus coordenadas son (8,0). El punto B es la intersección de dos restricciones. Si se resuelven las dos ecuaciones que les corresponden simultáneamente, el resultado será las coordenadas de su intersección. En seguida se lleva a cabo esta operación.

Ecuación de restricción de materiales	(1)	$12X_1 + 8X_2 = 96$
Ecuación de restricción de mano de obra	(2)	$6X_1 + 12X_2 = 72$
Multiplíquese la ecuación (2) por 2	(3)	$12X_1 + 24X_2 = 144$
Réstese la ecuación (1) de (3)	(4)	$16X_2 = 48$
		$X_2 = 3$
Sustitúyase en la ecuación	(1)	$12X_1 + 8(3) = 96$
		$12X_1 = 72$
		$X_1 = 6$

El punto C también es la intersección de dos líneas de restricción. Resolviendo de nuevo las ecuaciones simultáneas:

Ecuación de restricción de producción mínima (1)	$X_1 = 2$
Ecuación de restricción de mano de obra (2)	$6X_1 + 12X_2 = 72$
Sustitúyase (1) en (2)	$6(2) + 12X_2 = 72$
	$12X_2 = 60$
El punto D tiene coordenadas (2,0).	$X_2 = 5$

Con las coordenadas de cada uno de los cuatro puntos, ahora se puede proceder a sustituir cada posible solución en la función objetivo. El cálculo de Z para cada uno de estos puntos da:

Punto A, (8,0): $Z = 5(8) + 5(0) = \$40$
Punto B, (6,3): $Z = 5(6) + 5(3) = \$45$
Punto C, (2,5): $Z = 5(2) + 5(5) = \$35$
Punto D, (2,0): $Z = 5(2) + 5(0) = \$10$

El valor más grande es \$45, así el punto B es óptimo: producir seis mesas y tres sillas.

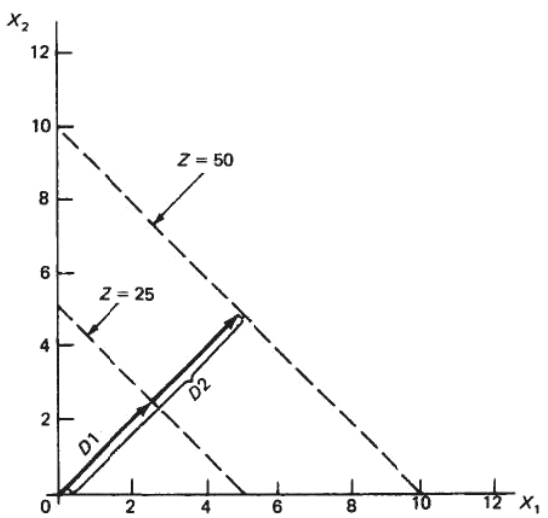
Obtención de la solución óptima: líneas de indiferencia

Existe otro método para encontrar la solución óptima graneando la función objetivo en la misma gráfica de las restricciones. Se considerará este método.

La función objetivo en este problema es $Z = 5X_1 + 5X_2$. Como todavía no se conoce el máximo valor factible de Z, no puede trazarse el óptimo de la función objetivo. No obstante, es posible *suponer* algunos valores para Z y graficar las líneas resultantes. En la figura 7-8 se muestran las líneas para Z = 25 y Z = 50. Las líneas de este tipo se llaman *líneas de indiferencia,* porque cualquier punto sobre una línea dada da la misma ganancia total. Nótese que la distancia perpendicular del origen a la línea aumenta al aumentar el valor de Z. También, todas las líneas de indiferencia son paralelas entre sí. Estas propiedades gráficas pueden usarse para resolver el problema.

En la figura 7-9 se ilustran todas las restricciones y las dos líneas de indiferencia supuestas. En la gráfica puede observarse que la línea de indiferencia para Z = 50 está completamente fuera de la región factible. Para Z

FIGURA 7-8
Líneas de indiferencia.



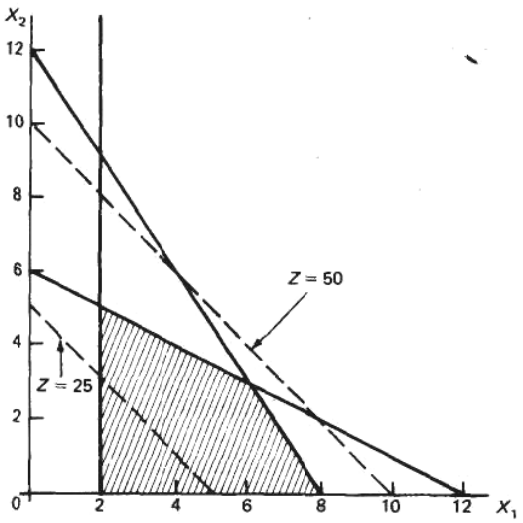


FIGURA 7-9
Líneas de restricciones y de indiferencia.

= 25, parte de la línea cae dentro de la región factible. Por tanto, existe alguna combinación de X_1 y X_2 que satisface todas las restricciones y da una ganancia total de $25. Por inspección, puede observarse que hay ganancias más alfas que son factibles. Imaginando que la línea de indiferencia Z = 25 se mueve hacia la línea Z = 50, de las propiedades de la gráfica que se hicieron notar antes, el punto óptimo estará sobre la línea de indiferencia más lejana al origen pero que todavía toque la región factible. Esto se muestra en la figura 7-10.

Con el punto óptimo localizado gráficamente, la única tarea que queda es encontrar las coordenadas del punto. Nótese que el punto óptimo está en la intersección de las líneas de restricción para materiales y horas de mano de obra. Antes se encontró que las coordenadas de este punto son

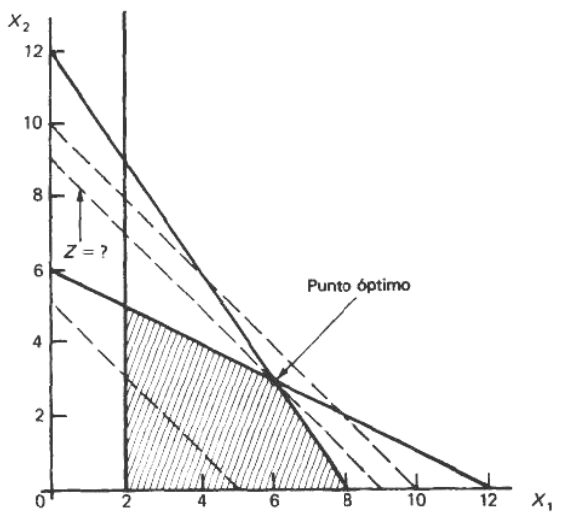


FIGURA 7-10
Localización del punto óptimo.

(6,3). La sustitución de este punto en la función objetivo da la ganancia máxima:

$$Z = 5(6) + 5(3) = \$45$$

Resumen del método gráfico

Para resolver gráficamente problemas de programación lineal:

1 Exprésense los datos del problema como una función objetivo y restricciones.
2 Grafíquese cada restricción
3 Localícese la solución óptima
  a Por prueba y error, o
  b Con líneas de indiferencia

EJERCICIO DE PRÁCTICA 7-2

Resuélvase gráficamente el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & Z = 10X + 4Y \\ \text{Restricciones:} \quad & 5X + 10Y \leq 50 \\ & 10X + 6Y \leq 60 \\ & X \geq 0,\ Y \geq 0 \end{aligned}$$

USO DEL MÉTODO GRÁFICO PARA MINIMIZACIÓN

En esta sección se considera un problema de PL en el cual el objetivo es minimizar costos. La solución del problema de minimización sigue el mismo procedimiento que la de problemas de maximización. La única diferencia es que ahora se quiere el *menor* valor posible para la función objetivo. Supóngase que se tiene el siguiente problema.

Problema de dieta

Un comprador está tratando de seleccionar la combinación más barata de dos alimentos, que debe cumplir con ciertas necesidades diarias de vitaminas. Los requerimientos vitamínicos son por lo menos 40 unidades de vitamina W, 50 unidades de vitamina X y 49 unidades de vitamina Y. Cada onza del alimento A proporciona 4 unidades de vitamina W, 10 unidades de vitamina X y 7 unidades de vitamina Y; cada onza del alimento B proporciona 10 unidades de W, 5 unidades de X y 7 unidades de Y. El alimento A cuesta 5 centavos/onza y el alimento B cuesta 8 centavos/onza.

Paso 1: formulación del problema

La meta en este problema es encontrar la manera menos costosa para satisfacer las necesidades vitamínicas. Las dos alternativas disponibles son los alimentos A y B. Matemáticamente la función objetivo es

Minimizar: $Z = 5A + 8B$

Las restricciones son los requerimientos mínimos de las tres vitaminas. Éstas se muestran en seguida:

Restricciones: $4A + 10B \geq 40$ vitamina W
$10A + 5B \geq 50$ vitamina X
$7A + 78\ 2 \geq 49$ vitamina Y
$A \geq 0$, $B \geq 0$ no negatividad

Paso 2: gráfica de las restricciones

El procedimiento para granear es el mismo que se usó antes: (1) granear cada *ecuación* de restricción; (2) granear el área apropiada. Para la primera restricción la ecuación es 4A + 10B = 40. Las dos intersecciones con los ejes son (0,4) y (10,0). Esta línea se muestra en la figura 7-11. La

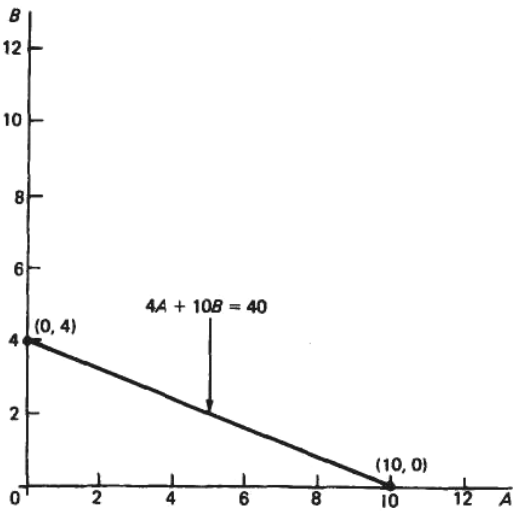


FIGURA 7-11
Línea para la ecuación 4A + 10B = 40.

restricción pide 40 unidades o *más* de la vitamina W. Cualquier punto que esté *arriba* de la línea de restricción será factible y todos los puntos que quedan abajo de esa línea serán inaceptables. En la figura 7-12 se muestra la región factible.

Después se gráfica la restricción para la vitamina X. La ecuación 10A + $5B = 50$ tiene intersecciones con los ejes en (0,10) y (5,0). En la figura 7-13 se ilustran las restricciones para las vitaminas W y X. Nótese que las soluciones que quedan en las áreas *a* o *b* no son factibles, ya que quedarían abajo de una de las líneas de restricción.

Al agregar la tercera restricción, este segundo paso queda terminado, como se muestra en la figura 7-14.

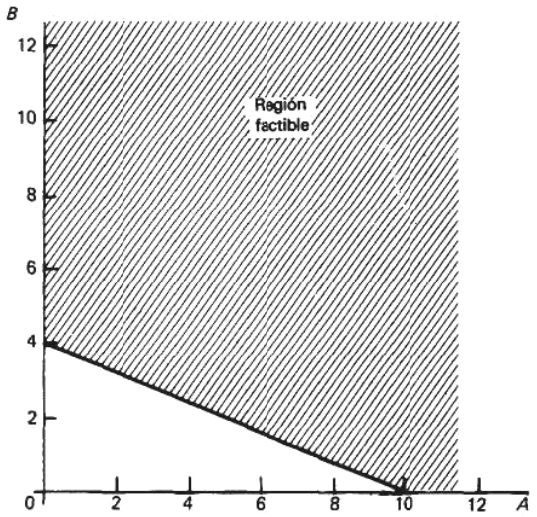


FIGURA 7-12
Restricción de la vitamina W.

Paso 3: localización de la solución óptima

En la figura 7-15 se muestra la frontera extrema más dos líneas de indiferencia, las de Z = 40 centavos y Z = 60 centavos. La frontera extrema está formada por los puntos a, b, c y d, puesto que éstos son los puntos de intersección factibles más cercanos al origen.

Gráficamente, el objetivo de minimizar el valor de Z significa ajustar una línea de indiferencia *tan cerca* del origen como sea posible. En la figura 7-15 puede observarse que existen muchas soluciones posibles para Z = 60, pero ninguna para Z = 40. Imaginando mover la línea Z = 60 hacia el origen, el último punto de contacto con la frontera extrema será el punto *b*. Entonces, el punto *b* es la solución óptima. En la figura 7-14 se observa que el punto *b* es la intersección de dos líneas:

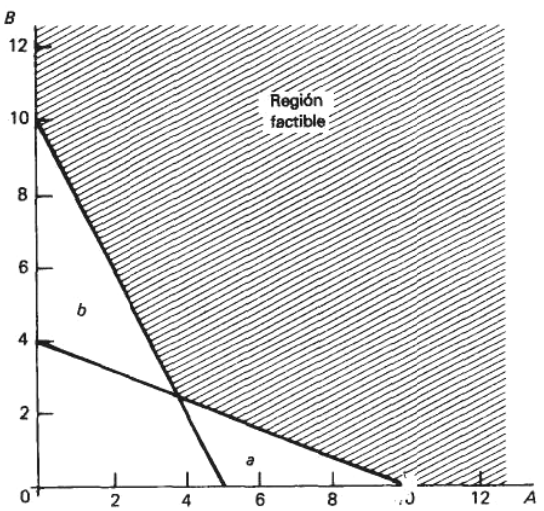


FIGURA 7-13
Restricciones para las vitaminas W y X.

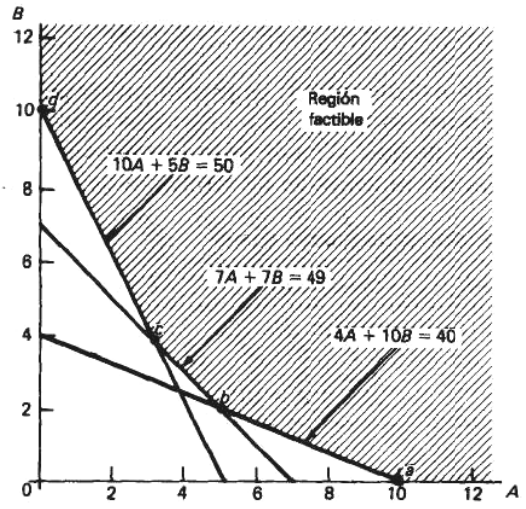


FIGURA 7-14
Todas las restricciones.

(1) 4A + 10B = 40
(2) 7A + 7B = 49

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

Multiplíquese la ecuación (1) por 7	(3) 28A + 70B = 280
Multiplíquese la ecuación (2) por 4	(4) 28A + 28B = 196
Réstese (4) de (3)	42B = 84
	B = 2
Sustitúyase en la ecuación (1)	4A + 10(2) = 40
	A = 5

La solución menos costosa es 5 onzas de alimento A y 2 onzas de alimento B.
El costo total de esta combinación es

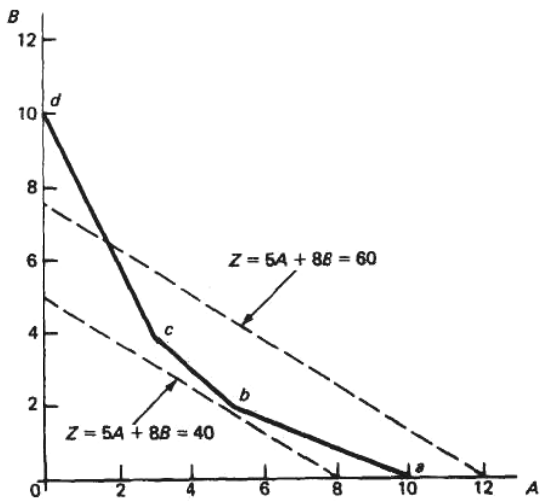


FIGURA 7-15
Líneas de indiferencia para Z = 40 y Z = 60.

$$Z = 5A + 8B = 5(5) + 8(2) = 25 + 16 = 41 \text{ centavos}$$

Si se usa el método de prueba y error para localizar la solución óptima, se deben encontrar las coordenadas de los puntos *a, b, c* y *d.* Se debe calcular después el valor de la función objetivo para cada punto. A continuación se muestran los resultados de este procedimiento:

Resultados de prueba y error

Punto	*Coordenadas*	Z = 5A + 8B
a	$A = 10, B = 0$	50
b	$A = 5, B = 2$	41—menor
c	$A = 3, B = 4$	47
d	$A = 0, B = 10$	80

EJERCICIO DE PRÁCTICA 7-3

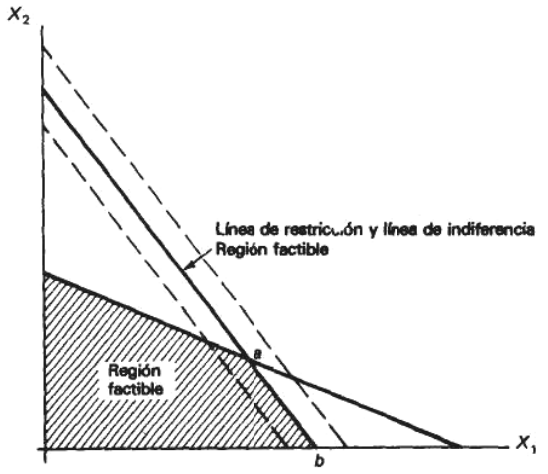
Resuélvase gráficamente el siguiente problema:

$$\text{Minimizar: } Z = 5X + 1.5Y$$
$$\text{Restricciones: } 2X + 5Y \geq 10$$
$$5X + 2Y \geq 10$$
$$X \geq 0, Y \geq 0$$

SOLUCIONES MÚLTIPLES

Hasta aquí todos los ejemplos han tenido soluciones óptimas únicas. Éste no siempre es el caso. Cualquier problema particular de PL puede tener muchas soluciones, todas las cuales son óptimas. Para comprobar cómo puede suceder esto, considérese la figura 7-16. Ésta muestra un ejemplo de maximización con dos restricciones de recursos. También se ilustran

FIGURA 7-16
Ejemplo de soluciones múltiples.



varias líneas para la función objetivo. Conforme estas líneas se alejan del origen (incrementando el valor de Z) se ve claro que son paralelas a una de las líneas de restricción. En el máximo, la función objetivo coincide con una línea de restricción. Como cualquier solución entre a y fe es factible *y* maximiza la función objetivo, todas son soluciones óptimas.

SIN SOLUCIÓN

Otra posibilidad es que *no* existan soluciones factibles. Esto puede suceder por una de dos razones. Puede haber dos restricciones que son mutuamente excluyente; por ejemplo, selecciónese un número mayor o igual que 10, pero menor o igual que 5($X \geq 10$ y $X \leq 5$). Este ejemplo es bastante obvio, pero en los problemas reales, las restricciones mutuamente excluyentes pueden no ser tan evidentes.

La otra razón para que no haya soluciones es que el problema puede ser no acotado. Por ejemplo, en un problema de maximización por lo menos una de las restricciones debe ser una igualdad o del tipo menor o igual que ($\leq$). Si todas las restricciones son del tipo $\geq$, entonces la región factible no tiene límite superior. De igual manera, para un problema de minimización, debe haber una igualdad o una restricción del tipo $\geq$, si se quiere encontrar una solución.

SOLUCIONES ENTERAS

Para algunos problemas, la solución es útil sólo si se obtiene una solución entera de números enteros. Es difícil contratar 3.5 personas o comprar 6.7 carros. En esos casos, es incorrecto sólo redondear la solución de PL. Eso puede dar una solución no factible o una solución alejada del óptimo. Existen técnicas denominadas *programación entera,* para manejar estas situaciones. En escencia, comiezan con una solución óptima no entera y la revisan hasta encontrar la solución entera más cercana. En el capítulo 9 se presenta la mecánica de estos métodos.

LIMITACIONES DEL MÉTODO GRÁFICO

El método gráfico permite al alumno visualizar el proceso de solución de PL. Sin embargo, este método está severamente limitado en sus aplicaciones por el hecho de que el número de dimensiones en la gráfica es igual que el número de alternativas. Para dos alternativas, cada restricción representa una línea. Para tres alternativas, cada restricción forma un plano en el espacio de tres dimensiones, como se muestra en la figura 7-17. Por supuesto que el método deja de ser aplicable para cuatro o más dimensiones o variables.

OTROS MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Se han desarrollado otros métodos de solución que no tienen las limitaciones del método gráfico. El *método algebraico* es un proceso formaliza-

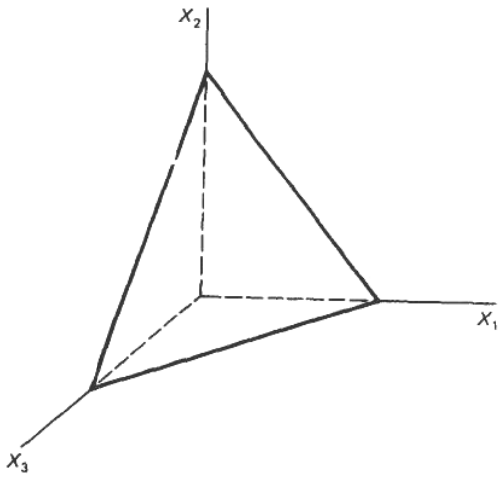


FIGURA 7-17
Ejemplo de una restricción en tres dimensiones.

do de prueba y error. El álgebra matricial puede utilizarse para resolver problemas de PL. La técnica más usada es el *método símplex,* el cual se describirá en el capítulo 8.

Se han desarrollado varias técnicas para resolver problemas de PL de tipos especiales. El *método del transporte* y el *método de asignación* se describen en el capítulo 10. Aunque el método símplex puede usarse para resolver cualquier problema de PL, estos métodos especiales son más fáciles de aplicar, siempre que se cumplan sus condiciones. En el capítulo 9 se describen la *programación entera* y la *programación por objetivos,* que son una extensión del método símplex a otras aplicaciones.

Solución por computadora

Excepto en algunos casos sencillos, el resolver problemas de programación lineal requiere un número considerable de operaciones que se llevan a cabo mejor en la computadora. Existen paquetes de programas de PL accesibles y fáciles de usar; requieren como datos de entrada sólo la función objetivo y las restricciones en el formato general del modelo de PL. No obstante, algunos programas necesitan ajustes. Por ejemplo:

El programa acepta sólo desigualdades ¿Qué se hace con una restricción en forma de ecuación? Se forman dos restricciones a partir de ella: una $\geq$ y otra $\leq$.

El programa sólo maximiza Si se tiene un problema de minimización, se multiplica la función objetivo (no las restricciones) por -1, y se maximiza.

El programa sólo acepta ecuaciones En este caso se deben convertir todas las desigualdades en ecuaciones. Este proceso de aumento se describe en el capítulo siguiente.

DUALIDAD Y PRECIOS SOMBRA

Los problemas de programación lineal tienen una simetría que no sólo es interesante sino útil. Todo problema de PL está asociado con un problema complementario llamado *dual.* Para distinguir entre estos dos problemas, el problema original se denomina *problema primal.* Como la imagen de un espejo, si el problema primal trata de maximizar, entonces el problema dual será minimizar y viceversa. Considérese un ejemplo para comprobar cómo se formula e interpreta el dual.

La simetría de los problemas de programación lineal

Supóngase que un fabricante tiene dos recursos disponibles, R_1 y R_2. Estos recursos pueden usarse para producir dos productos diferentes A y B, de acuerdo con la siguiente regla: Para el producto A se usa 1 unidad de R_1 *y* 4 unidades de R_2*;* para el producto B se usa una unidad de R_1 y 2 unidades de R_2. El fabricante tiene 3 unidades de R_1 y 8 unidades de R_2 disponibles. Las ganancias que recibe por los dos productos terminados es de \$3.50 por unidad de A y \$2.50 por unidad de B. ¿Cuántas unidades de A y B debe producir para maximizar sus ganancias?

Éste es un problema de mezcla de productos. Si se expresa el problema en el formato del modelo de programación lineal se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & Z = 3.5A + 2.5B \\ \text{Restricciones:} \quad & A + B \leq 3 \text{ (recurso } R_1) \\ & 4A + 2B \leq 8 \text{ (recurso } R_2) \\ & A \geq 0 \,,\; B \geq 0 \end{aligned}$$

La solución es A = l, $B = 2$, Z = \$8.50. (El lector puede verificar esto como ejercicio de práctica).

La simetría de los problemas de PL pueden ilustrarse colocando los coeficientes del modelo en la tabla 7-3. Nótese la relación entre esta tabla y el modelo general. Si se da esta tabla como dato, pueden escribirse directamente las ecuaciones del modelo general. (Los coeficientes de la función objetivo están hasta abajo de la tabla sólo por conveniencia).

Las tablas tienen renglones y columnas que pueden invertirse. Supóngase que se da la vuelta al libro 90° en sentido opuesto a las manecillas del reloj. Los resultados se verían parecidos a los de la tabla 7-4. Esto representa otro problema de programación lineal (los coeficientes de la función objetivo están ahora hasta arriba) llamado *dual.* Puede escribirse en forma directa el modelo general para este problema. Sólo se necesitan nuevas letras para las variables. Entonces el problema queda

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} \quad & Z = 3r_1 + 8r_2 \\ \text{Restricciones:} \quad & r_1 + 2r_2 \geq 2.5 \\ & r_1 + 4r_2 \geq 3.5 \\ & r_1 \geq 0,\; r_2 \geq 0 \end{aligned}$$

TABLA 7-3
Coeficientes de las ecuaciones de PL

	Actividad		*Cantidad de recurso*
Tipo de recurso	*A*	*B*	*disponible*
R_1	1	1	3
R_2	4	2	8
Contribución	3.5	2.5	

TABLA 7-4
Después de la rotación de 90°

	3	8	
B	1	2	2.5
A	1	4	3.5
	R_1	R_2	

Nótese que las restricciones son ahora del tipo ≥ y la función objetivo trata de minimizar.[3]

Interpretación del problema dual

El problema dual puede entenderse reinterpretando el problema original. Supóngase que el fabricante prefiere vender los dos recursos R_1 y R_2 en lugar de usarlos para fabricar los productos A y B. Con seguridad los recursos tienen un valor, puesto que pueden usarse para crear productos que pueden venderse. Pero, aunque se conoce el valor unitario de los productos, no se conoce el valor unitario de los recursos. Entonces, esto es lo que se quiere encontrar: ¿cuánto debe cobrarse por los recursos?

Por supuesto, en un mercado libre los recursos deben venderse en la cantidad *mes* alta que el mercado acepte. Sin embargo, existe un precio mínimo abajo del cual le conviene más al fabricante usar los recursos para los productos A y B que venderlos directamente. Por ejemplo, supóngase que el mercado sólo pagaría \$0.10 por unidad de cada recurso. El fabricante obtendría \$1.10 por sus 11 unidades de recursos si los vende, comparado con lo \$8.50 que obtiene por los productos A y B.

Sean r_1 y r_2 los precios unitarios por los recursos R_1 y R_2 respectivamente. La cantidad total recibida de la venta directa de los dos recursos sería $R_1r_1 + R_2r_2$. Como lo que se busca es el precio mínimo que se debe cobrar por estos recursos, la función objetivo es

[3] Un método a toda prueba para obtener el dual está en Hans G. Daellenbach y Earl J. Bell, *User's Guide to Linear Programming* (Engewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1970), p. 120. En efecto, el problema primal debe ser un problema de maximización y todas las restricciones deben ser del tipo ≤. Cualquier problema puede ponerse en esta forma, usando —1 para convertir una función objetivo de minimización o restricciones del tipo ≥. Una vez puesto en esta forma, los coeficientes se colocan en una tabla, se rota 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj y se reescribe como un problema de minimización con restricciones.

$$\text{Minimizar: } Z = 3r_1 + 8r_2$$

Como se mencionó antes, sería un error vender los recursos por menos de lo que puede obtenerse al usarlos en la fabricación de los productos A y B. Así, el precio de cada producto proporciona un límite inferior o una restricción sobre el precio del recurso. Para el producto A, se tiene la restricción

$$r_1 + 4r_2 \geq 3.5$$

Es decir, si se venden directamente 1 unidad del recurso R_1 y 4 unidades de R_2, entonces, por lo menos deben recibirse \$3.50, ya que esa es la cantidad que se recibiría por una unidad del producto A que se fabrique. De igual manera, para el producto *B*

$$r_1 + 2r_2 \geq 2.5$$

Éstas son las mismas ecuaciones que se encontraron antes con la tabla. La solución gráfica del problema dual se muestra en la figura 7-18.

Los precios mínimos que debe cobrar el fabricante son \$1.50 por unidad de recurso R_1 y \$0.50 por unidad de recurso R_2. Nótese que tanto el problema primal como el problema dual dan el *mismo* valor de la función objetivo: \$8.50. Esto era de esperarse, ya que el fabricante no aceptaría menos dinero por los recursos del que podría obtener usándolos en su producción.

Precios sombra

Algunas técnicas de solución para PL proporcionan respuestas a los dos problemas, el primal y el dual, al mismo tiempo. El método gráfico no lo

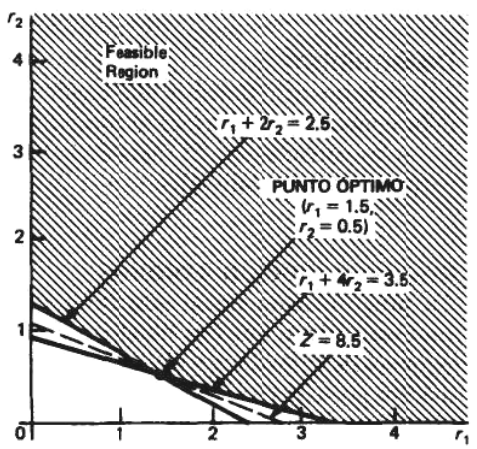


FIGURA 7-18
El problema dual

hace, pero el método algebraico y el símplex sí proporcionan ambas soluciones. Además, la mayoría de los programas de computadora también dan los dos resultados.

Cuando se tienen las dos soluciones, la solución dual se denomina de *precios sombra.* Por ejemplo, en el problema primal, la solución era producir 1 unidad de A y 2 unidades de B. Los precios sombra serían \$1.50 para R_1 y \$0.50 para R_2. La interpretación en este caso es que el fabricante puede aumentar su ganancia total en \$1.50, si dispone de una unidad adicional del recurso R_1. En el problema original, el fabricante tenía sólo 3 unidades de R_1. El precio sombra dice que la ganancia total aumentaría de \$8.50 a \$10, si tuviera 4 unidades del recurso R_1 en lugar de 3. El \$1.50 también es el precio *máximo* que debe pagar el fabricante por una unidad adicional del recurso R_1.

SUPOSICIONES Y LIMITACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

En la programación lineal hay tres suposiciones importantes: linealidad, determinismo y un sólo objetivo. Las suposiciones constituyen condiciones previas que deben cumplirse para poder usar programación lineal.

Linealidad

La suposición de linealidad tiene varios significados. Primero, todas las *variables* deben ser lineales; esto es, deben tener exponente 1. Segundo, todos los coeficientes deben ser constantes, tanto en la función objetivo como en las restricciones. Tercero, todas las combinaciones de variables deben ser lineales; es decir, sólo pueden aparecer los signos (+) y (-), y no los de multiplicación o división.

Las suposiciones de linealidad limitan a la PL a relaciones en línea recta. Para muchos problemas esto no es una dificultad. Existen algunas técnicas especiales, como programación cuadrática para manejar ciertos problemas no lineales.

Determinismo

La programación lineal es una técnica determinista, lo cual significa que debe conocerse con certeza el comportamiento de todas las variables y de todos los coeficientes. El tema especial de programación probabilista incorpora las probabilidades.

Una sola función objetivo

La programación lineal está limitada a uno y sólo un objetivo. Si el problema tiene muchos objetivos, puede ser posible establecer niveles mínimos de realización o alcance, tratarlos como restricciones y usar programación por objetivos. Se han realizado algunos trabajos sobre programación de multiobjetivos, pero no existe ningún método general.

Algunas limitaciones prácticas

Existen otras dos limitaciones prácticas para el uso de la PL. Una se relaciona con los cálculos. En general se necesita una computadora. Desafortunadamente, las calculadoras, aun las programables, son poco útiles, puesto que la programación lineal tiene necesidad de gran cantidad de memoria o almacenamiento. Si no se tiene acceso a una computadora, se estará limitado a problemas muy sencillos.

La otra limitación se refiere al costo de formular un problema de programación lineal. En teoría, podría usarse PL, por ejemplo, para hacer las compras semanales de abarrotes. Sin embargo, sería necesario conocer todas las compras posibles que pueden realizarse (éstas serían las variables), además de cada restricción como sabor, número de comidas, vitaminas y proteínas. Es obvio que el costo de obtener todos estos datos excede lo que se podría ahorrar si se hicieran las compras óptimas. Antes de emprender una aplicación lineal de PL, debe considerarse la disponibilidad y el costo de los datos necesarios.

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Puede parecer que la programación lineal es un ejemplo de sobreelaboración: una organización probervial para matar una mosca. Los problemas presentados hasta aquí son muy sencillos y pueden resolverse sin PL. Por supuesto, el objetivo ha sido hacer hincapié en los métodos y procedimientos de PL para alcanzar los objetivos de aprendizaje. La utilidad de la técnica estriba en sus aplicaciones a problemas de gran escala.

No es raro encontrar programación lineal aplicada a problemas que incluyen cientos de variables y miles de restricciones. Se presentan en esta sección tres ejemplos para ilustrar el poder de la PL en las aplicaciones administrativas. Estos ejemplos todavía son pequeños en cuanto al número de variables y restricciones, pero cada uno puede ampliarse con cambios menores en el contexto del problema.

Asignación de gastos de publicidad

Un pequeño distribuidor está planeando una campaña de publicidad de cuatro semanas para anunciar una gran inauguración, quiere lograr la mayor audiencia posible y está dispuesto a gastar hasta $5 000 en la campaña. Después de revisar los medios de publicidad disponibles, el distribuidor ha reducido las posibilidades a cinco:

1 Anuncios diarios en los periódicos locales
2 Comerciales matutinos en la televisión local
3 Comerciales vespertinos en la televisión local
4 Patrocinio local de programas semanales de televisión
5 Un anuncio en la edición mensual de una revista regional

Para cada una de estas posibilidades se obtuvo la siguiente información.

		Televisión			
	Periódico	*Matutino*	*Vespertino*	*Programa*	*Revista*
Costo por unidad	**$400**	**$100**	**$1000**	**$1000**	**$400**
Unidades disponibles	**4**	**4**	**4**	**4**	**1**
Audiencia total	**16 000**	**4000**	**40 000**	**35 000**	**15 000**
Hombres, edad 21-35	**4000**	**500**	**12 000**	**1000**	**8000**
Mujeres casadas	**6000**	**2000**	**12 000**	**5000**	**2000**

Los datos que se refieren al sexo masculino o femenino entre la audiencia son importantes, ya que el distribuidor quiere lograr la asistencia de por lo menos 20 000 miembros de cada grupo.

El objetivo es maximizar la audiencia total. Si las X representan el número de unidades de publicidad que el distribuidor debe comprar de cada uno de los cinco medios, la función objetivo puede escribirse como:

$$\text{Maximizar: } Z = 16\,000X_1 + 4\,000X_2 + 40\,000X_3 + 35\,000X_4 + 15\,000X_5$$

Las restricciones del problema van del número limitado de unidades de publicidad disponibles y el presupuesto limitado, a los deseos del distribuidor en cuanto a la audiencia y el sexo de los asistentes. Con todo, existen ocho restricciones:

$$\text{Unidades disponibles: } X_1 \leq 4$$
$$X_2 \leq 4$$
$$X_3 \leq 4$$
$$X_4 \leq 4$$
$$X_5 \leq 1$$

$$\text{Presupuesto } 400X_1 + 100X_2 + 1\,000X_3 + 1\,000X_4 + 400X_5 \leq 5\,000$$
$$\text{Hombres } 4\,000X_1 + 500X_2 + 12\,000X_3 + 1\,000X_4 + 8\,000X_5 \geq 20\,000$$
$$\text{Mujeres } 6\,000X_1 + 2\,000X_2 + 12\,000X_3 + 5\,000X_4 + 2\,000X_5 \geq 20\,000$$
$$\text{No negatividad } \quad X_1 \geq 0 \text{ con } r_1 = 1 \text{ a } 5$$

Por el método símplex, o con ayuda de una computadora, la solución óptima es

$$X_1 = 1.5$$
$$X_2 = 4$$
$$X_3 = 4$$
$$X_4 = 0$$
$$X_5 = 0$$
$$Z = 200\,000$$

Vale la pena hacer notar dos aspectos de este ejemplo. Primero, se necesitan algunos datos muy importantes sobre las características de la audien-

cía para resolver el problema. La solución obtenida será válida sólo hasta el punto en que los datos empleados se acerquen a la realidad. Segundo, la solución pide 1.5 semanas de anuncios en el periódico. Si esto no fuera posible, se tendría que recurrir a las técnicas de *programación entera* para resolver el problema. El sólo redondear las fracciones puede llevar a una solución mucho menor que la óptima.

Selección de estilos de camisas

Un fabricante de camisas está tratando de decidir cuántas camisas deoe producir durante el mes próximo. Pueden hacerse siete estilos. Los estilos varían en las horas de mano de obra que requieren, en la contribución en la ganancia y en las ventas potenciales que el departamento de comercialización estima. Los datos se dan en seguida:

Estilo	*Horas-hombre*	*Ventas máx.*	*Contribución*
1	**0.5**	**3000**	**1.00**
2	**1.0**	**1000**	**2.00**
3	**0.25**	**5000**	**1.00**
4	**1.5**	**2000**	**1.50**
5	**0.7**	**1500**	**1.25**
6	**0.9**	**1500**	**1.10**
7	**1.2**	**1600**	**1.20**

Se dispone de un total de 7 500 horas de mano de obra.

El objetivo en este problema es maximizar la contribución total en la ganancia. Si las X representan los diferentes estilos, la función objetivo puede escribirse:

$$\text{Maximizar: } Z = X_1 + 2X_2 + X_3 + 1.5X_4 + 1.25X_5 + 1.1X_6 + 1.2X_7$$

Las restricciones de horas de mano de obra son:

$$\text{Horas de mano de obra: } 0.5X_1 + X_2 + 0.25X_3 + 1.5X_4 + 0.7X_5 + 0.9X_6 + 1.2X_7 \leq 7\,500$$

Se tienen restricciones adicionales sobre la decisión debidas a las ventas potenciales máximas para cada estilo. Estas restricciones son:

$$\begin{aligned} \text{Ventas máximas: } & X_1 \leq 3000 \\ & X_2 \leq 1000 \\ & X_3 \leq 5000 \\ & X_4 \leq 2000 \\ & X_5 \leq 1500 \\ & X_6 \leq 1500 \\ & X_7 \leq 1600 \\ & X_i \geq 0 \text{ con } i = 1 \text{ a } 7 \end{aligned}$$

Entonces, este problema tiene siete variables y ocho restricciones. Con una computadora, la solución que se encontró es:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 3\,000 \\
X_2 &= 1\,000 \\
X_3 &= 5\,000 \\
X_4 &= 0 \\
X_5 &= 1\,500 \\
X_6 &= 1\,500 \\
X_7 &= 1\,125 \\
Z &= \$14\,875
\end{aligned}
$$

Planeación de la fuerza de trabajo

El gerente de personal de una compañía constructora grande está analizando la necesidad de mano de obra semicalificada durante los próximos seis meses. Se lleva 1 mes adiestrar a una persona nueva. Durante este periodo de entrenamiento un trabajador regular, junto con uno en adiestramiento (aprendiz), producen el equivalente a lo que producen 1.2 trabajadores regulares. Se paga $500 mensuales a quien está en entrenamiento, mientras que los trabajadores regulares ganan $800 mensuales. La rotación de personal entre los trabajadores regulares es bastante alta, del 10 % mensual.

El gerente de personal debe decidir cuántas personas necesita contratar cada mes para adiestramiento. En seguida se da el número de meses-hombre necesarios. También se desea tener una fuerza de trabajo regular de 110 al principiar julio. En cuanto al 1º de enero, hay 58 empleados regulares.

Mes	*Meses-hombre requeridos*	*Mes*	*Meses-hombre requeridos*
Enero	60	Abril	80
Febrero	50	Mayo	70
Marzo	60	Junio	10

Este problema tiene un aspecto dinámico, ya que la fuerza de trabajo en cualquier mes depende de la fuerza de trabajo regular y en adiestramiento del mes anterior. Para cualquier mes, el número total de meses-hombre disponibles se puede expresar como:

$$\text{Meses hombre disponibles: } R_i + 0.2H_i$$

en donde R_i = número de trabajadores regulares al principio del mes
H_i = número de aprendices contratados en el mes

Entonces, los requerimientos de cada mes pueden expresarse por las restricciones:

enero	R_1	+ $0.2H_1$	≥	60
febrero	R_2	+ $0.2H_2$	≥	50
marzo	R_3	+ $0.2H_3$	≥	60
abril	R_4	+ $0.2H_4$	≥	80
mayo	R_5	+ $0.2H_5$	≥	70
junio	R_6	+ $0.2H_6$	≥	100
julio (principio)	R_7		≥	110

Debido a la rotación, el 10% de los trabajadores regulares se van cada mes. Así, el número de trabajadores regulares disponibles, por ejemplo, al principio de febrero sería

$$R_2 = 0.9R_1 + H_1$$

En la misma forma, pueden escribirse las ecuaciones para el número de trabajadores regulares disponibles al principio de cada mes:

enero	$R_1 = 58$ (dados)
febrero	$R_2 = 0.9R_1 + H_1$
marzo	$R_3 = 0.9R_2 + H_2$
abril	$R_4 = 0.9R_3 + H_3$
mayo	$R_5 = 0.9R_4 + H_4$
junio	$R_6 = 0.9R_5 + H_5$
julio	$R_7 = 0.9R_6 + H_6$

El objetivo global del gerente de personal es minimizar el costo. La función objetivo es:

$$\text{Minimizar: } Z = 800(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6) + 500\,(H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6)$$

Ahora se tiene el problema en el formato general de PL con 13 variables y 14 restricciones. No obstante, nótese si se sustituyen las ecuaciones de las R_i en las desigualdades y en la función objetivo, se podrían eliminar las R variables. Esto reduciría el problema a seis variables y siete restricciones. Con una computadora, los resultados que se encontraron son:

Mes	*enero*	*febrero*	***marzo***	***abril***	***mayo***	***junio***
Aprendices	**10**	—	**29.6**	—	**30.4**	**24.1**

El valor de la función objetivo es Z = $385 620.

EXPERIENCIAS DEL MUNDO REAL

Es razonable esperar una amplia variedad de aplicaciones de PL, ya que pone en práctica el concepto de satisfacer que lo que se describió en el

capítulo 1. Recuérdese que, de acuerdo con Simón, los tomadores de decisiones en la empresa establecen criterios que debe cumplir una solución y, después, buscan esa solución. En PL los criterios se expresan como restricciones. Se exploran las soluciones posibles y se usa la función objetivo para elegir la mejor de entre aquellas que cumplen con los criterios. La programación lineal se denomina técnica de optimización, pero optimiza sólo dentro de los límites de las restricciones. En realidad es un método de satisfacción de criterios.

Una de las dificultades al determinar hasta qué punto se usa cualquier método cuantitativo es que algunas firmas rehúsan hablar sobre las aplicaciones. Consideran que las aplicaciones innovativas son ventajas competitivas y las guardan en secreto. Afortunadamente, esto no es lo que pasa en todos los casos. A continuación se describen tres aplicaciones de PL para mostrar en qué tipos de problemas se ha usado. No se está sugiriendo aquí que la PL sea la panacea para todos los problemas en la empresa. Ya se establecieron sus limitaciones.

Administración del combustible para aviones[4]

Antes de la crisis de combustible en 1973, la compañía National Airlines compraba combustible siguiendo la política de "recursos mínimos disponibles". Es decir, la compañía trataba de no guardar exceso de combustible en inventario, ya que hacerlo era costoso y se desperdiciaba. La crisis de combustible causó rápidos incrementos en los precios, controles gubernamentales y escasez de combustible; todo esto causó que la National reconsiderara su política de administración de combustible.

Los horarios de vuelo para cada nave se forman por una serie de vuelos o ramas que finalmente reubican la nave en su punto de partida. El combustible puede comprarse en el punto de partida o en cualquiera de las escalas a lo largo de la ruta. Entonces, el combustible puede "almacenarse en los tanques", siempre que sea necesario a causa de la escasez o cuando sea económico por el ahorro en los costos.

La National construyó un modelo de PL para ayudar a determinar la mejor manera de administrar el combustible. Tuvieron que considerarse muchos factores que incluían el precio, la disponibilidad en cada aeropuerto, la tasa de consumo y la capacidad de cada avión, así como la distancia entre las escalas. Con todo, el modelo incluía aproximadamente 800 restricciones y 2 400 variables para 350 segmentos de vuelo, 50 combinaciones aeropuerto/vendedor y varios tipos de equipo.

En el primer mes de operaciones, los costos por combustible de la National bajaron de 16.35 centavos/galón a 14.43 centavos/galón, aun cuando los precios del combustible habían subido. Esto dio como resultado un ahorro de $0.5 millones para la firma. Después de dos años de experiencia operativa usando el modelo de PL, la National obtuvo un ahorro de varios millones de dólares a través de una mejor administración del combustible.

[4] D. Wayne Darnell y Carolyn Loflin, "National Airlines Fuel Management an Allocation Model", *Interfaces,* vol. 7, núm 2 (febrero de 1977), pp. 1-16.

Administración de alimentos[5]

Muchas instituciones, como escuelas y hospitales, manejan programas de alimentación totalmente controlados; es decir, la institución y no el cliente determina qué alimentos se servirán. Esto requiere una planeación de menus para satisfacer ciertas necesidades como nutricionales, estructurales, de compatibilidad y otras. La tarea es desarrollar un menú satisfactorio a un costo mínimo. Este es un problema de dieta clásico para el que la programación lineal es muy apropiada. El problema principal es obtener todos los datos necesarios.

Una década de investigación, que comenzó en 1962 en la Universidad de Tulane y subvencionada en parte con fondos del gobierno y con donativos de corporaciones, dio como resultado un modelo de programación lineal para la administración de alimentos. Se han puesto en práctica varias versiones del modelo; éstas incluyen el Computer Assisted Menú Planning (CAMP) del sistema IBM/360, el cual es del dominio público. El modelo minimiza el costo total basándose en las restricciones de estructura (desayuno, almuerzo, comida), de nutrición, de compatibilidad y de disponibilidad de los alimentos. Los costos están basados en las raciones servidas, incluso los ingredientes y la preparación. Los resultados del modelo están en la forma de "el mejor menú" para el período que se especificó.

El modelo se ha puesto en práctica en hospitales, escuelas e instituciones penales. Los ahorros en el costo varían desde el 5 hasta el 34 % y en todos los casos el ahorro fue mayor que los costos de poner en práctica el modelo. Además, la mayoría de los usuarios han informado de una mejor aceptación del menú.

Planeación de la fabricación de triplay[6]

La Canadian Forest Products Ltd. del Canadá ha venido usando un modelo de PL desde 1969 para ayudar a planear la fabricación de triplay. La compañía estima que el modelo le ha ahorrado $1 millón anuales comparado con otros métodos anteriores.

El problema surgió debido a un gran número de elecciones posibles en el proceso de producción. La compañía tenía 140 combinaciones de fuentes de material y 3 600 combinaciones de productos terminados que incluían grado, ancho, longitud, grosor y mercado. Las decisiones se hacían en base a la experiencia y la intuición. Al elevarse los costos y no poder aumentar tanto los precios, el margen de error se hizo muy pequeño. Esto llevó a la firma a buscar mejores métodos de toma de decisiones.

Con tres años de desarrollo, el modelo maximiza la contribución marginal. Las restricciones incluyen la disponibilidad de materia prima, la capacidad de producción y los pronósticos de ventas. El modelo se usa para

[5] Joseph I., Balintfy, "A Mathematical Programming System for Food Management Applications", *Interfaces,* vol. 6, núm. 1, parte 2 (noviembre de 1975), pp. 13-31.

[6] Dilip B. Kotak, "Application of Linear Programming to Plywood Manufacture", *Interfaces* vol. 7, núm. 1, parte 2 (noviembre de 1976) pp. 56-68.

ayudar a la administración en su plan operativo anual estableciendo las metas para ese año. Se utilizan sistemas de programación para cada dos semanas y diarios para los ajustes a corto plazo. Los informes de control comparan la producción real con las metas operativas planeadas para poder observar las diferencias.

RESUMEN

La programación lineal es un método general para seleccionar el mejor programa o combinación de actividades que deben cumplir varios criterios. Si hay un problema de naturaleza determinista, que incluya muchas variables interrelacionadas, que tiene criterios que deben cumplirse y un solo objetivo, entonces puede aplicarse la PL.

Todos los problemas de programación lineal pueden formularse en un formato común. La función objetivo siempre es maximizar o minimizar una suma lineal de variables. Cada restricción es una suma lineal de variables que están relacionadas con una constante no negativa en el lado derecho (ya sea $=, \leq$ o $\geq$). Las restricciones de no negatividad completan las especificaciones del problema.

El método gráfico de solución está limitado en sus aplicaciones. Sin embargo, es útil para ilustrar la región de soluciones factibles y la forma como se usa la función objetivo para encontrar la solución óptima. Se estudiarán otros métodos de solución en capítulos posteriores: el método símplex, el del transporte, la programación por objetivos, la programación entera y el método de asignación.

Cada problema primal tiene un problema dual correspondiente, que puede proporcionar información adicional. La mayoría de los programas de computadora al igual que el método símplex proporcionan tanto la solución primal como los precios sombra.

EJERCICIOS

7-1 ¿Cuáles de las siguientes relaciones *no* serían aceptables como restricciones de PL?

a $7X + 5Y = 9$
b $8XY + 2X \leq 12$
c $13X + 9X^2 \geq 8$
d $4X \leq 7/Y$
e $XY = 1$

7-2 ¿Cuáles de las siguientes relaciones serían aceptables como restricciones de PL?

a $X^2 + Y^2 = 8$
b $3X + 7Y \geq 9$
c $12X + 8 \leq 9XY$

$$d—2.2X + \frac{7X}{Y} = 13Y$$

$$e6XY \geq 4Y$$

7-3 Dados los siguientes datos para los productos A y B:

Recurso	*Producto* A	*B*	*Recurso disponible*
R_1	60	20 50	1200
R_2	40	$1.50	2000
Contribución/unidad	$3		

a Escríbanse la función objetivo y la restricciones,
b Encuéntrese la solución óptima mediante el método gráfico.

7-4 Dados los siguientes datos en cuanto a los productos X_1 y X_2:

Recurso	*Producto* X_1	X_2	*Recurso disponible*
R_1	4	2	16
R_2	1	2	8
Contribución/unidad	$1	$2	

a Escríbanse la función objetivo y las restricciones.
b Encuéntrese la mezcla de productos que maximice la contribución total.

7-5 Con los siguientes datos:

Recurso	*Producto* A	B	*Recurso disponible*
R_1	10	10	200
R_2	8	4	64
R_3	3	0	72
Contribución/unidad	$5	$5	

a Escríbanse la función objetivo y las restricciones.
b Encuéntrese la solución óptima mediante el método gráfico.

7-6 Dados dos productos A y B, tales que:

	Horas requeridas por unidad *Centro 1*	*Centro 2*	*Contribución $*
A	8	20	16
B	15	10	12
Horas disponibles	112	170	

Encuéntrese la mezcla óptima de productos.

7-7 La Indestructible Toy Company está planeando su programa de producción para Navidad: en particular, quiere saber cuántos juguetes "clásicos" y cuántos "de moda" debe producir. Un clásico lleva 10 horas de tiempo de moldeo más 6 horas de tiempo de máquina, mientras que uno de moda ocupa 5 horas de tiempo de moldeo y 7 horas de maquinado. La contribución de un clásico es de $8 y la de uno de moda es de $6. Con 40 horas de tiempo de moldeo y 32 horas de tiempo de máquina disponibles, ¿cuántos clásicos y cuántos de moda debe fabricar para maximizar la contribución total?

7-8 La compañía MNO fabrica dos productos: A y B. La contribución en la ganancia respectiva es de $2.50 y $2 por unidad. Cada producto requiere tres materiales: X, Y y Z. El producto A requiere 1 unidad de X, 5 unidades de Y y 4 unidades de Z. El producto *B* requiere 3 unidades de X, 4 de Y y 1 de Z. La compañía dispone de 30,51 y 32 unidades de X, Y y Z, respectivamente. Encuéntrese la mezcla óptima de productos.

7-9 La Barb's Transmission Repair está planeando una campaña de anuncios con un presupuesto de $2 500. Está considerando dos medios: anuncios de $100 en el radio o comerciales de $200 en televisión. Cada anuncio en el radio llega a una audiencia de 12 000 personas; cada comercial en televisión lo ven 20 000 personas. La Barb quiere maximizar la audiencia total, pero también está preocupada por dos grupos específicos dentro de esta audiencia: mujeres entre los 21 y 35 años y hombres mayores de 40. Quiere llegar por lo menos a 10 000 de estas mujeres y 8 000 de los hombres. Los medios de difusión han proporcionado los siguientes datos:

	Divulgación por anuncio	
	Mujeres (21-35)	*Hombres (más de 40)*
Radio	**2000**	**1500**
TV	**4000**	**5000**

¿Cómo debe la Barb gastar el presupuesto de la campaña?

7-10 La Firerock Tire Company está tratando de encontrar la mejor manera de utilizar el exceso de capacidad, en particular, 20 000 horas-hombre. La compañía está considerando dos tipos de llantas: normal y radial. Cada llanta radial ocupa 2.5 horas-hombre y tiene una contribución marginal de $20. Una llanta normal requiere 2 horas-hombre y contribuye con $16. El departamento de comercialización estima que pueden venderse hasta 6 000 llantas radiales y 8 000 llantas normales.

a Fórm líese este como un problema de PL.

b ¿Cuál tas llantas de cada tipo deben producirse?

c ¿Cuál es la contribución total?

7-11 Encuéntrese la solución óptima del siguiente problema de PL:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & Z = X_1 + 0.9X_1 \\ \text{Restricciones: } & X_1 + 0.8X_2 \geq 4 \\ & X_1 + X_2 \quad 4.5 \\ & X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

7-12 Encuéntrese la solución óptima del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & Z = 16A + 4B \\ \text{Restricciones: } & 3A + 6B \geq 36 \\ & 16A + 20B = 160 \\ & 12A + 6B \geq 72 \\ & A,\ B \geq 0 \end{aligned}$$

7-13 El Centerville Hospital está tratando de determinar el número de comidas de pescado y de res que debe servir durante el mes que viene. El hospital necesita una comida para cada uno de los 30 días. Las comidas de pescado cuestan $2 cada una y las de res $2.50 (los costos incluyen vegetales y ensalada). Ambas comidas cumplen con las necesidades de proteínas. Si se juzga el sabor en una escala de 1 a 10, el pescado obtiene un 5 y la res 9. El hospital quiere alcanzar en el mes un total, por lo menos, de 200 puntos por el sabor. Los requerimientos totales de vitaminas en el mes deben ser, por lo menos, 300 unidades. La comida de pescado proporciona 8 unidades y la de res 12 unidades. ¿Cuántas comidas de cada tipo debe planear el hospital?

7-14 La Classy Paper Company está tratando de encontrar la mejor manera de cortar platos de papel del rollo estándar. Tiene dos pedidos de platos: uno por 100 000 platos de 9 pulgadas, el otro por 178 000 platos de 7 pulgadas. Se han propuesto dos métodos de corte. El corte *a* da 5 platos de 9 pulgadas y 10 de 7, más 4 pulgadas de desperdicio por cada pie de material del rollo. El corte fe da 8 platos de 9 pulgadas y 5 de 7, más 6 pulgadas de desperdicio por cada pie de material del rollo. ¿Cuántos cortes de cada tipo deben hacerse para minimizar el desperdicio?

7-15 Formúlese y resuélvase el dual del problema 7-4

7-16 Formúlese y resuélvase el dual del problema 7-6

7-17 El Orangetown Police Department tiene los siguientes requerimientos mínimos diarios de personal:

Periodo	***Hora** del día*	*Policías requeridos*
1	12-4 a.m.	40
2	4-8 a.m.	20
3	8-12 a.m.	80
4	12-4 p.m.	90
5	4-8 p.m.	70
6	8-12 p.m.	50

Cada oficial de policía trabaja 8 horas consecutivas. El departamento de policía está buscando una planeación de personal que minimice el total de oficiales de policía que se necesitan diariamente. Formúlense las relaciones del modelo de PL para encontrar una programación óptima. No se resuelva. *(Sugerencia:* sea X_i el número de oficiales de policía que inician su trabajo en el periodo i.)

7-18 Precarious Airlines está tratando de decidir cuánto combustible para jet debe comprar a tres proveedores durante el mes próximo. Necesita las siguientes cantidades de combustible para los tres aeropuertos que usa en la actualidad: 600 000 galones para el aeropuerto 1, 500 000 galones en el aeropuerto 2 y 300 000 galones en el aeropuerto 3. Los tres proveedores han indicado que pueden proporcionar las siguientes cantidades totales de combustible: la compañía A, 300 000 galones; la compañía B, 400 000 galones; la compañía C, 700 000 galones. El costo por galón de combustible varía entre las compañías y entre los aeropuertos. La siguiente tabla da los precios por galón que establecieron los proveedores.

	Proveedor		
Aeropuerto	**A**	***B***	***c***
1	**$0.25**	**$0.30**	**$0.28**
2	**0.26**	**0.28**	**0.29**
3	**0.30**	**0.29**	**0.29**

Formúlese éste como un problema de PL.

7-19 El Prestigious Bank estima que para el año próximo tendrá $10 millones disponibles para préstamos. Hace varios tipos de préstamos a diferentes tasas de interés:

Tipo de préstamo	*Interés anual, %*	*Tipo de préstamo*	*Interés anual, %*
Personal tipo A	**8**	**Mejoras a casa habitación**	**10**
Personal tipo B	**12**	**Barco/casa móvil Pequeña**	**12**
Automóvil	**10**	**empresa**	**9**
Hipoteca	**8**		

Las restricciones legales y las políticas del banco colocan los siguientes límites sobre los préstamos: (a) El total de préstamos personales no puede exceder el 15% de la cantidad total de préstamos, *(b)* Los préstamos para mejoras a casa habitación más los préstamos para barcos y casas móviles no pueden exceder el 20 % de la cantidad total de préstamos, (c) Los préstamos a pequeñas empresas no debe exceder el 30% de la cantidad total de préstamos, *(d)* Cada préstamo personal tipo A, hipoteca y a pequeñas empresas debe sumar, por lo menos, 10% del total de los préstamos. Naturalmente, el banco quiere maximizar el interés que recibe sobre los préstamos. Formúlese éste como un problema de PL.

7-20 La Apple County, compañía de transporte escolar, ha recibido órdenes de una corte federal de transportar estudiantes de secundaria para cumplir con los requerimientos de integración racial. El condado tiene tres secundarías. Los estudiantes provienen de seis áreas dentro del condado que tienen la siguiente composición:

Área	***Número de estudiantes***	*Porcentaje* ***de*** *minoría*	***Área***	*Número de estudiantes*	*Porcentaje de minoría*
1	**1500**	20	**4**	**1600**	**70**
2	**800**	15	**5**	**1 100**	**50**
3	**900**	30	**6**	**700**	**10**

Para propósitos de planeación, se usa la distancia que hay desde el centro de cada área a cada escuela secundaria, como la distancia de transporte para todos los estudiantes en esa área. Estas distancias (en millas) son:

		Área			
Escuela	*Capacidad*	***1***	**2**	*3*	***456***
1	**2000**	**3**	**2.6**	**2**	**123.1**
2	**2500**	**1**	**2**	**2.5**	**331.4**
3	**3000**	**3**	**2.8**	**1.5**	**212.5**

El reglamento de la corte pide que cada escuela tenga, por lo menos, 25% y cuando mucho 50% de los estudiantes de la minoría. La Apple County desea minimizar el total de millas-estudiante de transporte. Formúlese la función objetivo y las restricciones para este problema.

ESTUDIO DE UN CASO: MADISON WIRE COMPANY

La Madison Wire Company es una fábrica de alambre de cobre. Ben Williams, presidente de la compañía, acaba de recibir un memorándum de Cindy Carroll, una de sus más jóvenes ingenieros industriales.

Memorándum

A: Ben Williams

De: Cindy Carroll

Asunto: un nuevo enfoque a la producción de cobre

Con la próxima compra de un nuevo horno de fundición para producir cobre, parece el momento oportuno para revisar nuestros métodos de producción. Estamos aplicando los mismos métodos no muy científicos que se han empleado desde que la compañía comenzó sus operaciones. Pienso que puede usarse una técnica conocida como programación lineal para obtener ahorros considerables.

Permítame considerar brevemente nuestro método actual. Como usted sabe, pueden introducirse en el horno una variedad de ingredientes para producir

cobre. Mucho depende de lo que se tiene a mano ese día. Joe Adams toma la decisión, como lo ha hecho durante los últimos 25 años. No es una decisión fácil. Es evidente que se quieren mantener bajos los costos de producción. Los ingredientes que se introducen en el horno deben interactuar para producir cobre. Además, las reacciones químicas deben ser tales, que el cobre producido sea lo bastante viscoso para fluir fuera del horno. Si no lo es, el cobre se solidifica en los conductos y debe ser despegado: procedimiento muy tardado y costoso. Quisiera identificar los problemas que tiene el método actual. Primero, Joe se retirará en unos dos años y no existe un sustituto obvio. Segundo, nunca se sabe si estamos minimizando los costos de producción. Tercero, algunas veces el cobre de hecho se solidifica.

Pienso que puede aplicarse la programación lineal todos los días para decidir qué ingredientes deben ponerse en el horno. Una vez desarrollado el modelo, la capacidad especial como la de Joe ya no es necesaria. También tendremos más confianza en que se están minimizando los costos. Además se podría eliminar el problema de la solidificación.

Ben Williams sabía un poco sobre programación lineal por un programa de desarrollo para ejecutivos al que asistió años antes. Sin embargo, no se le había ocurrido este tipo de aplicación en su propia compañía. Decidió llamar a Cindy para tener una plática.

Preguntas

1 ¿Es ésta una aplicación potencial de programación lineal? Si lo es, identifíquese la forma de la función objetivo y de las ecuaciones de las restricciones.

2 Si se formara un grupo para desarrollar un modelo apropiado, ¿qué personal de la organización debe incluirse? ¿Qué capacidad o conocimientos especiales debe tener cada quien?

BIBLIOGRAFÍA

Anderson, David R., Dermis J. Sweeney y Thomas A. Williams: *An Introduction to Management Science* (St. Paul, Minn.: West Publishing, 1976).

Baiantfy, Joseph L.: "A Mathematical Programming System for Food Management Applications," *Interjaces* vol. 6, núm 1, parte 2 (noviembre, 1975), pp. 13-31.

Cooper, L. y D. Steinberg: *Linear Programming* (Philadelphia: Saunders, 1974). Daellenbach, H. C, y E. C. Bell: *User's Guide to Linear Programming* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1970).

Darnell, D. y Carolyn Loflin: "National Airlines Fuel Management and Allocation Model," *Interfaces,* vol. 7, núm. 2 (febrero 1977), pp. 1-16.

Kotak, Dilip B.: "Application of Linear Programmingto Plywood Manufacture," *Interfaces* vol. 7, núm. 1, parte 2 (noviembre 1976), pp. 56-68.

Levin, R. L. y R. P. Lamone: *Linear Programming for Management Decisions* (Homewood 111.: Irwin, 1969).

Loomba N. Paul: *Management —A Quantitative Perspective* (New York: Macmillan, 1978).

Sposito, V. A.: *Linear and Nonlinear Programming* (Ames, Iowa: Iowa State University, 1975).

Strum, J. E.: *Introduction to Linear Programming* (San Francisco: Holden Day. 1972).

8

PROGRAMACIÓN LINEAL: SOLUCIÓN POR EL MÉTODO SÍMPLEX

Conoces mis métodos, Watson.

Las memorias de Sherlock Holmes

"¡Excelentel", grité [Watson].
"Elemental", dijo él [Holmes].

Ibíd.

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje
Inicio: restricciones aumentadas
El método símplex en forma global
Construcción de la tabla símplex inicial
  La tabla símplex inicial
  Ejercicios de práctica (8-1)
El método símplex (maximización)
  Prueba de optimalidad de la solución
  Identificación de la variable que entra y de la que sale
  Revisión de la tabla
    Fin del ejemplo
  Interpretación económica del método símplex
  Resumen del método símplex
  Ejercicios de práctica (8-2)
Minimización con símplex
  Un ejemplo
  Ejercicio de práctica (8-3)
Manejo de casos especiales
  Condición: soluciones múltiples
  Condición: sin soluciones factibles (restricciones en conflicto)
  Condición: solución no acotada
  Síntoma: Empate para la variable que entra
  Síntoma: Empate para la variable que sale (degeneración)
Precios sombra y la solución dual
Precios sombra La solución dual
Análisis de sensibilidad
  Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo
    Variable fuera de la solución
    Variable en la solución
  Sensibilidad en el lado derecho (alcance del precio sombra)
    Variable de holgura en la solución

Variable de excedente en la solución
Holgura o excedente fuera de la solución
Sensibilidad en los coeficientes de las restricciones
Si se agrega una nueva variable
Si se agrega una nueva restricción
Solución en computadoras
Resumen
Ejercicios
Estudio de un caso: Bithlo Electric
Bibliografía

Las relaciones en las restricciones de un problema de PL forman un conjunto de ecuaciones simultáneas.[1] Se recordará del estudio del álgebra que un sistema de ecuaciones lineales simultáneas tiene una solución única *si* el número de ecuaciones independientes es igual que el número de variables. Entonces, si se tienen, por ejemplo, tres ecuaciones con tres incógnitas, puede encontrarse una solución única para cada variable. ¿Qué pasa si hay más variables que ecuaciones, por ejemplo, cuatro variables y dos ecuaciones? Entonces es posible obtener muchas soluciones; en general, un número infinito de soluciones. Éste es el tipo de situación a la que se aplica programación lineal.

En 1947 George Dantzig, quien en ese tiempo estaba comisionado en la Fuerza Aérea de Estados Unidos, desarrolló el "método símplex". Demostró que podía usarse una ecuación criterio (la función objetivo) para seleccionar de manera sistemática una solución "óptima" de entre muchas soluciones posibles. Además, éste era un método general que se podía aplicar a problemas de cualquier tamaño. Las únicas limitaciones prácticas son las de tiempo, costo y disponibilidad de una computadora.

En este capítulo se describe el método símplex. Al estudiarlo, podría el lector pensar que se le puso el nombre equivocado y que debiera llamarse "método cómplex", por su complejidad. Pero no debe perderse de vista que éste es un método general; funciona para cualquier problema de PL. Para ciertos casos especiales, existen métodos más fáciles de solución (dos de estos casos se describen en el Capítulo 10). Además, una vez que el lector haya aprendido y practicado el método símplex, con seguridad encontrará apropiado el nombre (sólo un poco exagerado). Lo más importante es que el conocimiento de este método debe ampliar la idea del funcionamiento de la PL y estimular la imaginación para las aplicaciones a problemas de la vida real.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo el lector aprenderá:

1 Cómo preparar correctamente un problema de PL antes de aplicar el método símplex
2 Cómo aplicar el método símplex a cualquier problema de PL
3 Cómo interpretar la solución símplex, incluyendo la solución dual y los precios sombra

[1] Recuérdese, según el capítulo 7, que cualquier desigualdad puede convertirse en una igualdad insertando una variable de holgura o una de excedente. Esto se analiza con más detalle en este capítulo.

4 Cómo aplicar análisis de sensibilidad para encontrar el alcance de valores para el cual los precios sombra o los coeficientes de la función objetivo son válidos

5 El significado de los siguientes términos:

Aumento	Renglón o columna clave
Método símplex	Elemento de intersección
Criterio símplex	Análisis de sensibilidad

INICIO: RESTRICCIONES AUMENTADAS

El método símplex utiliza una tabla *(o tableau),* en la cual hay una columna para cada variable y un renglón para cada restricción. Además, cada restricción se debe expresar en lo que algunas veces se llama la forma *estándar:* como una igualdad. Es decir, cada restricción en el problema de PL primero se debe aumentar con variables extra para convertirla en igualdad. Se describirá cómo se aumentan las restricciones y después se analiza en forma breve el método símplex.

Cualquier desigualdad puede convertirse en una igualdad agregando (o restando) sólo una variable extra. Entonces, una restricción del tipo ≤:

se convierte en $7X_1 + 7X_2 \leq 49$

$$7X_1 + 7X_2 + S_3 = 49$$

Se ha *agregado* una *variable de holgura* para que absorba la holgura, o la diferencia en la que $7X_1 + 7X_2$ puede ser menor que 49. El aumento de las restricciones del tipo ≤ siempre se debe hacer de esta manera.
De igual forma, una restricción del tipo ≥:

se convierte en $X_2 \geq 2$

$$X_2 - S_4 = 2$$

Se ha *restado* una *variable de excedente* para que consuma el exceso de X_2, o sea, lo que se pasa de 2. No obstante, en este caso debe agregarse otra variable. Esta variable extra, llamada *variable artificial* se aumenta como sigue:

$$X_2 \geq 2$$

se convierte en

$$X_2 - S_4 + A_5 = 2$$

La razón de esto es que, si no se agrega la variable artificial, se violarían las restricciones de no negatividad. Para comprenderlo, se dejará sin

aumentar. El método símplex comienza por hacer todas las variables reales iguales que cero. Entonces:

$$X_2 - S_4 = 2$$

Sea $X_2 = 0$, entonces

$$-S_4 = 2$$

o

$$S_4 = -2 \text{ (que viola la restricción de no negatividad)}$$

No importa el hecho de que $X_2 = 0$ viola la restricción original. En términos algebraicos es legítimo. La variable artificial opera para mantener todas las variables no negativas cuando X_2 es menor que 2. Si $X_2 = 0$, entonces $S_4 = 0$ y

$$X_2 - S_4 + A_5 = 2$$
$$A_5 = 2$$

En resumen, se aumentó una restricción del tipo ≥ restando una variable de excedente y sumando una variable artificial ($-S + A$).

¿Qué sucede con las restricciones que ya son una igualdad? La respuesta técnicamente correcta es que no es necesario hacer nada si una de las variables tiene coeficiente uno *y* coeficientes cero en todas las otras restricciones. De otra manera, debe agregarse una variable artificial. Se sugiere siempre agregar la variable artificial y olvidar el caso especial de uno/cero en los coeficientes. La razón para aumentar variables artificiales después será más clara.

Todas las variables que aparecen en una restricción también deben aparecer en la función objetivo. Así, cada variable de holgura, de excedente o artificial que se aumenten también deben agregarse a la función objetivo. ¿Cuáles son sus coeficientes?

Para las variables de holgura o de excedente la respuesta es fácil: siempre son cero. Esto significa que no importa si están en la solución. Ahora bien, las variables artificiales tienen un problema diferente: *no* se desea que estén en la solución final. Recuérdese que sólo se usan para evi-

TABLA 8-1
Reglas de aumento

Tipo de restricción	*Agréguese a la*	
	Restricción	*Función objetivo*
≤	$+S$	$+0 \cdot S$
≥	$-S + A$	Max: $+0 \cdot S - MA$
		Min: $+0 \cdot S + MA$
=	$+A$	Max: $-MA$
		Min: $+MA$

tar que las variables de excedente violen las restricciones de no negatividad (y para las ecuaciones). El que una variable artificial esté en la solución final significa que algo anda mal. Para mantenerlas fuera de la solución, se les asignará un coeficiente en la función objetivo por lo menos 100 veces más grande que cualquier otro coeficiente *y* con el signo adecuado para garantizar que salgan. Así, al maximizar se asignará —*MA,* en donde Mes un número muy grande.[2] Si se trata de minimizar, se seleccionará + *MA*.

Estas reglas para el aumento se resumen en la tabla 8-1. Nótese que hay reglas fijas para cada tipo de restricción y que las variables de holgura y de excedente siempre tienen coeficiente cero en la función objetivo. Lo único que cambia es el signo para las variables artificiales en la función objetivo: se selecciona de manera que estas variables salgan de la solución final.

EL MÉTODO SÍMPLEX EN FORMA GLOBAL

El método símplex no es más que un enfoque complicado de prueba y error para resolver problemas de PL. Recuérdese el método de prueba y error que se describió en el capítulo anterior al resolver problemas en forma gráfica. Ahí se aprovechó el hecho de que por lo menos un punto de intersección de la frontera extrema es óptimo. Sencillamente se probaron todos estos puntos usando la función objetivo. El método símplex también emplea los puntos de intersección, pero no prueba *todos* los puntos. Comienza en el origen y selecciona *los que dan la mayor mejora* en el valor de la función objetivo. Así, al moverse de un punto de intersección a otro, la función objetivo siempre está mejorando. Esto hace que el método símplex sea más eficaz que el método del capítulo anterior.

En el diagrama de flujo de la figura 8-1 se muestra el procedimiento completo. Se construye una tabla con una solución inicial y se prueba si esa solución es óptima. Si no es óptima (la solución inicial *nunca* lo es), se analiza la tabla y se prueba la nueva solución. Este procedimiento se repite hasta que se encuentra una solución óptima.

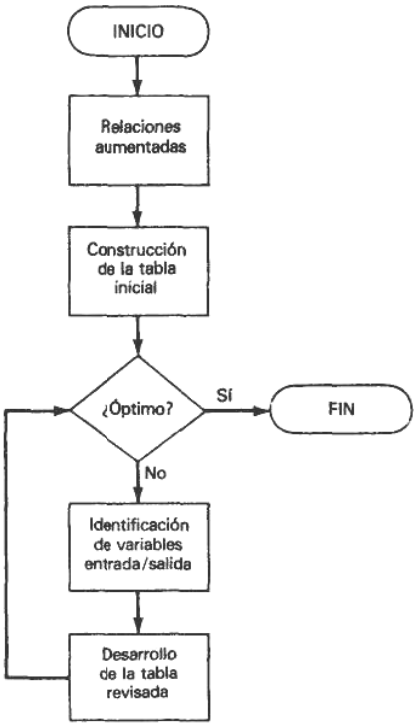
Nótese que cada tabla representa una nueva solución; en esta forma, *tabla* y *solución* son sinónimos. La función objetivo debe también mejorar en cada nueva tabla.

CONSTRUCCIÓN DE LA TABLA SÍMPLEX INICIAL

La forma general de la tabla símplex se muestra en la tabla 8-2. La parte central de la tabla contiene los coeficientes de las ecuaciones de restricción, con un renglón para cada una. Las variables se encuentran como encabezado de las columnas (incluso las variables de holgura, las de excedente y las artificiales; el ejemplo contiene sólo variables de holgura). Arriba de cada variable se escriben los coeficientes correspondientes de la

[2] Por conveniencia, se usa *M* como el coeficiente de la función objetivo. Significa simplemente "un número muy grande", más grande que cualquier otro coeficiente en la función objetivo. Algunos programas de computadora requieren que se introduzca un valor especifico para *M.* En ese caso, debe usarse la regla de "las 100 veces".

Figura 8-1
Procedimiento símplex



función objetivo. El renglón de costo de oportunidad (Z_i) y el renglón de criterio símplex ($C_i - Z_i$) se explican después.

Las columnas de las "variables básicas" muestran las variables que están *dentro* de la solución (todas las demás tienen valor cero). Los valores de las variables básicas en esta solución se muestran en la columna de "valores de solución". Entonces, para el ejemplo de la tabla 8-2, la variable S_{n+1} tiene valor b_1, $S_{n+2} = b_2$, etc.

La tabla inicial

La tabla símplex es menos terrible de lo que parece en la tabla 8-2. Para indicar cómo se encuentra la solución inicial (tabla), se analiza un problema muestra.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & Z = 7X_1 + 10X_2 \\ \text{Restricciones:} \quad & 7X_1 + 7X_2 \leq 49 \\ & 10X_1 + 5X_2 \leq 50 \\ & X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El primer paso es aumentar cada restricción. Para la primera, se agrega una variable de holgura.

$$7X_1 + 7X_2 + S_3 = 49$$

De igual manera para la segunda restricción:

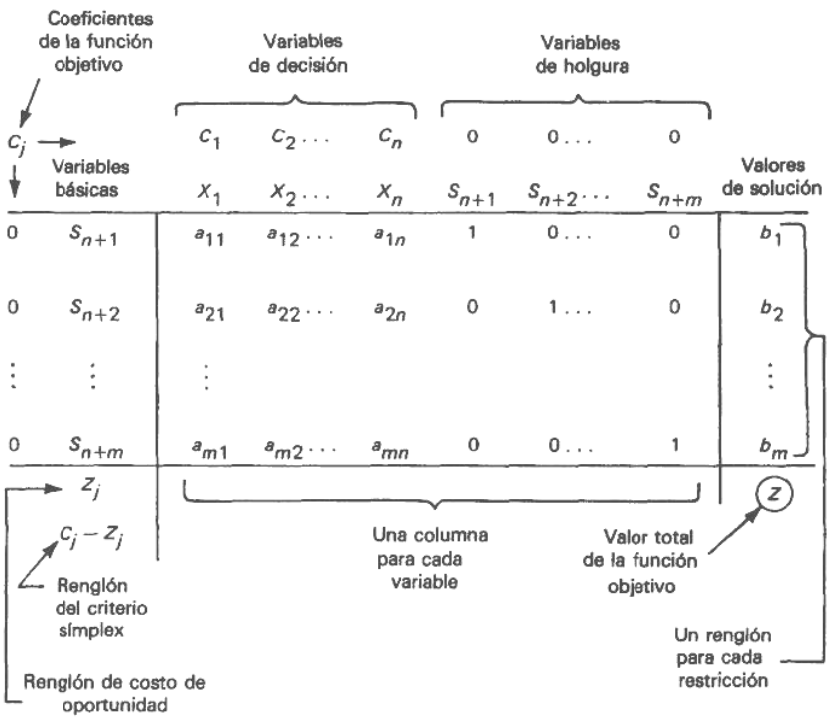
$$10X_1 + 5X_2 + S_4 = 50$$

Cada una de las variables de holgura tienen coeficiente cero en la función objetivo. Más tarde será de utilidad si se escriben las relaciones aumentadas con todas las variables para cada restricción. (Se usará un coeficiente cero si la variable no debe aparecer). Entonces,[3]

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } Z &= 7X_1 + 10X_2 + 0S_3 + 0S_4 \\ \text{Restricciones: } & 7X_1 + 7X_2\ 1S_3 + 0S_4 = 49 \\ & 10X_1 + 5X_2 + 0S_3 + 1S_4 = 50 \end{aligned}$$

Con esta forma de escribir las ecuaciones de restricción, pueden escribirse directamente los coeficientes en la tabla. Esto se ilustra en la tabla 8-3. ¿Qué variables están *dentro* de la solución inicial (es decir, son básicas)? La regla es: selecciónese la variable de holgura o artificial que

TABLA 8-2
Tabla símplex general



[3] Nótese que las restricciones de no negatividad están implícitas; por tanto, no se escriben.

TABLA 8-3
Inicio de la tabla

C_j		7	10	0	0	
	Variables básicas	X_1	X_2	S_3	S_4	Valores de solución
		7	7	1	0	49
		10	5	0	1	50
	Z_j					
	$C_j - Z_j$					

corresponde a cada restricción (nunca una variable de excedente). Así, S_3 está en la solución para la restricción uno y S_4 está en la solución para la segunda restricción. Esto se ilustra en la tabla 8-4. Sus coeficientes correspondientes a la función objetivo también se muestran en la columna C_j. Esto completa el proceso de construcción de la solución inicial.

Se necesita una pequeña explicación sobre la regla de selección de las variables básicas. El método símplex comienza en el origen, es decir, con todas las variables de decisión (las X) iguales que cero. Entonces, para el ejemplo,

$$7X_1 + 7X_2 + S_3 + 0S_4 = 49$$
$$X_1 = X_2 = 0$$
$$S_3 = 49$$

y

$$10X_1 + 5X_2 + 0S_3 + S_4 = 50$$
$$X_1 \; X_2 = 0$$
$$S_4 = 50$$

Así, la solución inicial es $S_3 = 49$, $S_4 = 50$. Esto coincide con la tabla 8-4.

Una verificación útil que puede utilizarse para cualquier solución (no sólo para la inicial) es que *la columna de cada variable básica debe tener un +1 en su renglón correspondiente y 0 en todos los demás renglones.*[4] Esto significa que las variables de excedente nunca deben aparecer en la solución (tienen coeficiente – 1).

Antes de pasar al método símplex, el lector debe trabajar en los siguientes ejercicios de práctica. Mientras más familiarizado esté con el aumento y la tabla inicial, más fácil le será entender lo que sigue.

[4] Si se ha estudiado teoría de matrices, puede reconocerse que los renglones y las columnas de las variables básicas forman una *matriz idéntica.* Esto se debe cumplir siempre para cualquier solución. También ésta es la razón por la cual una ecuación de restricción que tiene el coeficiente de una variable igual a 1 y a cero en las demás restricciones no necesita aumento. Esa variable puede usarse en la solución inicial.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 8-1

Hágase el aumento de los siguientes problemas y constrúyase la tabla de la solución inicial:

a Maximizar: $Z = 7X_1 + 10X_2$
Sujeta a: $7X_1 + 7X_2 \leq 49$
$10X_1 + 5X_2 \leq 50$
$X_2 \geq 2$

b Maximizar: $Z = 49D_1 + 50D_2 - 2D_3$
Sujeta a: $7D_1 + 5D_2D_3 \leq 10$
$7D_1 + 10D_2 \geq 7$

EL MÉTODO SÍMPLEX (MAXIMIZACIÓN)

Existen tres operaciones que componen la esencia del método símplex:

a Prueba de la optimalidad de la solución
b Identificación de las variables que entran y que salen
c Revisión de la tabla para desarrollar una nueva solución

Para cada una de estas operaciones se requieren ciertos cálculos; en esta sección se enseña cómo hacerlos. Más tarde se explora el significado de los cálculos, con objeto de explicar el *porqué* al igual que el *como* del método símplex. Se continuará el ejemplo de maximización de la sección anterior (véase la tabla 8-4). Como referencia, en la figura 8-2 se muestra la solución gráfica del problema.

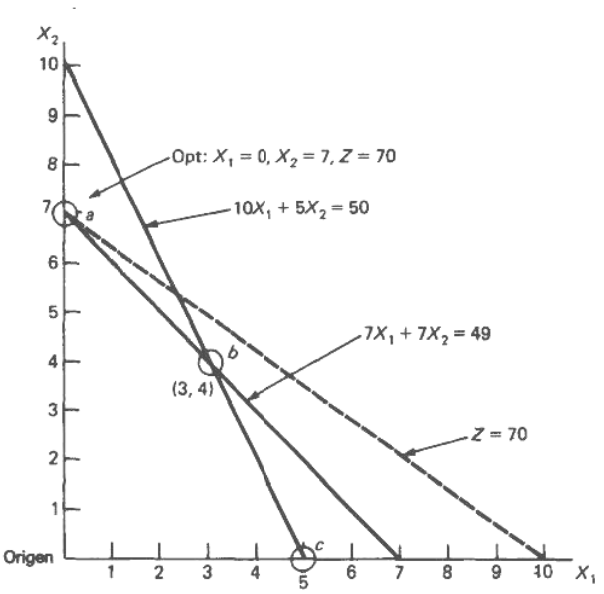
Prueba de optimalidad de la solución

Para probar una solución, deben calcularse el renglón del *costo de oportunidad* (Z_j) y el renglón del *criterio símplex* $(C_j - Z_j)$. El renglón Z_j se prepara primero, esto se ilustra en la tabla 8-5 para la primera columna. Para

TABLA 8-4
La tabla símplex inicial

C_j	Variables básicas	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	Valores de solución
0	S_3	7	7	1	0	49
0	S_4	10	5	0	1	50
	Z_j					
	$C_j - Z_j$					

FIGURA 8-2
Solución gráfica.



encontrar Z en cualquier columna dada *j*, se multiplica el coeficiente en la función objetivo de cada variable básica por el coeficiente de la restricción en ese mismo renglón y la columna *j*. Esto se hace para cada renglón y después se suman los productos. Entonces, para Z_1:

$$\begin{aligned} & 0*7 \\ + \ & 0*10 \\ Z_1 = \ & 0 \end{aligned}$$

En forma algebraica, esto es:

$$Z_j = \sum_{\text{todos los renglones } i} C_i A_{ij}$$

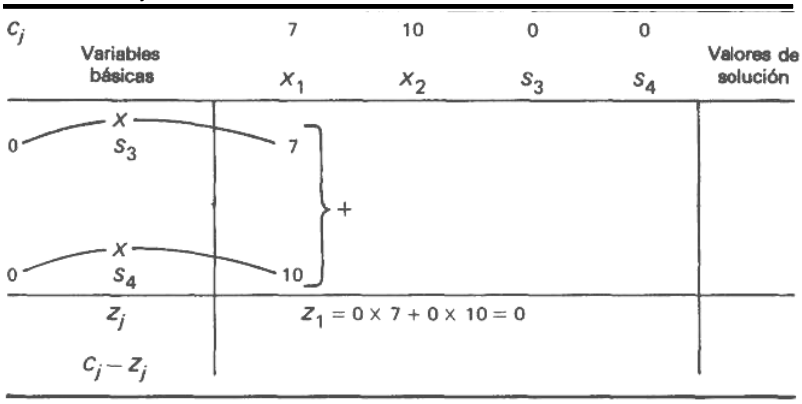
En la tabla 8-frse hizo este paso completo para todas las variables Z_j. En este caso todas resultaron cero debido a que las C_i eran cero para todas las variables básicas. Nótese que el valor total de la función objetivo para esta solución también se encuentra llevando a cabo este tipo de multiplicación sobre la columna de "valores de solución".

El siguiente paso es calcular los elementos en el renglón $C_i - Z_j$. El valor de C_i está escrito arriba de cada columna. Sólo tiene que restarse cada Z_j de cada C_i y registrar la diferencia. Esto se muestra en la tabla 8-7. Como todos los valores de Z_j resultaron cero, el renglón $C_i - Z_j$ está formado por los coeficientes de la función objetivo original.

Ahora se puede realizar la prueba de optimalidad. Esto se hace inspeccionando el renglón del criterio símplex ($C_i - Z_j$) y aplicando la siguiente regla (al maximizar):[5]

[5] Para minimizar, la regla se invierte: $C_j - Z_j \geq 0$.

TABLA 8-5
Cálculo de Z_j



La solución es óptima si $C_j - Z_j \leq 0$ para toda j

Es decir, la solución óptima se ha encontrado cuando todas las variables tienen un valor negativo o cero en el renglón $C_i - Z_i$. Si cualquiera de estos valores es positivo, significa que la función objetivo puede incrementarse agregando la variable a la solución; por tanto, no es óptima. En la tabla 8-7, como X_1 y X_2 tienen valores positivos (7 y 10), la solución no es óptima.

La solución inicial nunca es óptima, ya que el método simples comienza siempre en el origen (véase la Fig. 8-2). Nótese también que las variables *básicas* siempre tienen cero en el valor de $C_i - Z_i$, debido a que están en la solución.

Identificación de la variable que entra y la que sale

Como ya se mencionó, el método símplex se mueve de un punto de intersección a otro, siempre mejorando la solución. Esto significa que con cada cambio en la solución una de las variables básicas debe quitarse (variable

TABLA 8-6
Renglón Z_j completo

C_j	Variables básicas	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	Valores de solución
0	S_3	7	7	1	0	49
0	S_4	10	5	0	1	50
	Z_j	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$					Función objetivo para esta solución

TABLA 8-7
Cálculo de $C_j - Z_j$

C_j	Variables básicas	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	Valores de solución
0	S_3					
0	S_4					
	Z_j	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	7	10	0	0	

$C_1 - Z_1 = 7 - 0 = 7$

que sale) y debe incluirse una nueva variable (variable que entra).

Primero se identifica la variable que *entra.* Al maximizar, será *la variable con el mayor valor positivo del criterio símplex.*[6] En el ejemplo, ésta es X_2 como se muestra en la tabla 8-8. Denomínese, ésta, *columna pivote.*

El proceso de encontrar la variable que sale requiere algunos cálculos. Se necesita saber el máximo número de unidades que es posible asignar a la variable que entra sin que ninguna variable básica se vuelva negativa (lo cual violaría las restricciones de no negatividad). Para comprobar esto, se divide el valor de la solución para cada variable básica entre el coeficiente de la *columna pivote* que corresponde al renglón. Esto se muestra en la tabla 8-9. Entonces, puede asignarse hasta 7 unidades a X_2 antes que S_3 se vuelva negativa y hasta 10 unidades antes que S_4 se vuelva negativa. Se escoge el *número positivo más pequeño.* (Si se escogiera el más grande, algunas variables serían negativas). Por tanto, S_3 se convierte en la variable que sale. Llámese éste, *renglón pivote.*

¿Qué pasa si al dividir se obtiene un número *negativo?* Eso significa que la variable básica *se incrementa* cuando se incluye la nueva variable. Como se está preocupado por las *disminuciones,* los cocientes negativos pueden ignorarse.

En este momento puede desarrollarse una nueva solución revisando la tabla. La nueva solución tendrá X_2 en el primer renglón en lugar de S_3. En el segundo renglón todavía aparecerá S_4 como variable básica, pero cambiarán los coeficientes del renglón.

Revisión de ¡a tabla

Al trabajar problemas con el método símplex en forma manual, se deben tratar de evitar os errores aritméticos. Este paso de revisar la tabla ofrece el mayor riesgo de error, pues se tienen que hacer muchos cálculos. El

[6] Para minimizar se elige la variable con el valor más *negativo* en el criterio símplex.

TABLA 8-8
Identificación de la variable que entra

C_j	Variables básicas	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	Valores de solución
0	S_1	7	7	1	0	49
0	S_2	10	5	0	1	50
	Z_j	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	7	(10)	0	0	
			Valor positivo más grande (columna pivote)			

procedimiento que se describe está diseñado para proporcionar espacio para trabajar en los cálculos y mantiene un registro que puede escudriñarse en caso de error.

Para llevar a cabo el proceso de revisión se necesitan dos tablas: la actual y una nueva. Siempre que se elabore una tabla, debe dejarse un renglón en blanco abajo de cada renglón de variables básicas. Este espacio sirve para escribir los cálculos del proceso de revisión.

Los elementos de la nueva tabla se generan en *un renglón a la vez* usando dos reglas diferentes, una para el *renglón pivote* (el de la variable que sale) y otra para los *demás renglones.*

Para revisar el renglón pivote sólo se divide cada coeficiente en ese renglón entre su *elemento intersección.* El elemento intersección es el coeficiente que se encuentra en la intersección de la columna pivote y un renglón dado, en este caso el renglón clave. En la tabla 8-10 se hace esta operación. El resultado se escribe en la tabla que *se tiene* inmediatamente abajo del renglón de la variable que sale *y* en la *nueva* tabla como renglón de la variable que entra. Nótese que la columna del "valor de solución" también se divide para obtener el valor de la solución para la nueva variable ($X_2 = 7$). Algebraicamente, lo que se hizo es: *para el renglón pivote,*

$$\text{Nuevo elemento del renglón pivote} = \frac{\text{elemento del renglón pivote que se tiene}}{\text{elemento intersección}}$$

Para cada uno de *los demás* renglones es necesario un proceso de dos pasos. Primero, se multiplica el *nuevo renglón pivote* por el elemento intersección del renglón que se está revisando y se registra el producto abajo de ese renglón. Esto se hace en la tabla que se tiene como se muestra en la tabla 8-11. Para el renglón S_4, el elemento que interseca la columna pivote es 5. El renglón S_3 es el renglón pivote y sus *nuevos* valores se colocan abajo de él (1, 1, 1/7, 0, 7). Estos nuevos elementos se multiplican por 5 y el resultado se escribe debajo del renglón S_4 que se tiene (5, 5, 5/7, 0, 35).

TABLA 8-9
Identificación de la variable que sale

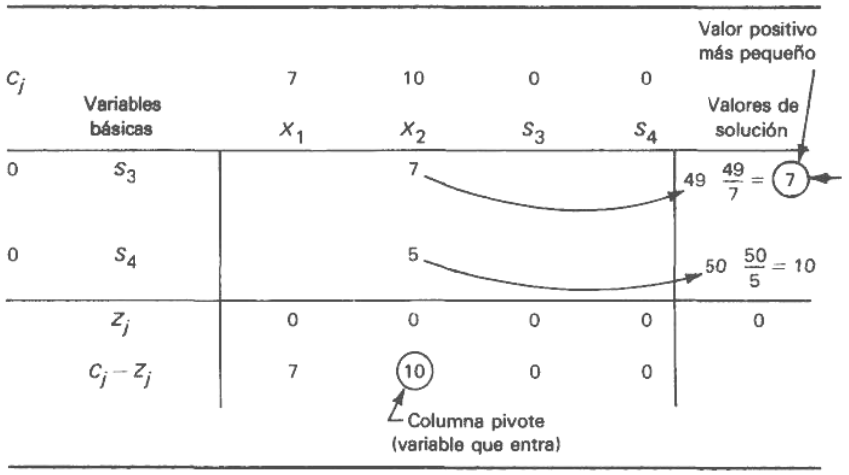


TABLA 8-10
Revisión del renglón pivote

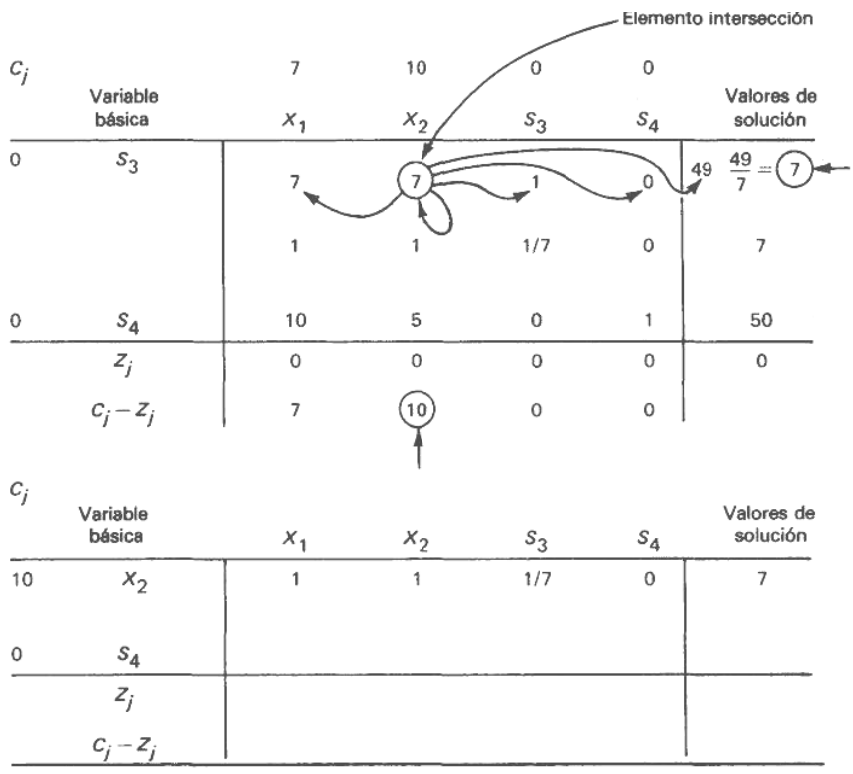
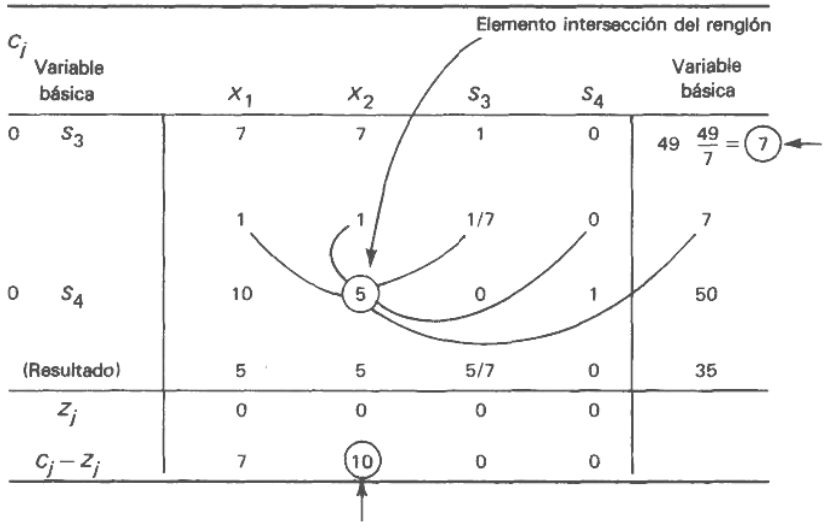


TABLA 8-11
Revisión de un renglón no pivote: paso 1 (tabla que se tiene)



Ahora estos resultados se restan del renglón S_4 *que se tiene* y las diferencias se registran como los *nuevos* elementos en la *nueva* tabla. Esto se lleva a cabo en la tabla 8-12. Algebraicamente, *para el renglón no pivote,*

$$\begin{pmatrix}\text{Nuevo elemento del renglón}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{elemento del renglón que se tiene}\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}\text{elemento intersección}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{elemento correspondiente del nuevo renglón pivote}\end{pmatrix}\right]$$

La tabla completa para la segunda solución se muestra en la tabla 8-13. Para esta solución $X_2 = 7$ y $S_4 = 15$ ($X_1 = S_3 = 0$). Esto conduce otra vez al principio del ciclo, al punto en que hace la prueba de optimalidad de la solución. Para resolver el problema, se debe continuar iterando de solución en solución hasta encontrar la óptima. Para problemas pequeños, sólo se necesitan unas cuantas iteraciones; los problemas grandes pueden requerir más de 100.

Fin del ejemplo

Obsérvese la figura 8-2. Nótese que se ha ido del origen ($X_1 = X_2 = 0$) al punto ($X_1 = 0$, $X_2 = 7$). Del diagrama puede observarse que ésta es la solución óptima, con $Z = 70$. Se verá si el método símplex da el mismo resultado.

Para probar la segunda solución, se calculan los renglones del costo de oportunidad (Z_j) *y* del criterio símplex ($C_j - Z_j$). Esto se hace en la tabla 8-14. Como ejemplo, se tiene que, para Z_3:

$$\begin{aligned} & 10 * {}^{1}/_{7} \\ & +0 * (-{}^{5}/_{7}) \\ Z_3 = & \ {}^{10}/_{7} \end{aligned}$$

TABLA 8-12
Revisión de un renglón no pivote: paso 2

C_j	Variables básicas	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	Valores de solución
0	S_3					
0	S_4	10 / 5	5 / 5	0 / 5/7	1 / 0	50 / 35
	Z_j					
	$C_j - Z_j$					

C_j	Variables básicas	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	Valores de solución
	X_2					
	S_4	5	0	$-\frac{5}{7}$	1	15
	Z_j					
	$C_j - Z_j$					

y

$$C_3 - Z_3 = 0 - {}^{10}/_{7} = -{}^{10}/_{7}$$

Observando el renglón $C_j - Z_i$, todos los elementos son cero o negativos; por tanto, la solución es óptima (y Z = 70).

Interpretación económica del método símplex

En esta sección se proporcionan algunas explicaciones intuitivas de los pasos del método símplex. Una explicación matemática completa requiere el álgebra matricial y está fuera del alcance de este texto. Sin embargo, el razonamiento que lo respalda es sencillo. (Sin duda, Sherlock Holmes lo llamaría elemental). Considérese la solución final del ejemplo, dada en la tabla *8-14b*.

¿Qué representan en realidad los coeficientes en la parte central de la tabla? Recuérdese que en la formulación de un problema de PL un coeficiente en una restricción representa la tasa de sustitución entre su variable asociada y un recurso. En el símplex, de nuevo los coeficientes son *tasas de sustitución* o *de cambio,* pero esta vez entre dos variables. Por ejemplo, en la primera columna de la tabla 8-14, el 5 representa la tasa de cambio entre X_1 y S_4. En particular, si se aumenta el valor de X_1en la solución en

TABLA 8-13
Segunda tabla de solución

C_j	Variables básicas	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	Valores de solución
10	X_2	1	1	$\frac{1}{7}$	0	7
0	S_4	5	0	$-\frac{5}{7}$	1	15
	Z_j					
	$C_j - Z_j$					

una unidad, el valor de S_4 tiene que disminuir 5 unidades. También, una unidad de X_1 desplazaría una unidad de X_2. De igual manera, una unidad de S_3 desplazaría 1/7 de unidad de X_2 y – 5/7 de unidad de S_4 (S_4, de hecho, aumentaría en 5/7 de unidad).

Al realizar la prueba de optimalidad, se quiere conocer los efectos de introducir una nueva variable en la solución. Esto se hace en dos pasos. Primero se encuentra lo que "cuesta" introducir la nueva variable. Como la nueva variable desplaza algunas variables básicas actuales, la función objetivo se reduce en la contribución que hacen las variables básicas. Así. para X_1, el introducir una unidad desplaza una unidad de X_2, que tiene una contribución unitaria de 10. Se pierde 1 x 10 = 10 del valor de la función objetivo. También se pierde 0 x 5 = 0 al desplazar parte de S_4. La pérdida total en la función objetivo es 10 + 0 = 10.

Éstos son los cálculos para Z_i. Se llama *costo de oportunidad,* porque muestra el castigo en que se incurre si se deja ir la "oportunidad" de mantener la solución tal como está y se introduce una nueva variable. Representa un costo o tasa unitaria.

Por supuesto, al agregar una unidad de una nueva variable a la solución, el valor de la función objetivo *aumentará* en una cantidad igual que el coeficiente en ella. Entonces, para comprobar si una variable se debe introducir, se compara su "contribución marginal" (el coeficiente en la función objetivo) con su costo de oportunidad: C_i — Z_i. Entonces, el renglón del criterio símplex muestra el efecto *neto* que tendría una unidad de una nueva variable sobre la función objetivo. Para X_1 el efecto neto es 7 –10 = –3. Es decir, por cada unidad de X_1 que se introduce, la función objetivo disminuirá en 3 unidades.

Ahora puede observarse por qué la regla de optimalidad pide que todos los valores C_j — Z_j sean cero o negativos. Si alguno es positivo, significa que la función objetivo puede incrementarse con una solución diferente. En el caso de minimización, se cumple una lógica similar, excepto que los signos se cambian.

La comprobación para la variable que sale y las reglas para revisar el renglón pivote están diseñadas para mantener un balance apropiado entre los coeficientes. Ajustan las tasas de sustitución para reflejar correctamente la tasa de cambio entre las variables básicas y las otras en cada solución.

Tabla 8-14
Prueba de la segunda solución

(*a*) Valor de Z_j

C_j	Variable básica	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	Valores de solución
10	X_2	1	1	$\frac{1}{7}$	0	7
0	S_4	5	0	$-\frac{5}{7}$	1	15
	Z_j	10	10	$\frac{10}{7}$	0	70
	$C_j - Z_j$					

(*b*) Valor de $C_j - Z_j$

C_j	Variables básicas	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	Valores de solución
10	X_2	1	1	$\frac{1}{7}$	0	7
0	S_4	5	0	$-\frac{5}{7}$	1	15
	Z_j	10	10	$\frac{10}{7}$	0	70
	$C_j - Z_j$	−3	0	$-\frac{10}{7}$	0	

Nótese que no se está considerando el hecho de introducir una variable *básica* a la solución: ya está ahí. Así, las variables básicas siempre tienen un valor del criterio símplex de cero.

Resumen del método símplex

Los pasos para el método símplex son los siguientes:

1 Aumento completo del problema de PL usando variables de holgura, de excedente y artificiales, según se necesiten.
2 Construcción de la tabla inicial usando los coeficientes del problema aumentado con un renglón para cada restricción. Las variables básicas son las variables de holgura o las artificiales asociadas con cada restricción (todas las variables de decisión son cero).
3 Prueba de la solución calculando los renglones del costo de oportunidad (Z_j) y del criterio símplex (C_j — Z_j). La solución es óptima si todos los

valores $C_j - Z_i$ son negativos o cero cuando se está maximizando y positivos o cero cuando se está minimizando.

4 Si la solución no es óptima, se identifican la variable que entra y la que sale.

5 Se revisa la solución para desarrollar una nueva tabla. Primero se encuentra el nuevo renglón pivote:

$$\text{Nuevo elemento del renglón pivote} = \frac{\text{elemento del renglón pivote que se tiene}}{\text{elemento intersección}}$$

Después se revisan los otros renglones uno a la vez:

Nuevo elemento del renglón = elemento del renglón que se tiene — (elemento intersección **x** nuevo elemento del renglón pivote)

Regreso al paso 3.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 8-2

Ahora es el turno del lector. Resuélvase el siguiente problema con el método símplex.

$$\text{Maximizar: } Z = 10X_1 + 4X_2$$
$$\text{Restricciones: } 5X_1 + 10X_2 \geq 50$$
$$10X_1 + 6X_2 \geq 60$$

MINIMIZACIÓN CON SÍMPLEX

Cuando se quiere minimizar en lugar de maximizar, existe un cambio pequeño pero significativo. El criterio de optimalidad se convierte en:

La solución es óptima si: $C_j - Z_j \leq 0$ para toda j

Es decir, se deben tener todos los valores *no negativos* en el renglón del criterio símplex. Si algunos valores son negativos, la función objetivo puede *reducirse* introduciéndolos en la solución: se selecciona la variable con el valor más negativo de $C_j - Z_j$ como la variable que entra. Todas las demás operaciones se llevan a cabo exactamente en la misma forma que cuando se está maximizando.[7]

Ejemplo

Un breve ejemplo servirá para ilustrar el método símplex cuando se quiere minimizar. También mostrará como se trabaja con las variables de exce-

[7] Otra forma de minimizar es convertir el problema en un problema de maximización multiplicando la función objetivo por —1. Esto da valores negativos en la solución cuyo signo se debe cambiar para poderlos aplicar. No se recomienda este enfoque, ya que una solución directa es igual de sencilla.

dente y artificiales. Considérese el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & Z = 3X_1 + 8X_2 \\ \text{Restricciones: } & X_1 + 4X_2 \leq 3.5 \\ & X_1 + 2X_2 \leq 2.5 \end{aligned}$$

Para aumentar cada restricción, debe restarse una variable de excedente y agregarse una artificial. En la forma estándar, el problema es:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & Z = 3X_1 + 8X_2 + 0S_3 + MA_4 + 0S_5 + MA_6 \\ \text{Restricciones: } & X_1 + 4X_2 — S3 + A_4 + 0S_5 + OA_6 = 3.5 \\ & X_1 + 2X_2 + 0S_3 + 0A_4 — S_5 + A_6 = 2.5 \end{aligned}$$

Nótese que las variables artificiales tienen + *M* como coeficiente de la función objetivo para asegurar que salgan de la solución final.

La tabla símplex inicial para este problema se muestra en la tabla 8-15. Las variables artificiales son básicas con $A_4 = 3.5$, $A_6 = 2.5$. El renglón del criterio símplex dice que la solución no es óptima, ya que tanto X_1 como X_2 tienen valores negativos de $C_i — Z_{ij}$. Se selecciona X_2 que tiene el valor más negativo, como la variable que entra y los cocientes de la derecha indican que A_4 es la que sale. (Se continúa con la regla del valor *positivo* más pequeño para designar la variable que sale.)

Después de la revisión, en la tabla 8-16 se genera una segunda solución. La variable X_2 sustituye a A_4. De nuevo esta solución no es óptima, ya que X_1 y S_3 tienen valores negativos del criterio símplex. Como se puede ver, X es la variable que entra y A_6 la variable que sale.

La tercera solución, que ya es óptima, se muestra en la tabla 8-17. Todos los valores en el renglón del criterio símplex son ahora cero o positivos, lo cual indica optimalidad. La solución es $X_2 = 0.5$, $X_1 = 1.5$ y $Z = 8.5$.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 8-3

Resuélvase el siguiente problema con el método símplex.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & Z = 10X_1 + 8X_2 \\ \text{Restricciones: } & 5X_1 + 10X_2 \geq 50 \\ & 9X_1 + 8X_2 \geq 72 \end{aligned}$$

MANEJO DE CASOS ESPECIALES

Existen varias situaciones especiales que pueden encontrarse al aplicar el método símplex en forma manual. Los programas de computadora están diseñados para manejar la mayoría, pero ni aun estos señalan situaciones en que hay soluciones múltiples o no factibles. En lo que sigue, el lector debe poner atención en el síntoma, la condición que el síntoma indica y la acción que se debe tomar (si la hay).

TABLA 8-15
Solución inicial

C_j	Variables básicas	3 X_1	8 X_2	0 S_3	M A_4	0 S_5	M A_6	Valores de solución
M	A_4	1	4	−1	1	0	0	$3.5 \quad \frac{3.5}{4} = 0.875$ ←
M	A_6	1	2	0	0	−1	1	$2.5 \quad \frac{2.5}{2} = 1.25$
	Z_j	$2M$	$6M$	$-M$	M	$-M$	M	$6M$
	$C_j - Z_j$	$3-2M$	$8-6M$	M	0	M	0	

Número más negativo

Condición: soluciones múltiples

La presencia de soluciones óptimas adicionales se señala en el renglón C_j – Z_j de la tabla de la solución símplex final. Si C_j — $Z_j = 0$ para cualquier variable que no es solución, entonces existen soluciones óptimas múltiples. Esto puede ser muy importante, ya que amplía las posibles selecciones en la toma de decisiones administrativas.

Para ilustrar esta condición se citará de nuevo al primer ejemplo de este capítulo. Se efectúa un cambio pequeño pero significativo en los coeficientes de la función objetivo. El problema es ahora:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & Z = 8X_1 + 4X_2 \\ \text{Restricciones:} \quad & 7X_1 + 7X_2 \leq 49 \\ & 10X_1 + 5X_2 \leq 50 \end{aligned}$$

En la figura 8-3 se muestra la solución gráfica. Nótese que la función objetivo ahora es paralela a la segunda restricción. Ambos puntos *a y b* son so-

TABLA 8-16
Segunda solución

C_j	Variables básicas	3 X_1	8 X_2	0 S_3	M A_4	0 S_5	M A_6	Valores de solución
8	X_2	1/4	1	−1/4	1/4	0	0	$0.875 \quad \frac{0.875}{1/4} = 3.5$
M	A_6	1/2	0	1/2	−1/2	−1	1	$0.75 \quad \frac{0.75}{1/2} = 1.5$ ←
	Z_j	$2+M/2$	8	$-2+M/2$	$2-\frac{M}{2}$	$-M$	M	$7 + 0.75M$
	$C_j - Z_j$	$1-\frac{M}{2}$	0	$2-\frac{M}{2}$	$-2+\frac{3M}{2}$	M	0	

Número más negativo

TABLA 8-17
Solución final

C_j	Variables básicas	3 X_1	8 X_2	0 S_3	M A_4	0 S_5	M A_6	Valores de solucion
8	X_2	0	1	−1/2	1/2	1/2	−1/2	0.5
3	X_1	1	0	1	−1	−2	2	1.5
	Z_j	3	8	−1	1	−2	2	8.5
	$C_j - Z_j$	0	0	1	$M-1$	2	$M-2$	

Todos los $C_j - Z_j$ son positivos o cero

luciones óptimas y, por tanto, también lo es cualquier punto en la línea que los une.

Considérese ahora la solución del símplex. En la tabla 8-18 se muestra la tabla símplex final para este problema. Puede comprobarse que X_2, que no está en la solución final, tiene cero como valor de C_i — Z_i. Así, X_2 podría incluirse en la solución sin cambiar el valor de la función objetivo. Si se hiciera, la segunda solución sería $X_1 = 3$, $X_2 = 4$. Además, como dos puntos de intersección son óptimos, se sabe que los demás puntos entre ellos también lo son. Sin embargó, la forma de *localizar* estos puntos intermedios queda fuera del alcance de este libro. Será suficiente decir que los puntos existen.

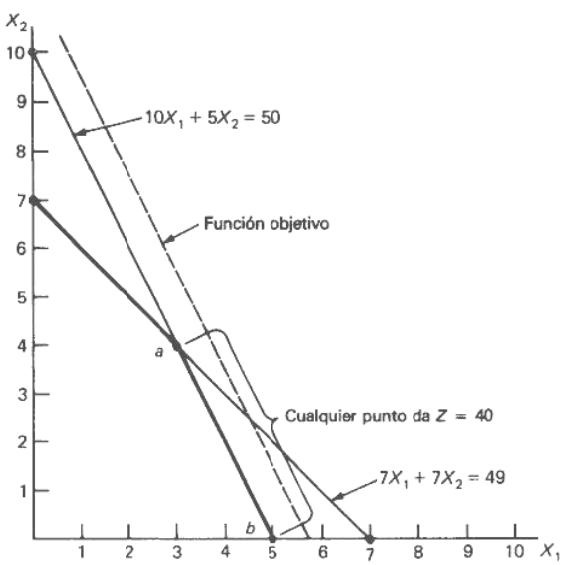


FIGURA 8-3
Ejemplos con soluciones múltiples.

TABLA 8-18
Ejemplo con soluciones múltiples

C_j	Variables básicas	8 X_1	4 X_2	0 S_3	0 S_4	Valores de solución
0	S_3	0	7/2	1	−7	14
8	X_1	1	1/2	0	1	5
	Z_j	8	4	0	8	40
	$C_j - Z_j$	0	0	0	−8	

Variable que no es solución con 0 en el renglón $C_j - Z_j$

Condición: solución no factible (restricciones en conflicto)

Algunos problemas de PL no tienen una solución posible. Esto sucederá siempre que el problema contenga restricciones en conflicto, como $X_2 \geq 10$ y $X_2 \leq 2$. Con frecuencia puede detectarse esto analizando las restricciones del problema. No obstante, en problemas muy grandes con muchas variables es difícil detectarlo; así, generalmente se procede a resolver el problema. Si la solución final contiene una variable *artificial,* entonces no existe una solución factible y se tienen restricciones en conflicto.

Condición: solución no acotada

En la figura 8-4 se muestra un ejemplo de un problema no acotado. Se intenta maximizar y no existe un límite superior que restrinja. Puede evitarse esta condición asegurando que todo problema de maximización tenga por lo menos una restricción del tipo ≥ o = . Para minimización, debe ha-bere una restricción de tipo ≥ o = .

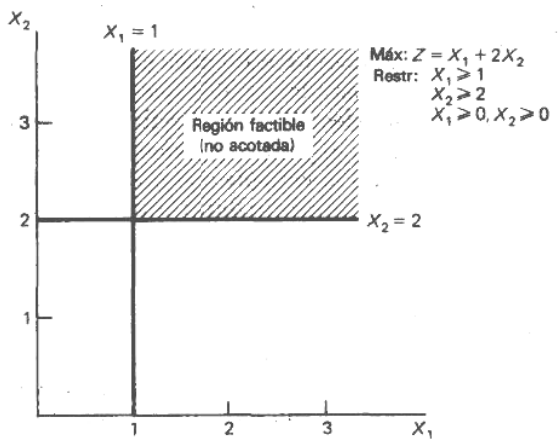


FIGURA 8-4
Un problema no acotado.

TABLA 8-19
Ejemplo con un problema no acotado

C_j	Variables básicas	1 X_1	2 X_2	0 S_3	0 S_4	$-M$ A_5	$-M$ A_6	Valores de solución
1	X_1	1	0	−1	0	1	0	$1 \quad \frac{1}{0} = \infty$
2	X_2	0	1	0	−1	0	1	$2 \quad \frac{2}{-1} = -2$
	Z_j	1	2	−1	−2	1	2	5
	$C_j - Z_j$	0	0	1	(2)	$-M-1$	$-M-2$	

Todos los coeficientes son negativos o cero

Si se desarrolla la solución símplex de un problema de este tipo, pronto se comprueba que es no acotada. En la tabla 8-19 se muestra un ejemplo (maximizando). En este punto se ha identificado S_4 como la variable que entra. Sin embargo, todos los cocientes para localizar la variable que sale son negativos o infinito. Esto detiene el proceso símplex e indica una solución no acotada. La mayoría de los programas de computadora indican cuándo ocurre esto.

Síntoma: empate para la variable que entra

No es raro que dos o más variables tengan el mismo valor del criterio símplex para mejorar la solución. Cuando esto ocurre, se tiene un empate para la variable que entra. Esto en realidad no es un problema; simplemente se selecciona una de las dos en forma arbitraria para romper el empate y se sigue adelante.

Síntoma: empate para la variable que sale (degeneración)

Si dos o más variables básicas tienen el mismo cociente positivo mínimo se tiene un empate para la variable que sale. Éste se maneja como el anterior, es decir, se selecciona una variable arbitraria y se continúa. No obstante, en este caso es posible (aunque raro) que se tengan problemas.

Un empate para la variable que sale indica una condición llamada *degeneración.* Una solución se llama degenerada siempre que una o más variables básicas tengan un valor de solución de cero. Esto no significa que haya error en la solución; sin duda, es posible que las soluciones óptimas sean degeneradas. Sólo significa: cuidado, puede caerse en una oscilación sin fin. Si se hace una selección "equivocada" al romper el empate, puede caerse en un ciclo de una solución a otra y después otra vez a la primera. Si ocurre el ciclo, todo lo que hay que hacer es volver al punto del empate y elegir una variable diferente para romperlo. La única manera como

puede identificarse una selección equivocada es cayendo en el ciclo. Por fortuna, los ciclos son raros.

De hecho, cualquiera de los casos especiales que se han mencionado pueden ser consecuencia de errores aritméticos. (Véase la tabla 8-20 para un resumen de los casos especiales.) Cuando se resuelven problemas en forma manual, es necesario verificar que no haya errores; en general causan muchos más problemas al estudiante que ninguno de los casos especiales.

PRECIOS SOMBRA Y LA SOLUCIÓN DUAL

El método símplex proporciona algo más que una solución óptima. También da información adicional que puede ser útil en la toma de decisiones administrativa, en particular, los precios sombra de cada recurso. Además proporciona la solución completa para el problema dual. ¡Entonces, se obtienen dos soluciones por el precio de una!

Precios sombra

Los precios sombra para cada recurso (es decir, el lado derecho de las restricciones) *se encuentra en el renglón $C_j - Z_j$ de la solución final bajo la variable de holgura o de excedente que le corresponde.* Como ejemplo, véase la tabla 8-21. Ésta es la tabla final para un ejemplo anterior (tabla 8-146). Recuérdese que este problema tiene dos restricciones de recursos:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & Z = 7X_1 + 10X_2 \\ \text{Restricciones:} \quad & 7X_1 + 7X_2 \leq 49 \\ & 10X_1 + 5X_2 \leq 50 \end{aligned}$$

La variable de holgura \$3 correspondía a la primera restricción y tiene un valor $C_j - Z_j = -10/7$ en la tabla final. Es decir, si se incrementa una unidad de S_3 a la solución, la función objetivo disminuirá en 10/7. Pero la función objetivo se *incrementa* en esa cantidad, si se *reduce* S_3 en una unidad. Esto equivale a *elevar* el lado derecho de la primera restricción de 49 a 50, ya que las variables de holgura disminuyen cuando se incrementa el lado derecho.

TABLA 8-20
Resumen de los casos especiales

Entorna	*Condición/acción*
La tabla final tiene variables que no son solución con $C_j - Z_j$	**Soluciones múltiples**
Variable artificial en la solución final	**Sin soluciones factibles (restricciones en conflicto)**
Columna de la variable que entra con todos los coeficientes negativos (o cero)	**Solución no acotada**
Empate para la variable que entra	**Selecciónese *cualquiera***
Empate para la variable que sale	**Degeneración (selecciónese *cualquiera)***

Se dice que el *precio sombra* para el primer recurso es + 10/7 (con el signo cambiado). Esto significa que se podría incrementar la función objetivo en 10/7 si se tuviera una unidad adicional de ese recurso; entonces, éste es el precio *máximo* que debe pagarse si se compran unidades adicionales. De igual manera, se tiene que, para el segundo recurso, el precio sombra de S_4 es 0. La unidad adicional del segundo recurso no ayuda, ya que el recurso no se está usando hasta el límite.

Existen límites que deben conocerse respecto de la validez de la interpretación de los precios sombra. En primer lugar, estos precios son aplicables sólo cuando se toman uno a la vez. Si, por ejemplo, un recurso tiene precio sombra de 2 y otro de 3, al agregar una unidad de cada uno no se obtiene un incremento de 5. En segundo lugar, existen límites sobre el alcance de los valores del lado derecho para el que los precios sombra son válidos. Estos límites pueden calcularse, se explicará cómo hacer esto cuando se considere el tema de "análisis de sensibilidad".

La solución dual

El método símplex proporciona más información, no sólo da los precios sombra para los recursos en el lado derecho. El renglón de $C_j - Z_j$ de la tabla final representa la solución *completa* del problema dual. Para aclarar esto se formulará y resolverá el dual del problema que se muestra en la tabla 8-21. En la tabla 8-22 se da la formulación dual y la solución símplex se genera en la tabla 8-23. Nótese que las variables de decisión y las variables de holgura y de excedente intercambian lugares al ir del primal al dual. Si el problema primal tiene dos variables de decisión y tres variables de holgura y excedente, en el dual se cumple lo contrario (3,2). Las variables artificiales se ignoran, no tienen ninguna interpretación útil.

Observando en la solución primal de la tabla 8-21 el renglón $C_j - Z_j$, la solución dual es (cambiando los signos): + 3 y 0 para las variables de hol-

TABLA 8-21
Solución final para el ejemplo de maximización

C_j	Variables básicas	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	Valores de solución
10	X_2	1	1	$\frac{1}{7}$	0	7
0	S_4	5	0	$-\frac{5}{7}$	1	15
	Z_j	10	10	$\frac{10}{7}$	0	70
	$C_j - Z_j$	−3	0	$-\frac{10}{7}$	0	
				Precios sombra		

TABLA 8-22
Formulación del problema dual

Problema primal:

$$\begin{aligned} \text{Maximize: } & Z = 7X_1 + 10X_2 \\ \text{Constraints: } & 7X_1 + 7X_2 \leq 49 \\ & 10X_1 + 5X_2 \leq 50 \end{aligned}$$

Tabla primal

	Variable		
Restricción	X_1	X_2	*Recursos*
1	7	7	49
2	10	5	50
Contribución	7	10	

Giro de 90° contra reloj

49	50	
7	5	10
7	10	7

Problema dual

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } & Z = 49D_1 + 50D_2 \\ \text{Constraints: } & 7D_1 + 5D_2 \geq 10 \\ & 7D_1 + 10D_2 \geq 7 \end{aligned}$$

Dual aumentado

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar } & Z = 49D_1 + 50D_2 + 0S_3 + MA_4 + 0S_5 + MA_6 \\ \textit{Restricciones } & 7D_1 + 5D_2 - S_3 + A_4 + 0S_5 + 0A_6 = 10 \\ & 7D_1 + 10D_2 + 0S_3 + 0S_4 - S_5 + A_6 = 7 \end{aligned}$$

gura y excedente y +10/7 y 0 para las variables de decisión. Esto puede comprobarse con la tabla anal para el dual en la tabla 8-23. Obsérvese que $S_5 = 3$ y $S_3 = 0$ y que $D_1 = +10/7 y D_2 = 0$. (S3 = $D_2 = 0$, puesto que están fuera de la solución final.) Nótese también que 70 es el valor óptimo de la función objetivo, tanto para el primal como para el dual, como debe ser. ¿Puede el lector leer la solución *primal* en la tabla 8-23?

Puede pensarse que todo esto suena muy bien, pero ¿existe alguna razón práctica para recurrir al dual? Quizás la haya. Cuanto más pequeño es el número de renglones, más fácil es resolver el problema usando símplex. Si se tiene un problema primal con pocas variables de decisión pero muchas restricciones (o sea, renglones), puede haber un ahorro de tiempo si se resuelve el dual. En problemas muy grandes esto puede ser significativo.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad no trata de resolver un problema de programación lineal. Entra en acción *después* que se ha encontrado una solución óptima; entonces es "postóptimo". En análisis de sensibilidad se usa para determinar el alcance de un coeficiente o de un elemento del lado derecho, para el que una solución particular sigue siendo válida.

TABLA 8-23
Solución del problema dual

C_j	Variables básicas	49 D_1	50 D_2	0 S_3	0 S_5	M A_4	M A_6	Cantidad
M	A_4	7	5	−1	0	1	0	$10 \quad \frac{10}{5} = 2$
		7/2	5	0	$-\frac{1}{2}$	0	1/2	3.5
M	A_6	7	10	0	−1	0	1	$7 \quad (\frac{7}{10})$
		7/10	1	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	7/10
	Z_j	14M	15M	−M	−M	M	M	17M
	$C_j - Z_j$	49−14M	(50−15M)	M	M	0	0	
M	A_4	7/2	0	−1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$13/2 \quad \frac{13/2}{7/2} = 13/7$
50	D_2	7/10	1	0	−1/10	0	1/10	$7/10 \quad \frac{7/10}{7/10} = (1)$
	Z_j	$\frac{7M}{2} + 35$	50	−M	$\frac{M}{2} - 5$	M	$5 - \frac{M}{2}$	35 + 6.5M
	$C_j - Z_j$	$(14 - \frac{7M}{2})$	0	M	$5 - \frac{M}{2}$	0	$\frac{3M}{2} - 5$	
					S_5			
M	A_4	0	−5	−1	(+1)	1	−1	$3 \quad 3/1 = (3)$
49	D_1	1	$\frac{10}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$1 \quad -\frac{1}{1/7} = -7$
		0	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$
	Z_j	49	70−5M	−M	M−7	M	7−M	49 + 3M
	$C_j - Z_j$	0	5M−20	M	(7−M)	0	2M−7	
		D_1	D_2	S_3	S_5	A_4	A_6	
0	S_5	0	−5	−1	1	1	−1	3
49	D_1	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{10}{7}$
	Z_j	49	35	−7	0	7	0	70
	$C_j - Z_j$	0	(15)	(7)	0	M−7	M	

Existen dos razones para usar análisis de sensibilidad. Primero, los modelos de PL son, con frecuencia, grandes y costosos, debido a lo cual no es costeable usarlos para un sólo caso. Segundo, los elementos que se dan como datos para un problema muchas veces son aproximaciones, debido a lo cual es necesario examinar más de un conjunto de circunstancias. Por supuesto, sencillamente se podría resolver de nuevo el problema con nuevos datos. Cuando se dispone de una computadora y el problema es pequeño, éste es tal vez el mejor curso de acción. Sin embargo, para problemas grandes, la información necesaria puede quedar disponible a un costo menor, si se usa análisis de sensibilidad.

Se examinará la sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo, de los elementos del lado derecho y de los coeficientes de las restricciones. También se expondrán los efectos de agregar una nueva variable o una nueva restricción.

Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo

El efecto de un cambio en algún coeficiente de la función objetivo depende de que la variable asociada esté dentro o fuera de la solución. Si está *juera* de la solución, un cambio no tiene efecto **hasta** que el valor $C_j - Z_j$ se haga cero. Por otra parte, cualquier cambio en el coeficiente de una variable *dentro* de la solución cambia el valor total de la función objetivo. Además, un cambio suficientemente grande hace que la variable salga de la solución. Como ejemplo, considérese el ejemplo anterior de maximiza-ción al cual se le ha agregado una restricción ($X_2 \geq 2$) para hacerlo más interesante. La solución final se muestra en la tabla 8-24. (El lector puede resolver esto como ejercicio de práctica.)

Variable fuera de la solución En la tabla 8-24, la variable X_1 está fuera de la solución final. Como éste es un problema de maximización, el coeficiente 7 era muy pequeño para hacer que X_1 quedara incluida. Si el coeficiente se *reduce,* la variable será todavía menos deseable; por tanto, no hay un límite inferior sobre el coeficiente. ¿Cuánto se puede *incrementar?* Hasta el punto en que $C_j - Z_j = 0$, es decir, $C_j = Z_j$. En ese punto, puede incluirse Xi en la solución sin reducir el valor total de la función objetivo. Así, el límite *superior* para el coeficiente de X_1 es Z_j, o sea, 10. La regla general se muestra en la tabla 8-24. Nótese que al minimizar, los límites superior e inferior se invierten.

Variable dentro de la solución La variable X_2 está en la solución final de la tabla 8-24. Cualquier *incremento* en su coeficiente cambiará el valor total de la función objetivo. ¿Qué ocurre si el coeficiente se *reduce?* En ciertos casos, alguna o algunas de las otras variables serán tan deseables como Xi, es decir, tendrán valores de cero en $C_j - Z_j$. Para encontrar este límite se deben volver a calcular los renglones Z_j y $C_j - Z_j$. Se agrega ΔC al coeficiente original y después se calculan ambos renglones. (La letra griega Δ (delta) delante de C significa un "pequeño cambio en C".) Esto se muestra en la tabla 8-25. En seguida, se iguala a cero cada expresión $C_j - Z_j$ que sea diferente de cero y se resuelve para ΔC. En la tabla 8-25, X_1

TABLA 8-24

Alcance de los coeficientes de la función objetivo: Variable fuera de la solución

Variable fuera de la solución

C_j	Variables básicas	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	0 S_5	$-M$ A_6	Valores de solución
0	S_5	1	0	1	0	1	0	5
0	S_4	5	0	−5/7	1	0	0	15
10	X_2	1	1	1/7	0	0	1	7
	Z_j	(10)	10	10/7	0	0	10	70
	$C_j - Z_j$	−3	0	−10/7	0	0	$-M - 10$	

Límite superior

Límite inferior	Valor actual	Límite superior
Sin límite	7	10
Regla general (Máx.): Sin límite	C_j	Z_j
(Min.) Z_j	C_j	Sin límite

y S_3 tienen valores de criterio símplex diferente de cero (las variables artificiales se ignoran; nunca deben volver a entrar en la solución).

$$\text{Para } X_1\text{: } -3 - \Delta C = 0$$
$$\Delta C = -3$$
$$\text{Para } S_3\text{: } -\frac{10}{7} - \frac{\Delta C}{7} = 0$$
$$\Delta C = -10$$

Así, una reducción de 3 hará que X_1 entre en la solución y una reducción de 10 incluirá S_3. Se toma el cambio más pequeño, —3, para determinar el límite inferior: 10 – 3 = 7.

Sensibilidad en el lado derecho (alcance del precio sombra)

El lado derecho (LD) de un problema de programación lineal representa los valores que limitan los recursos que pueden asignarse. La extensión para la que cada elemento del LD puede variar sin cambiar la solución óptima

también es el alcance en que los precios sombra son válidos. **Ahora** bien, cualquier cambio en un elemento del LD puede considerarse como un cambio en la variable de holgura o de excedente correspondiente. Así, pueden encontrarse los límites para el lado derecho, en forma indirecta, explorando los límites sobre las variables de holgura o excedente asociadas. Para ser más específicos, se quiere saber qué tan grande debe ser un cambio para hacer que esa variable de holgura o de excedente salga de la solución. Para comprobar cómo se hace esto, considérese de nuevo el ejemplo de maximización. Las restricciones eran las siguientes:

Restricción 1: $7X_1 + 7X_2 + S_3 = 49$
Restricción 2: $10X_1 + 5X_2 + S_4 = 50$
Restricción 3: $X_2 - S_5 = 2$

Variable de holgura en la solución La estrategia para obtener el rango del lado derecho es seleccionar la variable de holgura o de excedente asociada como la variable *que entra.* Después se desarrollan los cocientes para

TABLA 8-25
Alcance de los coeficientes de la función objetivo: varía en la solución

Asegúrese DC

C_j	Variables básicas	7 X_1	$10 + \Delta C$ X_2	0 S_3	0 S_4	0 S_5	$-M$ A_6	Valores de solución
0	S_5	1	0	1	0	1	0	5
0	S_4	5	0	−5/7	1	0	0	15
$10 + \Delta C$	X_2	1	1	1/7	0	0	1	7
	Z_j	$10 + \Delta C$	$10 + \Delta C$	$\frac{10}{7} + \frac{\Delta C}{7}$	0	0	$10 + \Delta C$	$70 + 7\Delta C$
	$C_j - Z_j$	$-3 - \Delta C$	0	$-\frac{10}{7} - \frac{\Delta C}{7}$	0	0	$-M - 10 - \Delta C$	

$\Delta C = -3$ $\Delta C = -10$ Ignore las variables artificiales

Límite inferior	Valor actual	Límite superior
$10 - 3 = 7$	10	Sin límite
Regla general		
Máx: $C_j - (DC)_{min}$	C_j	Sin límite
Mín: sin límite	C_j	$C_j - (\Delta C)_{min}$

TABLA 8-26
Alcance del LD: variable de holgura en solución

Holgura de la restricción 2

C_j	Variables básicas	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	0 S_5	$-M$ A_6	Valores de solución	
0	S_5	1	0	1	0	1	0	5	$\frac{5}{0} = \infty$
0	S_4	5	0	−5/7	1	0	0	15	$\frac{15}{1} = (15)$
10	X_2	1	1	1/7	0	0	1	7	$\frac{7}{0} = \infty$
	Z_j	10	10	10/7	0	0	10	70	
	$C_j - Z_j$	−3	0	−10/7	0	0	$-M - 10$		

Límites	Holgura	RHS
Inferior	15 − 15 = 0	50 − 15 = 35
Superior	Sin límite	Sin límite

identificar la variable que sale. Esto se ilustra en la tabla 8-26. La variable de holgura S_4 tiene un valor de 15 en la solución final, lo cual significa que sólo se están usando 35 de las 50 unidades del lado derecho disponibles en la segunda restricción. Además, los *incrementos* no tendrán efecto excepto el de aumentar S_4. De igual forma, se puede *reducir* S_4 hasta 15 unidades. En ese punto, sale de la solución.

Variable de excedente en la solución La misma lógica se usa para las variables de excedente. Sólo se debe tener cuidado con el hecho de que las variables de excedente llevan un signo negativo. Así, cuando un excedente aumenta, el lado derecho se reduce y viceversa. Véase la tabla 8-27. La variable de excedente S_5 está en la solución. De los cocientes se concluye que puede reducirse hasta cinco unidades sin afectar la solución. Como un aumento en el excedente *reduce* el lado derecho, no existe un límite *inferior* en el LD. También, el *reducir* el excedente en 5 unidades *incrementará* el LD en la misma cantidad, esto hace que el límite *superior* sea 2 + 5 = 7.

Variables de holgura o de excedente fuera de la solución Para las restricciones cuyas variables de holgura o de excedente están fuera de la solución se usa el mismo procedimiento. Esto se muestra en la tabla 8-28, en donde la variable de holgura S, está fuera de la solución. Se desarrollan los cocientes y después se selecciona tanto el negativo menor como el positivo me-

TABLA 8-27
Alcance del LD: variable del excedente en solución

Excedente de la restricción 3

C_j	Variables básicas	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	0 S_5	$-M$ A_6	Valores de solución	
0	S_5	1	0	1	0	1	0	5	$\frac{5}{1} = (5)$
0	S_4	5	0	−5/7	1	0	0	15	$\frac{15}{0} = \infty$
10	X_2	1	1	1/7	0	0	10	7	$\frac{7}{0} = \infty$
	Z_j	10	10	10/7	0	0	10	70	
	$C_j - Z_j$	−3	0	10/7	0	0	$-M - 10$		

Límites	Excedente	RHS
Inferior	5 − 5 = 0	Sin límite
Superior	Sin límite	2 + 5 = 7

TABLA 8-28
Alcance del LD: variable de holgura fuera de la solución

Holgura de la restricción 1

C_j	Variables básicas	7 X_1	10 X_2	0 S_3	0 S_4	0 S_5	$-M$ A_6	Valores de solución	
0	S_5	1	0	1	0	1	0	5	$\frac{5}{1} = (5)$
0 1	S_4	5	0	−5/7	1	0	0	15	$\frac{15}{-5/7} = (-21)$
10	X_2	1	1	1/7	0	0	1	7	$\frac{7}{1/7} = 49$
	Z_j	10	10	10/7	0	0	10	70	
	$C_j - Z_j$	−3	0	−10/7	0	0	$-M - 10$		

Límites	Holgura	RHS
Inferior	0 − 5 = −5	49 − 5 = 44
Superior	0 + 21 = 21	49 + 21 = 70

nor. Esto proporciona los límites superior e inferior, respectivamente, para la variable de holgura (o de excedente). Los límites del lado derecho se determinan como antes.

Sensibilidad de los coeficientes de las restricciones

Las variaciones sobre los coeficientes de las restricciones pueden proporcionar información útil, pero las técnicas para encontrarlos son complejas y quedan fuera del alcance de los objetivos del libro.[8]

Si se agrega una nueva variable

Cuando se agrega una nueva variable a un problema de programación lineal se tiene lo equivalente a agregar una nueva columna a la tabla símplex. La pregunta se convierte, entonces, en ¿debe la nueva variable incluirse en la solución? La prueba puede efectuarse calculando el valor del criterio símplex para la nueva variable; pero debe hacerse de una manera diferente ya que se está trabajando con una solución final. Los precios sombra se emplearán para esto.

Considérese el mismo problema de maximización (tabla 8-28). Supóngase que se quiere agregar una nueva variable X_7. Supóngase también que usa 7 unidades del recurso 1, 5 unidades del recurso 2 y cero del recurso 3 y que tiene una contribución por unidad de 8. La tabla 8-28 puede concluirse que los precios sombra para los tres recursos son los cuales se encuentran en el renglón C_i — Z_i abajo de su variable de holgura o de excedente correspondiente:

Recurso 1(S_3): + 10/7
Recurso 2 (S_4):0
Recurso 3 (S_5):0

El costo de oportunidad (Z_j) para el nuevo recurso se encuentra multiplicando los precios sombra por la tasa de utilización y sumándolos:

$$Z_j = (+{}^{10}/_{7})(7) + 0(5) + 0(0) = + 10$$

Con $C_j = 8$, el valor del criterio símplex es

$$C_j - Z_j = 8 - 10 = -2$$

Dado que éste es un problema de maximización, la nueva variable no debe incluirse en la solución final y ésta permanece como estaba. Si resulta que la nueva variable se debe incluir, entonces de nuevo debe resolverse el problema. Esto es más fácil que modificar el que se tiene.

[8] Para procedimientos detallados véase William Orchard-Hays, *Advanced Linear-Programming Computing Techniques* (New York: McGraw-Hill, 1968), págs. 156-162.

TABLA 8-29
Resuman de análisis de sensibilidad

Acción	*Método*
Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo	**Variable fuera de solución: el rango no es un límite para Z_j. Variable en solución: obténgase ΔC.**
Sensibilidad del LD (alcance de los precios sombra)	**Encuéntrese el rango de la variable de holgura o excedente asociada**
Sensibilidad de los coeficientes de las restricciones	**Fuera de alcance**
Si se agrega una nueva variable	**Úsense los precios sombra para encontrar Z_j, $C_j - Z_j$. Si se desea, resuélvase el nuevo problema.**
Si se agrega una nueva restricción	**Verifíquese si la solución final satisface la nueva restricción. Si no, resuélvase el nuevo problema.**

Si se agregra una nueva restricción

Es sencillo detectar sí una nueva restricción cambiaría la solución final. Sólo se sustituyen los valores de esta solución final en la nueva restricción y se ve si se cumple. Si se satisface, no se necesitan cambios. Si no se satisface, entonces es más sencillo resolver el nuevo problema que modificar el actual. Véase la tabla 8-29 que hace un resumen del análisis de sensibilidad.

SOLUCIÓN EN COMPUTADORAS

En este momento ya se tiene cierta familiaridad con el método símplex. Es claro que es bastante fácil resolver problemas pequeños. También puede apreciarse que los problemas grandes llevarían muchas horas y estarían sujetos a errores aritméticos. Por fortuna existen programas de computadora para resolver programas de PL, que ahora están disponibles.

Los programas de computadora varían considerablemente en cuanto a detalles. Algunos requieren como datos las relaciones aumentadas, otros no. Algunos proporcionan sólo la solución final; otros proporcionan también las tablas intermedias. Algunos dan los precios sombra, los alcances de los precios sombra y sin duda un extenso análisis de sensibilidad. Cuando se usa un programa se debe estar seguro de entender lo que hace y cómo deben alimentarse los datos. Se deben tener todas las variables definidas en forma apropiada y todas las relaciones escritas correctamente en la forma como se piden. Esto ahorra tiempo al introducir los datos y reduce las posibilidades de error al interpretar la solución.

RESUMEN

El método símplex es un método general para resolver problemas de programación lineal. Para aplicarlo, todas las relaciones deben tener la forma estándar. Es decir, las restricciones se deben aumentar para formar igualdades con las constantes no negativas en el lado derecho y todas las variables deben estar en la función objetivo. El método símplex comienza, entonces, en el origen y se mueve de un punto de intersección a otro, siempre mejorando la función objetivo hasta encontrar una solución óptima.

En este capítulo se presentaron algunos detalles del método símplex junto con la guía para manejar las condiciones especiales. También se vio cómo obtener información adicional a partir de una solución final: los precios sombra, la solución dual y el análisis de sensibilidad. Ahora el lector cuenta con una herramienta muy poderosa para resolver algunos problemas importantes administrativos.

EJERCICIOS

8-1 De manera separada, auméntese cada una de las siguientes restricciones y la función objetivo para cada caso. Supóngase la siguiente función objetivo: Maximizar: $Z = 8X_1 + 7X_2 + 9X_3$.

Maximizar: $Z = 8X_1 + 7X_2 + 9X_3$.

$a\ 8X_1 - 7X_2 + 4X_3 \leq 28$
$b\ X_1 + 9X_2 \leq 81$
$c\ X_1 + 3X_3 \geq 51$
$d\ 7X_2 + 4X_3 \geq 83$
$e\ 19X_1 - 8X_2 + X_3 = 22$
$f\ 7X_1 = 12X_2$

8-2 Conviértanse las siguientes expresiones aumentadas en las desigualdades originales:

$a\ 7X_1 + 8X_2 + 9X_3 + S_4 + 0S_5 + 0A_6 = 78$
$b\ 9X_1 + 0X_2 + 0X_3 - S_4 + A_5 = 81$
$c\ 5X_1 + 6X_2 - 4X_3 + 0S_4 - S_5 + A_6 + 0S_7 = 24$
$d\ 25X_1 + 13X_2 + 0S_3 + 0S_4 + A_5 = 194$

8-3 Con el método símplex resuelva el siguiente problema (éste se resolvió con el método gráfico en el capítulo 7; véase la figura 7-10);

Maximizar: $Z = 5X_1 + 5X_2$
Restricciones: $12X_1 + 8X_2 \leq 96$
$6X_1 + 12X_2 \leq 72$
$X_1 \geq 2$
$X_i \geq 0,\ i = 1, 2$

8-4 Resuélvase con el método símplex:

Maximizar: $Z = 3X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 8X_4$
Restricciones: $6X_1 + 4X_2 + 8X_3 + 3X_4 \leq 120$
$2X_1 - 8X_2 + 4X_3 \leq 40$
$X_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3$

8-5 Resuélvase el ejercicio de práctica (7-1) por el método símplex.

8-6 Resuélvase este problema de minimización:

Minimizar: $Z = 8X_1 + 5X_2 + 7X_3$

$$\begin{aligned} \text{Restricciones: } & 10X_1 + 8X_2 + 12X_3 \leq 120 \\ & 2X_1 + 4X_2 - 3X_3 \geq 16 \\ & X_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

8-7 Resuélvase el siguiente problema de minimización y explíquese la solución.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & Z = 8X_1 + 12X_2 + 4X_3 \\ \text{Restricciones: } & X_1 + X_2 + X_3 \leq 30 \\ & 2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 12 \\ & X_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

8-8 Resuélvase el siguiente problema y explíquese la solución.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & Z = 10X_1 + 8X_2 + 14X_3 \\ \text{Restricciones: } & 5X_1 + 4X_2 + 7X_3 \leq 70 \\ & 2X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 15 \\ & X_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

8-9 *a* Resuélvase el siguiente problema con el método símplex y explíquese la respuesta.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & Z = 3X_1 + 4X_2 \\ \text{Restricciones: } & 5X_1 + 10X_2 \leq 50 \\ & 7X_1 + 7X_2 \geq 49 \\ & 8X_1 - 2X_2 \leq 8 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b Hágase una gráfica de este problema y sombréese la región factible.

8-10 Resuélvase le siguiente problema de PL con el método símplex y explíquese la solución.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & Z = 10X_1 + 8X_2 \\ \text{Restricciones: } & 7X_1 + 4X_2 \geq 35 \\ & 3X_1 \leq 2X_2 + 3 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

8-11 Resuélvase el siguiente problema y coméntese la solución:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & Z = 5X_1 + 8X_2 + 3X_3 \\ \text{Restricciones: } & X_1 + X_2 - 2X_3 \leq 30 \\ & -X_1 + X_2 + X_3 \leq 20 \\ & X_1 - 3X_2 \leq 60 \\ & X_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

8-12 Resuélvase este problema de minimización:

$$\text{Minimizar: } Z = 4X_1 + 6X_2 + 4X_3$$

$$\begin{aligned}\text{Restricciones: } & 3X_1 + X_2 + 4X_3 \geq 36 \\ & 2X_1 + 4X_2 + X_3 \geq 40 \\ & X_1, X_2 \geq 0\end{aligned}$$

8-13 Resuélvase el siguiente problema y explíquese la solución.

$$\begin{aligned}\text{Maximizar: } & 6X_1 + 5X_2 \\ \text{Restricciones: } & 3X_1 + 9X_2 \leq 27 \\ & 10X_1 + 3.75X_2 \leq 37.5 \\ & 5X_1 + 5X_2 \leq 25 \\ & X_1, X_2 \geq 0\end{aligned}$$

8-14 Resuélvase y coméntese la solución a este problema:

$$\begin{aligned}\text{Maximizar: } & Z = 8X_1 + 4X_2 + 6X_3 \\ \text{Restricciones: } & 4X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 60 \\ & 2X_1 + X_2 \leq 30\end{aligned}$$

8-15 En la AAA Welding, Joe está tratando de decidir cuántas amarras para trailer debe hacer para usar un metal de desperdicio. Tiene das tipos de metal y puede hacer cualquiera de dos tipos de ganchos. En la tabla siguiente se proporcionan los datos necesarios.

	Requerido para:		
Metal	*Soldadura 1*	*Soldadura 2*	*Disponible*
Hierro acanalado	5	5	35 unidades
Hierro plano	6	9	54 unidades

Joe gana $13 por cada gancho de tipo 1 y $16 por cada gancho de tipo 2. Ya prometió hacer 2 ganchos del tipo 2. *a* Resuélvase este problema con el método símplex. *b* Le han ofrecido a Joe hierro acanalado adicional a $2 por unidad.

¿Deberá comprarlo?

c Construyase el problema dual y resuélvase.

8-16 La Mabel's Toy Shoppe quiere gastar $1 000 en publicidad local. El objetivo global es alcanzar la máxima audiencia posible al mismo tiempo que llegar hasta 6 000 niños por lo menos. Se dispone de tres medios; sus costos y la audiencia que tienen se da en la tabla que sigue:

	Periódico	*Radio*	*TV*
Costo por paquete	$ 200	$ 150	$ 400
Audiencia total	20 000	14 000	36 000
Niños	1000	1000	3 000

a Formúlese éste como un problema de PL y resuélvase. ¿Cuál es la mezcla óptima de publicidad?

b ¿Existe otra mezcla óptima? Si existe, ¿cuál es? ¿Existe alguna razón para preferir alguna?

c ¿En cuánto podría aumentarse la audiencia con $1 adicional en el presupuesto? ¿Cuál es el rango para el que este valor marginal es válido?

d Una revista local ha ofrecido garantizar una audiencia de 12 000 con 2 000 niños por un costo de $300. ¿Debe considerarse esta oferta?

e Un amigo comentó a Mabel que las abuelas compran muchos juguetes. Ahora quiere estar segura de que la publicidad llega por lo menos a 1 000 abuelas. El periódico, la radio y la televisión dicen que sus anuncios llegan a 200, 100 y 500 por paquete comercial, respectivamente. ¿Cambiará la solución óptima con esta nueva restricción?

f Mabel está preocupada, ya que la audiencia total del periódico sólo es aproximada. ¿Sobre qué rango de audiencia total permanecerá el periódico en la solución?

ESTUDIO DE UN CASO: BITHLO ELECTRIC

La Bithlo Electric está preparando un plan de producción para el próximo año. Una parte importante del plan es el programa mensual de producción. La BE produce soldadoras eléctricas y tiene una buena reputación por su calidad. Charlie, el gerente de producción, ha recibido el siguiente pronóstico de ventas por unidad del departamento de comercialización:

Mes	*Ventas*	*Mes*	*Ventas*
enero	92	julio	130
febrero	85	agosto	110
marzo	102	septiembre	85
abril	108	octubre	90
mayo	94	noviembre	82
junio	120	diciembre	102

Pensativo, Charlie nota que, si el pronóstico fuera bueno, podría igualar las ventas con la tasa de producción normal de 100 unidades al mes. El gerente de comercialización le dice que tiene suerte de recibir por lo menos un pronóstico.

George, el contralor, aumenta los problemas de producción de Charlie al decirle que los costos de producción tendrán variaciones durante el año. Le proporciona las siguientes estimaciones:

a Para los primeros tres meses, los costos serán de $1 900 por unidad producida en tiempo normal y $2 100 por unidad producida en horas extras.

b Para los siguientes 6 meses, el tiempo normal costará $1 950 por unidad y el tiempo extra $2 200. c Durante los últimos 3 meses el costo del tiempo regular subirá a $2 00)

por unidad y el costo del tiempo extra será de $2 300.

George recuerda a Charlie que los costos de inventario se basan en el 10% del costo de producción en tiempo normal del mes en curso y del nivel de inventario al principio del mes. El inventario al comenzar enero será de 8 unidades y desean terminar el año con 10 unidades en inventario.

Charlie sabe que el tiempo extra agrega el 25% a la capacidad de producción de cada mes. También sabe que debe haber alguna forma de llegar a un programa de producción de costo mínimo.

Pregunta

Formúlese el trabajo de Charlie de programar la producción como un problema de programación lineal.

BIBLIOGRAFÍA

Bierman, Harold, Jr., Charles P. Bonini y Warren H. Hausman: *Quantttative Analysisfor Business Decisions,* 5ª edición (Homewood, 111.: Irwin 1977).

Cooper, L. y D. Steinberg: *Linear Programming* (Philadelphia: Saunders, 1974).

Hartley, Ronald V.: *Operations Research: A Managerial Perspective* (Pacific Pal: - sades, Calif.: Goodyear, 1976).

Loomba, N. P.: *Linear Programming: A Managerial Perspective,2ª* edición (New York: Macmillan, 1976).

Orchard-Hays, William: *Advanced Linear-Programming Computing Techniques* (New York: McGraw-Hill, 1968).

Sposito, V. A.: *Linear and Nonlinear Programming* (San Francisco: Holden-Day, 1972).

9

PROGRAMACIÓN ENTERA Y POR OBJETIVOS

Excepto por accidente, muy rara vez sería posible para un individuo o para una organización maximizar más de un valor al mismo tiempo . . . . También es raro que alguien. . . tenga sólo una meta y la quiera maximizar sin tomar en cuenta su efecto sobre los demás objetivos, a pesar del concepto contrario del hombre económico. Esto significa . . . que los tomadores de decisiones muy pocas veces buscan maximizar un solo objetivo.

Alfred Kuhn

El estudio de la sociedad

El tamaño promedio de la familia es 3.37 (1977).

U.S. Statistical Abstract (1978)

PERFIL DEL CAPITULO

Objetivos de aprendizaje

Programación por objetivos
- Los objetivos expresados como restricciones
  - Caso 1: se permiten desviaciones en ambas direcciones
  - Caso 2: sólo se permiten desviaciones hacia abajo
  - Caso 3: sólo se permiten desviaciones hacia arriba
  - Caso 4: no se permiten desviaciones

Restricciones que no son objetivos

Ejercicio de práctica (9-1)

Formulación de la función objetivo
- Objetivos conmensurables de igual importancia
  - Ponderación preferente de los objetivos
  - Rango de prioridades de los objetivos

Ejercicio de práctica (9-2)

El método símplex para programación por objetivos Aumento
- Construcción de la tabla símplex inicial
- Cálculo de Z_i y $C_j - Z_j$
- Revisión de la solución
- Terminación de la solución

Ejercicio de práctica (9-3)
Solución por computadora de problemas de programación por objetivos
Aplicaciones de la programación por objetivos
Ejemplo 1: planeación de la producción
Ejemplo 2: planeación del esfuerzo de ventas
Ejemplo 3: planeación de presupuesto en una clínica médica
Programación entera
Ramificación y acotamiento
Ejemplo
Ramificación
Ramificación posterior
Resumen de ramificación y acotamiento
Ejercicio de práctica (9-4)
Ramificación y acotamiento aplicado a problemas de asignación
Ejercicios de práctica (9-5)
Experiencias del mundo real
Resumen
Ejercicios
Estudios de un caso: Modelo de inversión de John
Bibliografía

En este capítulo se analizan dos extensiones de programación lineal que aumentan significativamente su alcance de aplicación. La *programación por objetivos* es una técnica para incorporar objetivos múltiples al modelo de programación lineal. La *programación entera* se usa para encontrar la mejor solución *entera* o *de números enteros* posible. Éstas son técnicas independientes para manejar situaciones especiales.

Un administrador tiene, en muchos casos de toma de decisiones, objetivos múltiples. Por ejemplo, en la programación de la producción, el gerente puede tratar de utilizar en su totalidad horas de trabajo regulares, minimizar las horas extras, cumplir con las cantidades mínimas de producción, evitar el exceso de la misma y cumplir con un programa de entregas. Un gerente de inversiones puede tener objetivos en cuanto al grado de riesgo, el capital disponible para nuevos proyectos y el rendimiento sobre las inversiones. Con frecuencia, estos objetivos son conflictivos e inconmesurables. Lo que hace el administrador es *satisfacer* más que optimizar; encuentra una solución aceptable.[1]

La programación por objetivos reinterpreta la función objetivo y las restricciones para permitir la "satisfacción" de todas las metas. Supone que el administrador puede identificar sus metas y darles prioridades. Con pequeños ajustes al método símplex, se puede encontrar una solución satisfactoria de acuerdo con las prioridades dadas.

La *programación entera* se aplica cuando no puede aceptarse una solución fraccional. Esto puede ser: construir $4\,{}^{1}/_{2}$ mesas, contratar $3{}^{1}/_{3}$ personas o comprar $6{}^{1}/_{4}$ camiones. Por simplicidad, la mayoría de los ejemplos que se usaron en los capítulos anteriores tenían soluciones enteras. En el mundo real, casi siempre se requieren soluciones no enteras. Con programación lineal, debe resistirse la tendencia a redondear la solución: podrís caerse en una solución no factible o en una solución mucho menor que h. solución entera óptima.

Existen una variedad de métodos para llegar a una solución entera óptima. Se ha escogido la técnica de *ramificación y acotamiento,* debido a que

[1] Recuérdese el análisis de satisfactorio en el capítulo 1.

está basada en el sentido común y a que es muy sencilla de aplicar. Esta técnica también puede usarse para otros problemas como el de asignación. Igual que todas las técnicas de programación entera, comienza con una solución óptima no entera.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

A través del estudio de este capítulo el lector aprenderá:

1 Cómo escribir las restricciones de los objetivos
2 Cómo escribir la función objetivo para programación por objetivos
3 Cómo resolver problemas de programación por objetivos
4 Cómo aplicar ramificación y acotamiento para encontrar soluciones enteras óptimas de problemas de PL
5 Cómo aplicar ramificación y acotamiento a problemas de asignación
6 El significado de los siguientes términos:

Programación por objetivos	Ponderación preferente
Variables de desviación	Programación entera
Prioridad	Ramificación y acotamiento

PROGRAMACIÓN POR OBJETIVOS

La forma del modelo de programación lineal sigue siendo la misma en programación por objetivos, es decir, también se tiene una función objetivo que optimizar sujeta a una o más restricciones. Sin embargo, dentro de este marco de referencia se agregarán dos conceptos nuevos. El primero es el de las restricciones de *objetivo* en lugar de las restricciones de recursos que se han analizado. El segundo concepto es el de rango de prioridad entre las restricciones de objetivo. Una vez que se establece un problema en el formato del modelo general de PL, para obtener la solución puede aplicarse el método símplex modificado sólo para tomar en cuenta las prioridades.

Los objetivos expresados como restricciones

Las restricciones de recursos que se manejaron en los dos capítulos anteriores se consideraban totalmente inviolables. Por ejemplo, supóngase que un fabricante quiere planear producir por lo menos tres mesas. Se escribirá la restricción:

$$T \geq 3$$

Esto no permite ningún valor abajo de 3. Si hubiera otra restricción en conflicto con ésta, el problema no tendría soluciones factibles.

Ahora bien, los objetivos administrativos son muchos menos rígidos y absolutos. Una manera más real para establecer la restricción de las mesas sería, "si es posible, nos gustaría hacer por lo menos tres mesas. Esto tiene una prioridad alta". En forma análoga, los objetivos de las ganancias o de los rendimientos sobre inversiones se expresan en términos de metas deseadas: hacer lo posible por obtener ganancias de $10 000 el próximo año o

buscar un rendimiento sobre inversiones (ROI) del 10% antes de impuestos. Sin duda, pueden ocurrir desviaciones arriba o abajo de estas metas. Pueden introducirse *variables de desviación* para tomar en cuenta las variaciones permitidas alrededor de una meta. Si la restricción de las mesas es fabricar por lo menos tres, esto puede escribirse como:

$$T + D_{UT} - D_{OT} = 3$$

en donde D_{UT} = cantidad que falta para lograr el objetivo de las *mesas*
D_{OT} = cantidad que sobrepasa el objetivo de las mesas
T = número de mesas

Nótese que las *restricciones de objetivo* siempre se escriben como igualdades. El primer subíndice de la variable de desviación indica la variación hacia abajo o hacia arriba de la meta. El segundo subíndice indica de qué se trata el objetivo, en este caso, mesas.

Existen cuatro formas de restricciones de objetivos, según que se permita-variación hacia arriba o hacia abajo.

Caso 1: se permiten desviaciones en ambas direcciones Considérese otro ejemplo. Supóngase que un fabricante de mesas y sillas quiere utilizar por completo las 100 horas normales de trabajo disponibles *y* minimizar *hs* horas extras. Supóngase que cada mesa o silla requiere 10 horas de mano de obra. De hecho la meta es usar las 100 horas, pero pueden ocurrir desviaciones en ambas direcciones. Esta restricción de objetivo puede escribirse como

$$10T + 10C + D_{UH} - D_{0H} = 100$$

en donde D_{UH} = la cantidad que falta para el objetivo de horas
= la cantidad que se pasa del objetivo de horas
T = número de mesas
C = número de sillas

Esta restricción se muestra en la figura 9-1. Las flechas muestran la dirección de la desviación permitida.

Caso 2: sólo se permiten desviaciones hacia abajo Supóngase que el departamento de comercialización de la fábrica establece que pueden venderse un máximo de ocho mesas y seis sillas. Este departamento quiere tener todas las que se puedan, hasta esos límites. Estas dos restricciones de objetivo pueden escribirse como:

$$T + D_{UH} = 8$$
$$C + D_{UC} = 6$$

en donde D_{UT} = la cantidad que falta para el objetivo de mesas y D_{UC} = la cantidad que falta para el objetivo de sillas. El sobrelogro *no* se permite, ya que no se han incluido las variables de desviación hacia arriba. Estas restricciones acotan la región factible en la forma como se muestra en la figura 9-2.

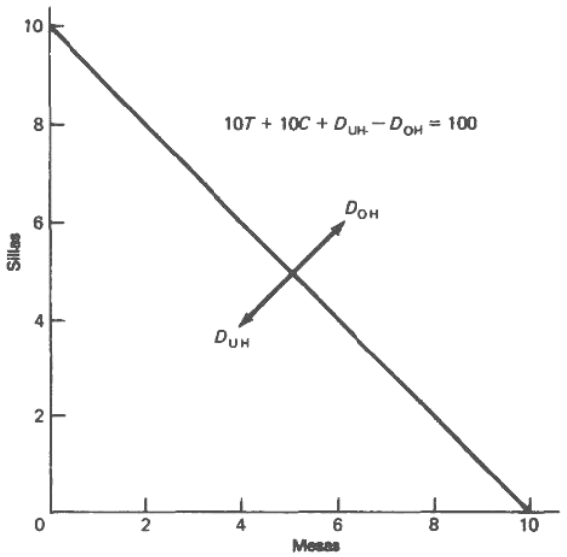


FIGURA 9-1
Restricción de horas de mano de obra.

En la figura 9-3 se muestra el resultado de combinar estas dos restricciones con la restricción de horas de mano de obra. Nótese que no sería posible minimizar simultáneamente todas las variables de desviación. El quedar arriba en horas de mano de obra está en conflicto con el quedar con una cantidad menor al objetivo de mesas y sillas. La programación por objetivos está diseñada específicamente para este tipo de situaciones.

Caso 3: sólo se permiten desviaciones hacia arriba En este caso se incluirá la variable de desviación hacia arriba y se omitirá la de des-

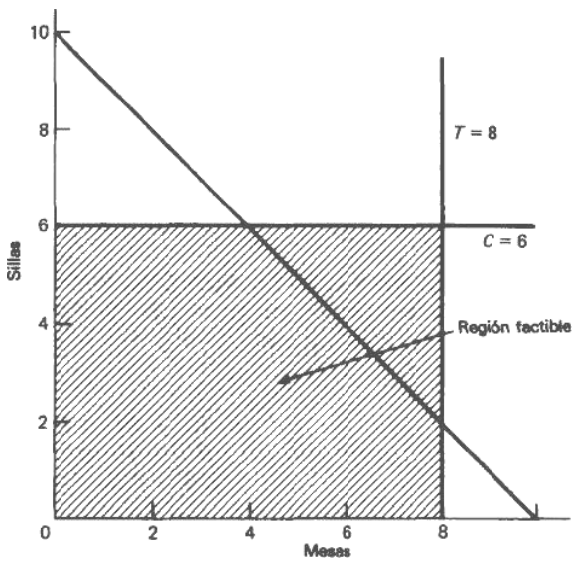
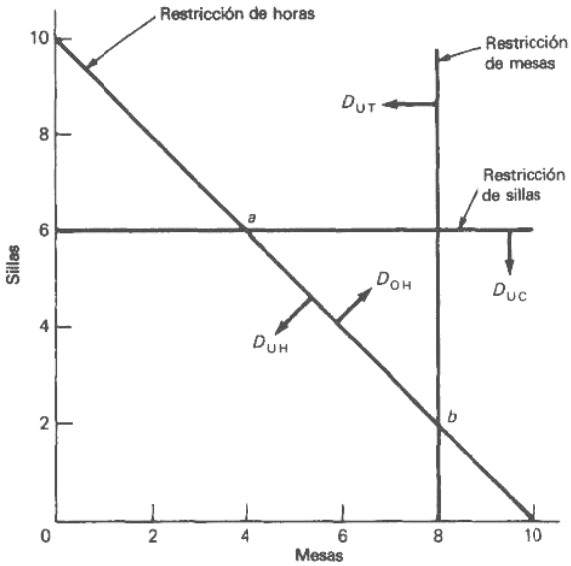


FIGURA 9-2
Límites superiores para mesas y sillas.

FIGURA 9-3
Inclusión de las restricciones de mesas y sillas.



viación hacia abajo. Así, si la compañía tiene un contrato para hacer dos sillas, este objetivo se podría escribir como:

$$C - D_{OC} = 2$$

en donde D_{OC} = la cantidad que se pasa del objetivo de sillas

De esta manera no hay soluciones factibles que tengan menos de dos sillas. Nótese que, igual que las variables de excedente, las variables de desviación hacia arriba siempre se restan.

Caso 4: no se permite desviación En este caso la restricción de objetivo es una igualdad exacta sin variables de desviación. Por ejemplo, si la compañía quisiera exactamente cinco sillas, ni más ni menos, esto se escribe como:

$$T = 5$$

Restricciones que no son objetivos

No existe algo en la programación por objetivos que prohiba incluir restricciones que no sean de objetivo o restricciones de recursos. I'or ejemplo:

$$6T + 9C \leq 84$$
$$5T - 8C \geq 61$$
$$12T + 7C = 18$$

Todas éstas son formas válidas de restricciones de recursos.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 9-1

Agréguense las variables de desviación apropiadas para cada una de las restricciones de objetivo que siguen:

a El número de mesas producidas (T) debe ser el máximo pero no puede exceder de 84.
b Las horas totales de mano de obra *(H)* deben ser por lo menos 40. El tiempo extra debe minimizarse.
c Deben producirse por lo menos seis ventanas (W). La sobreproducción debe minimizarse.

Formulación de la función objetivo

La función objetivo para un problema de programación por objetivos siempre es *minimizar* alguna combinación de variables de *desviación.* Desde un punto de vista de toma de decisiones administrativas, esto significa que se está buscando la combinación de variables reales (por ejemplo, mesas y sillas) que cumpla mejor con todos los objetivos. Esto podría llamarse optimizar un conjunto de objetivos "satisfactorio" o satisfacer.

La forma exacta de la función objetivo varía según la respuesta a estas dos preguntas:

1 ¿Son conmesurables o proporcionales los objetivos?
2 ¿Cuál es la importancia relativa de cada objetivo?

Se analizarán los tres tipos de función objetivo con el ejemplo de la figura 9-3. Recuérdense las tres restricciones de objetivo:

$$\text{Horas de mano de obra: } 10T + 10C + D_{UH} - D_{OH} = 100$$
$$\text{Mesas: } T + D_{UT} = 8$$
$$\text{Sillas: } C + D_{UC} = 6$$

Objetivos conmesurables de igual importancia Éste es el caso más sencillo, aunque muy pocas veces se encuentra en la práctica. Aquí los objetivos se miden en una escala común (conmesurable) y tienen la misma importancia. Para el ejemplo, la función objetivo sería

$$\text{Minimizar: } Z = D_{UH} + D_{OH} + D_{UT} + D_{UC}$$

Nótese que las variables reales *T y C* tiene coeficiente cero en la función objetivo y no se escribieron. Esto siempre es cierto. Únicamente las variables de desviación (y las variables artificiales cuando se tiene que hacer un aumento) llegan a tener coeficientes distintos de cero en la función objetivo.

En este caso puede aplicarse el método símplex estándar para encontrar una solución. En la tabla 9-1 se muestra la tabla símplex final para el ejemplo. La solución es producir cuatro mesas y seis sillas. El objetivo de las mesas no se logra, le faltan cuatro unidades. El cero en la columna D_{UC} *y* en el renglón del criterio símplex indica que existe otra solución óptima.

TABLA 9-1
Solución con objetivos iguales

C_j	Variables básicas	0 T	0 C	1 D_{UH}	1 D_{OH}	1 D_{UT}	1 D_{UC}	Valores de solución
0	T	1	0	0.1	−0.1	0	−1	4
1	D_{UT}	0	0	−0.1	0.1	1	1	4
0	C	0	1	0	0	0	1	6
	Z_j	0	0	−0.1	0.1	1	1	4
	$C_j - Z_j$	0	0	1.1	0.9	0	0	

Esto puede observarse en la gráfica de la figura 9-3. En realidad, cualquier punto sobre la línea de la restricción de horas entre *a y b* será una solución óptima.

Es necesario examinar la suposición de objetivos conmensurables. Este problema se resolvió haciendo:

$$\begin{array}{c}\text{Una unidad de } D_{UH} = \text{una unidad de } D_{UT} = \text{una unidad de } D_{UC} \\ \text{Una hora} \quad = \text{una mesa} \quad = \text{una silla}\end{array}$$

Esto es altamente cuestionable, en especial porque se necesitan 10 horas para producir una mesa o una silla. Será suficiente decir que *si* los objetivos son conmesurables, puede usarse el método símplex estándar.

Ponderación preferente de los objetivos Altérese el ejemplo suponiendo que la ganancia marginal de las mesas es el doble de la de las sillas. Ahora el no lograr el objetivo de las mesas es dos veces peor que no lograr el de las sillas. Siguiendo con la suposición de objetivos conmensurables, puede escribirse una nueva función objetivo.

$$\text{Minimizar: } Z = D_{UH} + D_{0H} + 2\,D_{UT} + D_{UC}$$

La solución con esta nueva función objetivo se da en la tabla 9-2. Nótese que ahora sólo hay una solución óptima.

Las ponderaciones de preferencia pueden aplicarse a cualquier gripo de objetivos conmensurables. Las ponderaciones deben reflejar la *utilidad* o el *valor* de los objetivos.

Rango de prioridad de los objetivos. ¿Qué pasa cuando los objetivos no son conmensurables, cuando no hay una escala común para comparar las desviaciones de los diferentes objetivos? Éste es un caso importante, al que se enfrentan con frecuencia los administradores. Si el administrador puede ordenar o dar un rango para sus metas, entonces la solución es posible.

TABLA 9-2
Solución con ponderaciones de preferencia

C_j	Variables básicas	0 T	0 C	1 D_{UH}	1 D_{OH}	2 D_{UT}	1 D_{UC}	Valores de solución
0	T	1	0	−0.1	0.1	1	0	8
1	D_{UC}	0	0	−0.1	0.1	1	1	4
0	C	0	1	0.1	−0.1	−1	0	6
	Z_j	0	0	−0.1	0.1	1	1	4
	$C_j - Z_j$	0	0	1.1	0.9	1	0	

Quizá no sea una tarea fácil dar un rango a los objetivos de acuerdo con su importancia, pero es algo que la mayoría de las personas entiende y puede lograr.[2] En la programación por objetivos se le asigna la prioridad P_1 al objetivo más importante, la siguiente P_2 a una prioridad más baja. No existe límite en el número de niveles de prioridad, pero debe asignarse una prioridad para cada variable de desviación. Se permiten empates o prioridades iguales.

Regresando al ejemplo, supóngase que el gerente proporciona la siguiente guía:

1 La prioridad más alta corresponde a utilizar por competo todas las horas regulares de trabajo.
2 La producción de mesas y sillas es la siguiente en importancia; la ganancia de las mesas es el doble que la de las sillas.
3 Minimizar el tiempo extra tiene la prioridad más baja.

Con base en estos rangos de prioridad, la nueva función objetivo es

$$\text{Minimizar } Z = P_1 D_{UH} + P_2 (2D_{UT} + D_{UC}) + P_3 D_{0H}$$

Esto asigna la prioridad más alta, P_1 a minimizar la posibilidad de no lograr el objetivo de las horas de mano de obra. La siguiente prioridad, P_2, está asignada a no lograr los objetivos de las mesas y de las sillas. Éstos se consideran conmensurables en donde las mesas tienen una ponderación de preferencia de 2. La prioridad más baja, P_3, quedó para la posibilidad de no lograr el objetivo de las horas extras.

Una suposición importante al dar estos rangos de prioridad es que $P_1 > P_2 > P_3$. Es decir, P_1 es *mucho* más importante que P_2, que a su vez es *mucho* más importante que P_3. Esta suposición es necesaria para poder obtener una solución. En la siguiente sección se explica cómo se adapta el

[2] Esto se llama medida *ordinal.* Se establecen sólo relaciones de "mayor que", "menor que" o "igual" entre los artículos. No existe una medida de cuánto es más grande un artículo que otro.

método símplex para resolver problemas de programación por objetivos con rangos de prioridad.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 9-2

Supóngase que se han establecido las siguientes restricciones de objetivos:

$$\text{Ganancia} \quad + D_{UP} - D_{0P} = \$10\,000$$
$$\text{ROI} \quad + D_{UR} - D_{OR} = 20 \text{ porcentaje}$$

Escríbase la función objetivo para cada caso:

a El año que viene se ve difícil. Habrá que luchar por cada dólar de ganancia y se necesitan $10 000 para reinversión. Alcanzar el objetivo del rendimiento sobre la inversión sería bueno. Cualquier cosa extra sombre la ganancia o el rendimiento ROI sería como tener merengue en el pastel.

b Para mí, el ROI es la mejor medida de la habilidad del administrador. Si no puede lograrse el objetivo sobre el rendimiento quiero oír una muy buena explicación. La ganancia, por supuesto, tiene que resultar bien si se logra el ROI, no puede tenerse uno sin la otra. Pero yo me propongo metas reales. No estoy buscando lograr más de lo necesario.

EL MÉTODO SÍMPLEX PARA PROGRAMACIÓN POR OBJETIVOS

Como ya se indicó, el método símplex estándar puede usarse cuando los objetivos son conmensurables (ya sea con ponderaciones iguales o de preferencia). El aumento es un poco diferente y se describirá en seguida. Después se llevará a cabo la solución completa de un problema de programación por objetivos con rangos de prioridad. Esto se hará para el ejemplo:

$$\text{Minimizar: } Z = P_1 D_{UH} + P_2(2D_{UT} + D_{UC}) + P_3 D_{OH}$$
$$\text{Restricciones: } 10T + 10C + D_{UH} - D_{OH} = 100$$
$$T + D_{UH} = 8$$
$$C + D_{UC} = 6$$

Aumento

Todavía se aplican aquí las reglas para el aumento que se dieron en el capítulo 8. Entonces, todas las restricciones que no son de objetivos se aumentan tal como se ha hecho hasta ahora. Sin embargo, las restricciones de objetivo presentan un caso especial. Todas ellas son igualdades y de acuerdo con las reglas se debe aumentar una variable artificial. Esto *no* será necesario *si* la restricción tiene una variable de desviación hacia *abajo*. En el caso contrario se tendrá que aumentar una variable artificial.

El caso especial surge debido a que las variables de desviación hacia abajo cumplen con todos los requisitos para las variables en la solución inicial. Es decir, tienen un coeficiente de + 1 en una restricción y de cero en todas las demás restricciones. En el ejemplo anterior, cada restricción

tiene una variable de desviación hacia abajo; por tanto, no es necesario ningún aumento.

Las variables de holgura y de excedente siguen teniendo coeficiente cero en la función objetivo. Siempre se asignará + M como coeficiente de las variables artificiales (ya que la programación por objetivos siempre minimiza). Si los objetivos tienen rango de prioridad, entonces M *debe considerarse como la prioridad más alta.*

Construcción de la tabla símplex inicial

En la tabla 9-3 se muestra la tabla inicial para el ejemplo. El único cambio es que hay tres renglones de Z_i y $C_j - Z_j$, uno para cada nivel de prioridad, en lugar de uno solo para todo. Por conveniencia la prioridad más alta se coloca hasta abajo. El resto de la tabla es la misma que la que se usó en el capítulo 8.

Cálculo de Z_j y $C_j - Z_j$

La mecánica de estos cálculos es la misma que la que se analizó antes. Sin embargo, a causa de los rangos de prioridad, se registrarán en forma diferente. Para comprobar esto se calcula Z_i para la primera columna de la tabla 9-3.

$$Z_T = 10P_1 + 2P_2 + 0P_3$$

Como los rangos de prioridad (P_1, P_2, P_3) no son conmensurables, no puede hacerse ninguna otra consolidación. En su lugar se registra el coefi-

TABLA 9-3
Tabla inicial del símplex

C_j	Variables básicas	0 T	0 C	P_1 D_{UH}	P_3 D_{OH}	$2P_2$ D_{UT}	P_2 D_{UC}	Valores de solución
P_1	D_{UH}	10	10	1	−1	0	0	100
$2P_2$	D_{UT}	1	0	0	0	1	0	6
P_2	D_{UC}	0	1	0	0	0	1	8
P_3	Z_j	0			0			
	$C_j - Z_j$	0			1			
P_2	Z_j	2			0			
	$C_j - Z_j$	−2			0			
P_1	Z_j	10			−1			
	$C_j - Z_j$	−10			1			

cíente de cada rango de prioridad en *su propio* renglón Z_i. Así, en la tabla 9-3 puede observarse 10 para Z_i en el renglón de P_1, 2 para Z_i en el renglón de P_2 y cero en el renglón de P_3.

Para encontrar C_i — Z_i considérese la columna D_{OH} en la tabla 9-3. Para esta columna

$$C_j = P_3$$

El valor de Z_j para esta columna es

$$Z_j = -1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3$$

Restando, se obtiene

$$C_j - Z_j \quad 1 \cdot P_3 - (-1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3)$$
$$= 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 1 \cdot P_3$$

Como puede observarse, los coeficientes para cada rango de prioridad se muestran en sus propios renglones en la tabla 9-3.

Con la práctica, el lector aprenderá a hacer estos cálculos un renglón a la vez. Entonces, para la columna D_{OH} y el renglón P_1, se tiene que $Z_i = -1$, ya que sólo existe una variable P_1 en la solución. Además, $C_j - Z_j$ será $0-(-1) = 1$, ya que P_1 no aparece en el valor de C_j.

Revisión de la solución

Los problemas de programación por objetivos se resuelven en orden de prioridad. Es decir, se prueba la optimación en el nivel de prioridad más alto ignorando las prioridades más bajas hasta optimizar ese nivel. Una vez hecho esto, se considerarán niveles más bajos. Por ejemplo, en la tabla 9-4 se muestra el renglón completo del criterio símplex para P_1. Tanto T como C tienen valores negativos, lo cual indica que la solución no es óptima. (Como se está minimizando, se deben tener todos los valores no negativos para que sea óptima.) Como antes, los empates pueden romperse en forma arbitraria, y se ha seleccionado T como la variable que entra.

La variable que sale se determina igual: se selecciona la variable que tiene el menor cociente no negativo de los valores de solución y los coeficientes de la columna. En la tabla 9-4 ésta es D_{UT}. Los renglones se revisan de acuerdo con las reglas del capítulo 8. La segunda solución se muestra en la tabla 9-5.

Terminación de la solución

La segunda solución todavía es menor que el óptimo. La nueva variable que entra es C, mientras que la que sale es D_{UH}. La tercera solución se muestra en la tabla 9-6.

Nótese que la tercera es óptima para el criterio de P_1 y también para P_3. No obstante, la segunda prioridad (P_2) no se satisface. Se mejoraría si entrara D_{0H}. Pero, ¿qué haría eso al nivel de P_1?

TABLA 9-4
El renglón completo de $C_j - Z_j$ para P_1

C_j	Variables básicas	0 T	0 C	P_1 D_{UH}	P_3 D_{OH}	$2P_2$ D_{UT}	P_2 D_{UC}	Valores de solución
P_1	D_{UH}	10	10	1	−1	0	0	100
$2P_2$	D_{UT}	1	0	0	0	1	0	6 ← Variable que sale
P_2	D_{UC}	0	1	0	0	0	1	8
P_3	Z_j							
	$C_j - Z_j$							
P_2	Z_j							
	$C_j - Z_j$							
P_1	Z_j	10	10	1	−1	0	0	
	$C_j - Z_j$	−10	−10	0	1	0	0	
		↑ Variable que entra						

TABLA 9-5
Segunda solución

C_j	Variables básicas	0 T	0 C	P_1 D_{UH}	P_3 D_{OH}	$2P_2$ D_{UT}	P_2 D_{UC}	Valores de solución
P_1	D_{UH}	0	10	1	−1	−10	0	40 Variable que sale
0	T	1	0	0	0	1	0	6
P_2	D_{UC}	0	1	0	0	0	1	8
P_3	Z_j							
	$C_j - Z_j$							
P_2	Z_j							
	$C_j - Z_j$							
P_1	Z_j	0	10	1	−1	−10	0	
	$C_j - Z_j$	0	−10	0	1	10	0	
			↑ Variable que entra					

TABLA 9-6
Tercera solución

C_j	Variables básicas	0	0	P_1	P_3	$2P_2$	P_2	Valor de solución
		T	C	D_{UH}	D_{OH}	D_{UT}	D_{UC}	
0	C	0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	−1	0	4
0	T	1	0	0	0	1	0	6
P_2	D_{UC}	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1	1	Variable 4 que sale
P_3	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$	0	0	0	1	0	0	
P_2	Z_j	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1	1	
	$C_j - Z_j$	0	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	1	0	
P_1	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$	0	0	1	0	0	0	

Variable que entra

Como el valor del criterio de P_1 para D_{OH} es cero, no habrá cambio, de manera que se proseguirá a otra revisión.

La solución final se muestra en la tabla 9-7. Esta solución es óptima un los niveles P_1 y P_2, pero no para P_3. Tanto D_{UT} como D_{OC} tienen valores negativos en el renglón criterio de P_3. Sin embargo, si se introduce cualquiera de ellas en la solución, el nivel P_2 sufrirá como lo muestran los valores criterio positivos para las dos variables (P_1 no se afecta). Como P_2 es mucho más importante que P_3, se ha alcanzado la solución más satisfactoria posible. La solución final es producir ocho mesas y seis sillas. Esto le-quiere 40 horas de tiempo extra.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 9-3

Resuélvase el siguiente problema de programación por objetivos con el método símplex:

$$\text{Minimizar: } Z = P_2D_{UA} + P_1D_{UB}$$
$$\text{Restricciones: } 7X_1 + 7X_2 + D_{UA} = 49$$
$$4X_1 + 6X_2 + D_{UB} = 24$$

TABLA 9-7
Solución final

C_j	Variables básicas	0 T	0 C	P_1 D_{UH}	P_3 D_{OH}	$2P_2$ D_{UT}	P_2 D_{UC}	Valores de solución
0	C	0	1	0	0	0	1	8
0	T	1	0	0	0	1	0	6
P_3	D_{OH}	0	0	−1	1	10	10	40
P_3	Z_j	0	0	−1	1	10	10	
	$C_j - Z_j$	0	0	1	0	−10	−10	
P_2	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$	0	0	0	0	2	1	
P_1	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$	0	0	1	0	0	0	

Solución por computadora de problemas de programación por objetivos

Los programas estándar de PL para computadora pueden usarse para resolver problemas de programación por objetivos sólo cuando los objetivos son conmensurables. Si los objetivos tienen rangos de prioridad, se necesita un programa modificado. Las dos obras de Lee citadas al final de este capítulo contienen el listado de un programa en Fortran para programación por objetivos con prioridades.

APLICACIONES DE PROGRAMACIÓN POR OBJETIVOS

La programación por objetivos amplía significativamente el alcance de aplicación de la PL al permitir considerar varios objetivos. En esta sección se describen tres aplicaciones para ilustrar cuan poderosa es la programación por objetivos. Se hará hincapié en la formulación de cada problema para que el lector pueda apreciar cómo se traducen los objetivos platicados a restricciones matemáticas. Igual que con los otros ejemplos de programación lineal, por conveniencia éstos estarán simplificados; las aplicaciones reales pueden ser mucho más grandes. Los tres ejemplos son una adaptación de Lee.[3]

Ejemplo 1: planeación de la producción

Una compañía de electrónica fabrica dos productos, tocadiscos y grabadoras, usando dos centros de maquinado (1 y 2). Cada tocadiscos usa dos ho-

[3] Sang, M. Lee, *Goal Programming for Decision Analysis* (Philadelphia: Auerbach, 1972).

ras en el centro 1 y una hora en el centro 2. Cada grabadora usa una hora en el centro 1 y tres horas en el centro 2. La compañía cuenta con 120 horas en el centro 1 y con 150 horas en el centro 2.

El costo promedio por hora de operación es $80 y $20 para los centra; de maquinado 1 y 2, respectivamente. La ganancia en los tocadiscos es de $100 por unidad y en las grabadoras es de $75 por unidad. El departamento de comercialización ha pronosticado ventas máximas para el periodo de 50 tocadiscos y 80 grabadoras.

El presidente de la compañía estableció los siguiente objetivos en orden de prioridad:

1 Producir por lo menos 50 tocadiscos.
2 Evitar la subutilización de las horas de trabajo regulares en ambos centros. (Se asignarán ponderaciones al tiempo inútil basadas en los costos de operación por hora.)
3 Se limitará el tiempo extra en el centro de maquinado 1 a 20 horas.
4 Producir al menos 80 grabadoras.
5 Minimizar el tiempo extra total en ambos centros (ponderados de acuerdo con los costos de operación).

La pregunta es: ¿cuántos tocadiscos y grabadoras deben producirse?
Para formular el problema se comenzará definiendo las variables de decisión. Sea:

X_1 - número de tocadiscos producidos
X_2 - número de grabadoras producidas

Restricciones del centro de maquinado 1 Las horas de trabajo en tiempo regular en este centro están limitadas a 120. Cada tocadiscos usa 2 horas y cada grabadora 1 hora. Como puede quedarse abajo o arriba de las 120 horas, se necesitan dos variables de desviación. La restricción es:

$$2X_1 + X_2 + D_{U1} - D_{O1} = 120$$

Restricciones del centro de maquinado 2 El centro 2 dispone de 150 horas de trabajo regular y una vez más puede quedarse arriba o abajo de esta cantidad:

$$X_1 + 3X_2 + D_{U2} - D_{O2} = 150$$

Restricciones de ventas Puede venderse un máximo de 50 tocadiscos y 80 grabadoras. Como no se permite sobreproducción, sólo se necesitan variables de desviación hacia abajo. Las dos restricciones de ventas son:

$$X_1 + D_{UR} = 50$$
$$X_2 + D_{UT} = 80$$

Tiempo extra en el centro de maquinado 1 Otro objetivo es limitar el tiempo extra a 20 horas. El tiempo extra en el centro de maquinado 1 está dado

por D_{O1}. Esta variable se introducirá en la restricción del centro 1. La restricción del objetivo de tiempo extra es

$$D_{O1} + D_{U0} - D_{O0} = 20$$

Nótese que no es necesaria otra restricción para el objetivo de minimizar el tiempo extra *total,* eso se tomará en cuenta en la función objetivo.

Función objetivo La función objetivo puede construirse incluyendo un objetivo con su prioridad a la vez. La primera prioridad es producir por lo menos 50 tocadiscos. Como D_{UR} es la variable de desviación hacia abajo para los tocadiscos, se tiene

$$Z = P_1 D_{UR}$$

La siguiente prioridad es evitar la subutilización de las horas de trabajo en cada centro. Dado que la operación en el centro 1 cuesta cuatro veces más que en el centro 2, tendrá una ponderación más alta.

$$Z = P_1 D_{UR} + P_2(4D_{U1} + D_{U2})$$

La tercera prioridad es limitar a 20 horas el tiempo extra del centro de maquinado 1. Entonces,

$$Z = P_1 D_{UR} + P_2(4D_{U1} + D_{U2}) + P_3 D_{00}$$

La cuarta prioridad se refiere a producir por lo menos 80 grabadoras. Esto agregará $P_4 D_{UT}$. La última prioridad es minimizar el tiempo extra total, ponderado otra vez con la diferencia de 4 a 1 en los costos entre los centros. La función objetivo completa es:

$$\text{Minimizar: } Z = P_1 D_{UR} + P_2(4D_{U1} + D_{U2}) + P_3 D_{00} + P_4 D_{UT} + P_5(4D_{O1} + D_{O2})$$

Nótese que la desviación hacia abajo en el límite de 20 horas en el tiempo extra para el centro 1 (D_{UO}) no aparece en la función objetivo. Pero todas las variables que aparecen en una restricción *deben* incluirse en la función objetivo, ¿qué pasó entonces? Igual que las variables de decisión, tiene coeficiente cero y se omitió El problema completo es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar: } Z &= P_1 D_{UR} + P_2(4D_{U1} + D_{U2})\, P_3 D_{00} + P_4 D_{UT} \\
&\quad + P_5(4D_{O1} + D_{O2}) \\
\text{Restricciones: } & 2X_1 + X_2 + D_{U1} - D_{O1} = 120 \\
& X_1 + 3X_2 + D_{U2} - D_{O2} = 150 \\
& X_1 + D_{UR} = 50 \\
& X_2 + D_{UT} = 80 \\
& D_{O1} + D_{U0} - D_{00} = 20 \\
& X_1, X_2, D_{U1}, D_{U2}\, D_{O1}, + D_{O2}, D_{UR}, D_{UT}, \\
& D_{U0}, D_{00} \geq 0
\end{aligned}$$

Solución Este problema tiene 10 variables, cinco restricciones y cinco niveles de prioridad. La solución en la computadora es:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 50 \\
X_2 &= 40 \\
D_{O1} &= 20 \\
D_{O2} &= 20 \\
D_{UT} &= 4 \\
D_{U1} &= D_{U2} = D_{UR} \\
&= D_{U0} = D_{O0} = 0
\end{aligned}
$$

Según esta solución, se deben producir 50 tocadiscos y 40 grabadoras. Cada centro de maquinado trabajará 20 horas extra. La ganancia total será de $8 000. Los primeros tres objetivos se cumplen pero los últimos dos no.

Ejemplo 2: planeación del esfuerzo de ventas

Una gerente de ventas está tratando de organizar un programa para sus cinco vendedores (llámense A, B, C, D y E) para el mes próximo. Ha formulado los siguientes objetivos para el periodo en orden de prioridad:

J Alcanzar en el mes ventas por $14 500.
2 Permitir que los cinco vendedores trabajen por lo menos sus horas regulares.
3 Lograr que el vendedor B gane por lo menos $170 en comisiones.
4 No exceder el tope de tiempo extra para los vendedores A, B y C.
5 No exceder el tope de tiempo extra para los vendedores D y E.
6 Lograr que los vendedores C y D alcancen comisiones de $87 y $52 respectivamente.

La gerente de ventas ha desarrollado datos sobre la eficacia de la venta, las horas regulares de trabajo y los límites de tiempo extra. La lista de e¡-tos datos se encuentra en la tabla 9-8. Se paga a los vendedores B, C y D el 5.5% de comisión sobre sus ventas.

Para encontrar cuántas horas deben programarse para cada vendedor se definen las siguientes variables de decisión:

X_1 = horas de trabajo para el vendedor A
X_2 = horas de trabajo para el vendedor B
X_3 = horas de trabajo para el vendedor C
X_4 = horas de trabajo para el vendedor D
X_5 = horas de trabajo para el vendedor E

Restricción del objetivo de ventas totales La primera meta es alcanzar por lo menos $14 500 en ventas totales. Con los datos de eficacia de la venta de la tabla 9-8, esta restricción puede escribirse:

$$24X_1 + 16X_2 + 9X_3 + 5X_4 + 1.5X_5 + D_{US} - D_{OS} = \$14\,500$$

TABLA 9-8
Datos de ventas

Vendedor	*Horas regulare»*	*Tiempo extra máximo*	*$de venta/hora*
A	**200**	**24**	**24**
B	**200**	**24**	**16**
C	**172**	**52**	**9**
D	**160**	**32**	**5**
E	**100**	**32**	**1.50**

Restricciones de horas de trabajo regulares Cada vendedor debe trabajar por lo menos sus horas de trabajo regulares. Esto da cinco restricciones:

$$\begin{aligned} X_1 + D_{U1} - D_{O1} &= 200 \\ X_2 + D_{U2} - D_{O2} &= 200 \\ X_3 + D_{U3} - D_{O3} &= 172 \\ X_4 + D_{U4} - D_{O4} &= 160 \\ X_5 + D_{U5} - D_{O5} &= 100 \end{aligned}$$

Restricciones de comisión Tres de los vendedores (B, C y D) deberán obtener un mínimo de comisiones. Con 5.5% de comisión pagado sobre las ventas, las tres restricciones son:

$$\begin{aligned} 0.055(16X_2) + D_{UB} - D_{OB} &= 170 \\ 0.055(9X_3) + D_{UC} - D_{OC} &= 87 \\ 0.055(5X_4) + D_{UD} - D_{OD} &= 52 \end{aligned}$$

Restricciones de tiempo extra En la tabla 9-8 se da el tope de tiempo extra para cada vendedor. Serán necesarias restricciones de objetivo para cada variable de desviación que se introdujo en las restricciones de tiempo regular. Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} D_{01} + D_{U6} - D_{06} &= 24 \\ D_{02} + D_{U7} - D_{07} &= 24 \\ D_{03} + D_{U8} - D_{08} &= 52 \\ D_{04} + D_{U9} - D_{09} &= 32 \\ D_{05} + D_{U10} - D_{010} &= 32 \end{aligned}$$

Función objetivo La función objetivo tiene seis niveles de prioridad. Cuando se establece y se escribe junto con las restricciones, el problema completo queda:

$$\begin{aligned} \textbf{Maximizar: } Z = {} & P_1 D_{US} + P_2(D_{U1} + D_{U2} + D_{U3} + D_{U3} + \\ & D_{U4} + D_{U5}) \\ & P_3 D_{UB} + P_4(D_{O6} + D_{O7} + D_{O8}) \\ & + P(D_{O9} + D_{O10}) + P_6(D_{UC} + D_{UD}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\textit{Restricciones: } & X_1 + D_{U1} - D_{O1} = 200 \\
& X_2 + D_{U2} - D_{O2} = 200 \\
& X_3 + D_{U3} - D_{O3} = 172 \\
& 24X_1 + 16X_2 + 9X_3 + 5X_4\ 1.5X_5 + D_{U5} - D_{O5} = 14\,500 \\
& X_4 + D_{U4} - D_{O4} = 160 \\
& X_5 + D_{U5} - D_{O5} = 100 \\
& 0.055(16X_2) + D_{UB} - D_{OB} = 170 \\
& 0.055(9X_3) + D_{UC} - D_{OC} = 87 \\
& 0.055(5X_3) + D_{UD} - D_{OD} = 52 \\
& D_{O1} + D_{U6} - D_{O6} = 24 \\
& D_{O2} + D_{U7} - D_{O7} = 24 \\
& D_{O3} + D_{U8} - D_{O8} = 52 \\
& D_{O4} + D_{U9} - D_{O9} = 32 \\
& D_{05} + D_{U10} - D_{O10} = 32 \\
& \text{Todas las } X_i \text{ y las } D_S \geq 0
\end{aligned}
$$

Solución La solución resulta ser:

$X_1 = X_2 = X_3 = 224$
$X_4 = 665$
$X_5 = 132$

Esto cumple con el objetivo de ventas de $14 500, igual que con los otros objetivos con una excepción: el objetivo 5. ¡El vendedor D tendrá que trabajar 665–160 = 505 horas extra en un mes! Al tiempo que la comisión puede resultar buena, es claro que esto es irreal.

Este problema ilustra la necesidad de un enfoque experimental para algunas aplicaciones de la programación por objetivos. Aquí, el objetivo con la prioridad más alta fuerza cantidades imprácticas de tiempo extra en el personal. El gerente de ventas ahora puede observar que es necesario agregar un vendedor más o reducir la meta de ventas. Se obtuvo información valiosa para la administración; esto puede llevar a la revisión de objetivos o restricciones y más tarde a una solución práctica.

Ejemplo 3: planeación de presupuesto en una clínica médica

El gerente administrativo de una clínica médica está tratando de preparar el presupuesto para el próximo año. La clínica emplea 27 personas (algunas de tiempo parcial) para 10 tipos de trabajos. Los salarios son el gasto más grande; otros costos corresponden a reemplazo de equipo, rayos X para los pacientes y material médico y administrativo. El gerente quiere conceder un aumento de salarios siempre que los costos promedio por paciente no aumenten en forma excesiva. En la tabla 9-9 se muestran los pagos por hora actuales para cada tipo de trabajo, el total de horas de trabajo disponibles en el año y la información sobre los pacientes y los costos.

El gerente administrativo junto con los seis médicos de la clínica formularon los siguientes objetivos en orden de prioridad:

1 Se quiere limitar el aumento en el cargo a los pacientes al 5%.
2 Se desea alcanzar el punto de equilibrio.
3 Se quiere minimizar la subutilización de las horas de trabajo del personal.
4 Proporcionar un 7 % de aumento de salarios para todos los tipos de trabajo, excepto de 1 y el 6, con las prioridades que se muestran en la tabla 9-9.
5 Se desea tener un fondo para reemplazo de equipo.
6 Se quiere dar un 5% de aumento de salario a los trabajos tipo 1 y 6 con las prioridades que se muestran en la tabla 9-9.

TABLA 9-9
Datos para la clínica médica

Tipo de trabajo	*Salario por hora*	*Horas anuales disponibles*	*Prioridad del aumento de salarios*
1	$14.25	20 280	10
2	2.50	2 080	5
3	2.48	2 090	6
4	2.19	2 080	1
5	2.20	2 080	7
6	5.31	2 080	9
7	2.08	12 480	2
8	1.97	8 320	4
9	1.94	4 160	3
10	1.24	1 456	8

Pronóstico del total de pacientes: 20 243
Cargo promedio actual por paciente: $19.88
Pronóstico de gastos por paciente: $4-42
Pronóstico del costo de reemplazo de equipo: S93 207.18

Para formular el problema se necesitan variables de decisión para los salarios y para las horas en cada tipo de trabajo, para el cargo promedio por paciente y el reemplazo de equipo. Éstas se definen en seguida:

$X_i, i = 1,2,\ldots,10$ = salario por cada tipo de trabajo
$Y_i, i = 1,2,\ldots,10$ = horas de trabajo por cada tipo
E = gasto para reemplazo de equipo
P = gasto promedio por paciente
C = cargo promedio por paciente

Restricción del cargo por paciente Una restricción es mantener el aumento en el cargo a los pacientes abajo del 5%. El cargo actual es $19.89, un 5 % de aumento lo elevaría a $20.88. La restricción de este objetivo es, entonces:

$$C + D_{UC} - D_{OC} = \$20.88$$

Restricción de salarios Se necesitan restricciones de objetivo para cada tipo de trabajo para conceder un 5% de aumento en las clases de 1 a 6 y 7% en las demás. Aplicando estos aumentos a los salarios actuales de la tabla 9-9 se obtienen las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
X_1 + D_{U1} - D_{O1} &= 14.96 \\
X_2 + D_{U2} - D_{O2} &= 2.68 \\
X_3 + D_{U3} - D_{O3} &= 2.65 \\
X_4 + D_{U4} - D_{O4} &= 2.34 \\
X_5 + D_{U5} - D_{O5} &= 2.35 \\
X_6 + D_{U6} - D_{O6} &= 5.58 \\
X_7 + D_{U7} - D_{O7} &= 2.23 \\
X_8 + D_{U8} - D_{O8} &= 2.11 \\
X_9 + D_{U9} - D_{O9} &= 2.08 \\
X_{10} + D_{U10} - D_{O10} &= 1.33
\end{aligned}$$

Restricciones de horas de trabajo Dado que se deben utilizar pon: completo las horas de trabajo en cada tipo, se necesitan 10 restricciones de objetivo:

$$\begin{aligned}
Y_1 + D_{U11} - D_{O11} &= 20\ 280 \\
Y_2 + D_{U12} - D_{O12} &= 2\ 080 \\
Y_3 + D_{U13} - D_{O13} &= 2\ 080 \\
Y_4 + D_{U14} - D_{O14} &= 2\ 080 \\
Y_5 + D_{U15} - D_{O15} &= 2\ 080 \\
Y_6 + D_{U16} - D_{O16} &= 2\ 080 \\
Y_7 + D_{U17} - D_{O17} &= 12\ 480 \\
Y_8 + D_{U18} - D_{O18} &= 8\ 320 \\
Y_9 + D_{U19} - D_{O19} &= 4\ 160 \\
Y_{10} + D_{U20} - D_{O20} &= 1\ 456
\end{aligned}$$

Restricciones de gastos Los gastos por cada paciente y para reemplazo de equipo proporcionan dos restricciones de objetivo más:

$$\begin{aligned}
E + D_{UE} - D_{OE} &= 93\ 207.18 \\
P + D_{UP} - D_{OP} &= 4.42
\end{aligned}$$

Restricción de punto de equilibrio La última restricción de objetivo es tener los ingresos totales igual que los costos totales. Con 29 243 pacientes esperados durante el año, se tiene:

$$\begin{aligned}
&29\ 243C - [(20\ 280X_1 + 2\ 080X_2 + 2\ 080X_3 + 2\ 080X_4 \\
&+ 2\ 080X_5 + 2\ 080X_6 + 12\ 480X_7 + 8\ 320X_8 + 4\ 160X_9 + 1\ 456X_{10}) \\
&+ E + 29\ 243P] + D_{UT} - D_{OT} = 0
\end{aligned}$$

Fundí n objetivo Se especificaron siete niveles de prioridad. La prioridad más alta la tiene el límite del 5% sobre los cargos a los pacientes: $P_1 D_{OC}$. La siguiente prioridad es para alcanzar el punto de equilibrio: $P_2(D_{UT} + D_{OT})$. La tercera prioridad es para la utilización completa de las horas de mano de obra: $P_3(D_{U11} + D_{U2} + D_{U13} + D_{U14} + D_{U15} + D_{U16} +$

$D_{U17} + D_{U18} + D_{U19} + D_{U20}$). La cuarta prioridad es cumplir con los gastos de los pacientes: P_4D_{UP}. Después está el 7% de aumento al salario para ocho tipos de trabajos, ponderados de acuerdo con las preferencias en la tabla 9-9: $P_5(8D_{U4} + 7D_{U7} + 6D_{U9} + 5D_{U8} + 4D_{U2} + 3D_{U3} + 2D_{U5} + D_{U10})$. La sexta prioridad es cumplir con los costos de reemplazo de equipo: P_6D_{UE}. Por último viene el 5% de aumento para los trabajos del tipo 1 y 6: $P_7(2D_{U6} + D_{U1})$. Escribiendo todo esto junto, la función objetivo queda:

$$\text{Minimizar: } Z = P_1D_{OC} + P_2(D_{UT} + D_{OT}) + P_3(D_{U11} + D_{U12T} + D_{U13} + D_{U14}) + D_{U15} - D_{U16} + D_{U17} + D_{U18} + D_{U19} + D_{U20}) + P_4D_P + P_5(8D_{U4} + 7D_{U7} + 6D_{U9} + 5D_{U8} + 4D_{U2} + 3D_{U3} + 2D_{U5} + D_{U10}) P_6D_{UE} + P_7(2D_{U6} + D_{U1})$$

Con todo, existen 23 variables de decisión, 48 variables de desviación y 24 restricciones. Este no es un problema muy grande para una computadora pero es claro que es más de los que una persona podría manejar manualmente.

Solución La solución de la computadora muestra que los primeros seis objetivos pueden cumplirse; pero el séptimo, no. El tipo de trabajo 6 puede alcanzar un 5% de aumento, pero el tipo uno puede recibir sólo un 3.3% (a $14.72). La solución completa es:

$X_1 = 14.72$	$Y_1 = 20\ 280$	$E = 4.42$
$X_2 = 2.68$	$Y_2 = 2\ 080$	$P = 93\ 207.18$
$X_3 = 2.65$	$Y_3 = 2\ 080$	$C = 20.88$
$X_4 = 2.34$	$Y_4 = 2\ 080$	
$X_5 = 2.35$	$Y_5 = 2\ 080$	
$X_6 = 5.58$	$Y_6 = 2\ 080$	
$X_7 = 2.23$	$Y_7 = 12\ 480$	
$X_8 = 2.11$	$Y_8 = 8\ 320$	
$X_9 = 2.08$	$Y_9 = 4\ 160$	
$X_{10} = 1.33$	$Y_{10} = 1\ 456$	

PROGRAMACIÓN ENTERA

El método simplex supone que todas las variables son continuas y generalmente da soluciones no enteras. Cuando las variables de decisión, como personas, mesas o unidades de producción, no pueden subdividirse, la solución del simplex no puede usarse en forma directa. El redondeo de una solución óptima es peligroso, ya que no es obvio el hecho de que la solución que resulte sea óptima o siquiera posible.

Programación entera es el nombre que recibe un conjunto de técnicas que pueden usarse para encontrar la mejor solución entera posible para un problema de PL. Ramificación y acotamiento es una de las más sencillas y eficaces de estas técnicas. Se describirá más adelante. Puede usarse para problemas en que todas las variables deben ser enteras y para problemas enteros *mixtos,* es decir, los que tienen algunas variables enteras y algunas continuas. Es una técnica de optimización en el sentido de que lleva

a la mejor solución entera posible. En la bibliografía se describen otras técnicas de programación entera como la de plano cortante y la de descomposición.

RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO

Los problemas de programación entera pueden resolverse en teoría, por medio de la enumeración de todas las soluciones posibles y la selección de la mejor. Dado que una o más variables deben ser enteros dentro de un rango finito, debe existir un límite finito para el número de soluciones posibles. Si el número de todas las posibilidades es pequeño, se recomienda hacer justo eso, tratarlas todas. Desafortunadamente, las posibilidades aumentan muy rápido al aumentar el número de variables y su extensión. En el ejemplo que sigue sólo hay dos varíales. Pero aun este sencillo ejemplo tiene 305 combinaciones posibles de soluciones enteras.

Ramificación y acotamiento es una estrategia de búsqueda sistemática que reduce mucho el número de combinaciones que se deben examinar. Comienza con la solución óptima del símplex en donde se ignoraron las restricciones de variables enteras. Se selecciona después una variable con valor no entero y se crean dos "ramas" mutuamente excluyentes. Esto da lugar a dos nuevos problemas de PL que se deben resolver. Si ninguna solución es entera, se crean nuevas ramas y se resuelven nuevos problemas. En cada paso, la solución que se encuentra proporciona una "cota" pira esa rama en el sentido de que ninguna otra solución puede ser mejor. Por ejemplo, se inicia el proceso con una solución óptima no entera. Se sabe que no existe ninguna otra solución no entera que sea mejor. Un ejemplo ayudará a clarificar este proceso.

Ejemplo

Considérese el siguiente problema de programación entera:

$$\begin{aligned} \textbf{Maximizar:}\quad & Z = 60X + 50Y \\ \textbf{Restricciones:}\quad & 2X + 4Y \leq 80 \\ & 3X + 2Y \leq 55 \\ & X \leq 16,\ Y \leq 18 \\ & X, Y = 0, 1, 2, \ldots \text{(enteros)} \end{aligned}$$

La gráfica de este problema se muestra en la figura 9-4. La solución no antera óptima cae en la intersección de las dos primeras restricciones: X=7.5, Y= 16.25, Z = 1 262.5. Ninguna variable es entera. También puede afirmarse que ninguna otra solución no entera dará un valor mayor a 1 262.5 para la función objetivo.

Ramificación

Se inicia la ramificación con cualquiera de las dos variables, selecciónese X que tiene un valor de solución 7.5. Como sólo son de interés las soluciones enteras, pueden eliminarse todos los valores de X entre 7 y 8. Es decir, puede dividirse el espacio de soluciones en dos partes, una con $X \leq 7$ y

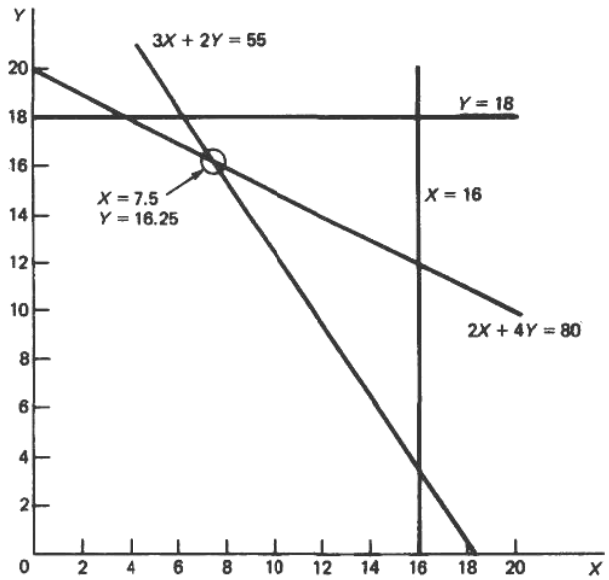


FIGURA 9-4
Ejemplo de programación entera.

otra con $X \geq 8$. tal como se muestra en la figura 9-5. Esto crea dos nuevos problemas de PL, uno para cada rama.

Rama A

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & Z = 60X + 50Y \\ \text{Restricciones:} \quad & 2X + 4Y \leq 80 \\ & 3X + 2Y \leq 55 \\ & X \leq 7,\ Y \leq 18 \end{aligned}$$

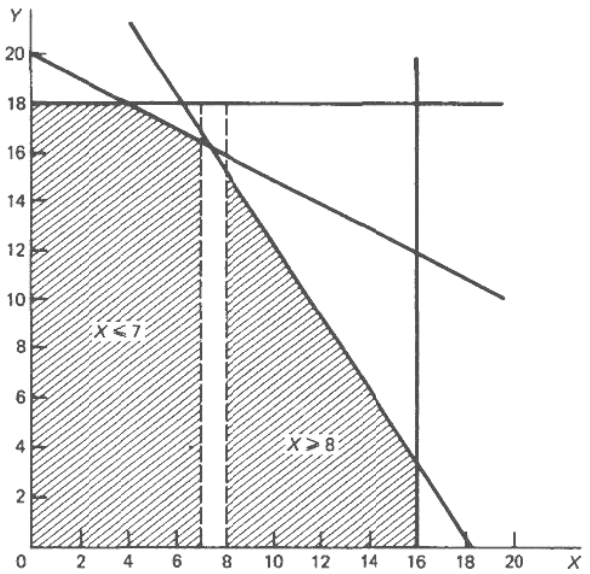
Rama B

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & Z = 60X + 50Y \\ \text{Restricciones:} \quad & 2X + 4Y \leq 80 \\ & 3X + 2Y \leq 55 \\ & X \leq 16,\ X \geq 8 \\ & Y \leq 8 \end{aligned}$$

Nótese que la restricción original $X \leq 16$ se convierte en superflua en la rama A. Ahora debe resolverse cada uno de los problemas ignorando de nuevo la restricción de variables enteras.

Un diagrama de árbol es muy útil para guardar un registro de las ramas. La solución para las dos ramas se muestra en el diagrama de árbol de la figura 9-6. Aunque ambas soluciones dan valores enteros de X, dejan a Y con valores no enteros. Nótese también que la función objetivo ha disminuido en ambos casos. En este punto puede afirmarse que ninguna solución entera en la rama A puede dar un valor de la función objetivo mayor que 1 245. De igual manera, 1 255 es una cota superior en la rama B.

FIGURA 9-5
La primera rama.



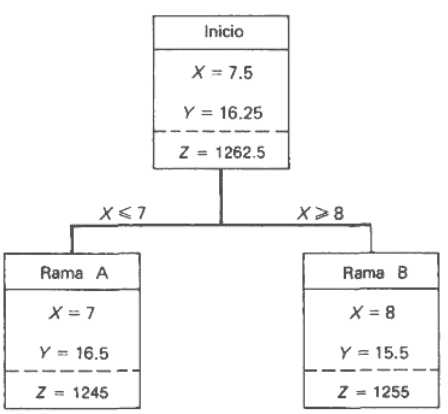
Ramificación posterior

Como la rama B tiene la cota superior mayor, se seguirá adelante con la ramificación en esa rama. La variable Y puede usarse para formar dos ramas: una para $Y \leq 15$ y otra para $Y \geq 16$. Esta partición, que se muestra en la figura 9-7, crea dos nuevos problemas:

Rama B1

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & Z = 60X + 50Y \\ \text{Restricciones: } & 2X + 4Y \leq 80 \\ & 3X + 2Y \leq 55 \\ & X \leq 16,\ X \geq 8 \\ & Y \leq 15 \end{aligned}$$

FIGURA 9-6
Diagrama de árbol



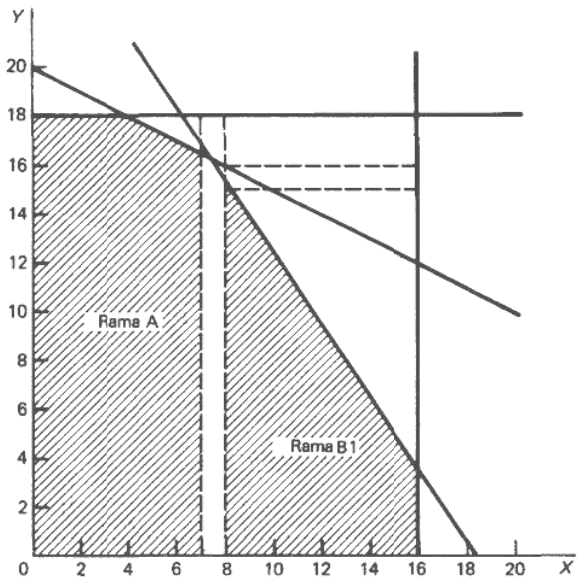


FIGURA 9-7
Ramificación sobre Y.

Rama B2

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & Z = 60X + 50Y \\ \text{Restricciones:} \quad & 2X + 4Y \leq 80 \\ & 3X + 2Y \leq 55 \\ & X \leq 16,\ X \geq 8 \\ & Y \leq 18,\ Y \geq 16 \end{aligned}$$

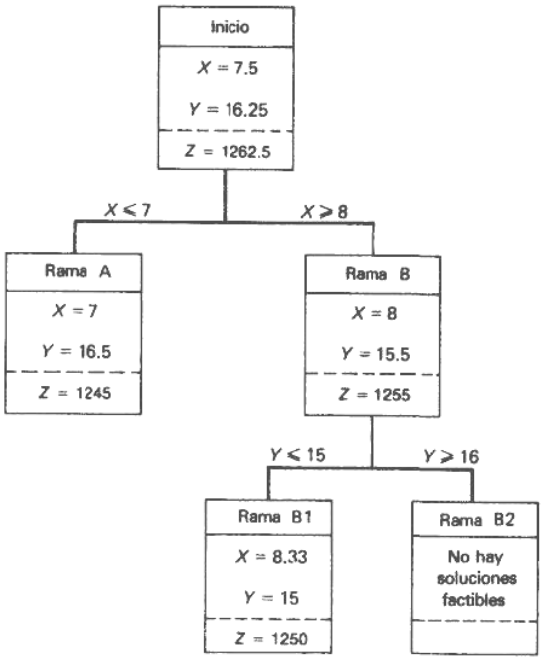
Nótese bien que la restricción de la rama B original ($X \geq 8$) continúa vigente en cada uno de los problemas. Éste siempre es el caso, ya que cada rama debe estar restringida por todas las ramas precedentes. Además, no se usó el valor $X = 8$, aun cuando apareció en la solución de la rama B, pues no era una restricción de la rama.

Las soluciones de los problemas anteriores se muestran en la figura 9-8. La rama B2 no tiene soluciones factibles como puede observarse en la gráfica de la figura 9-7. Sin embargo, en la rama B1, Y se convirtió en entero mientras que X resultó no entera. Esto no es raro en ramificación y acotamiento. Como 1 250 todavía es mayor que el resultado en la rama A, se seguirá adelante por la rama B1, ahora puede ramificarse sobre X usando $X \leq 8$ y $X \geq 9$. Los dos nuevos problemas son:

Rama B1a

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & Z = 60X + 50Y \\ \text{Restricciones:} \quad & 2X + 4Y \leq 80 \\ & 3X + 2Y \leq 55 \\ & X = 8,\ Y \leq 15 \end{aligned}$$

FIGURA 9-8
Traslado a lo largo de la rama B.



Rama B1b

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & Z = 60X + 50Y \\ \text{Restricciones: } & 2X + 4Y \leq 80 \\ & 3X + 2Y \leq 55 \\ & X \geq 9,\ X \leq 16 \\ & Y \leq 15 \end{aligned}$$

Nótese, en el primer problema, que la restricción de la rama B origina ($X \geq 8$) y la nueva restricción ($X \leq 8$) se combinan para dar $X = 8$.

Estos dos problemas se resolvieron con el método símplex (ignorando de nuevo las restricciones de variables enteras), y los resultados se muestran en la figura 9-9. Ambos dieron soluciones enteras siendo la rama B1b la mejor.

¿Está resuelto el problema? Todavía no. En la rama A todavía podría haber una solución entera con un valor de la función objetivo mayor que 1 240. Buscando esa posibilidad se ramifica sobre Y con los resultados que se muestran en la figura 9-10. Como resultado, se tiene que la solución en la rama B1b es óptima.

Por todo se resolvieron ocho problemas de programación lineal además del problema original. Esto es bastante menos que tratar de 305 combinaciones.

Resumen de ramificación y acotamiento

El sentido común es el mejor aliado al aplicar la técnica de ramificación y acotamiento. Cuando se ramifica, el objetivo es hacer una partición del

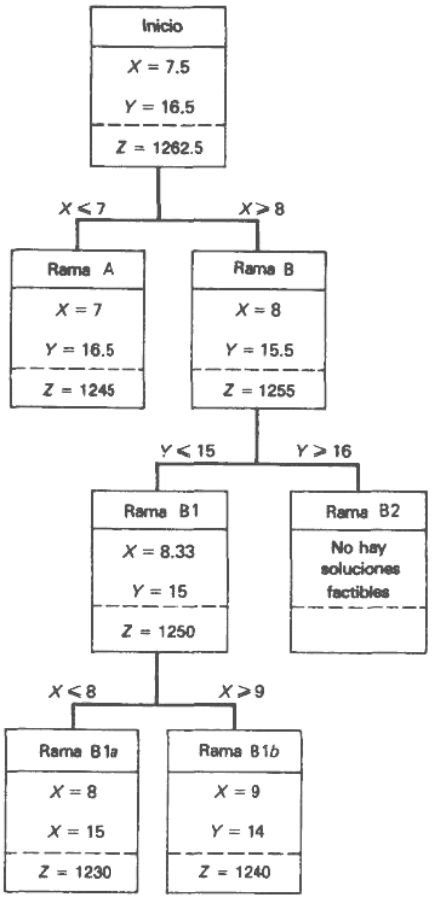


FIGURA 9-9
Terminación de la rama B.

espacio de soluciones en áreas mutuamente exclusivas y colectivamente exhaustivas. Después se calculan las cotas que las limitan para cada rama. Por último, se termina una rama con cualquiera de las condiciones siguientes:

a Se encontró una solución entera.
b No existen soluciones factibles.
c El valor de la función objetivo no es tan bueno como que el que se tiene para una solución entera en otra rama.

El método sirve también para problemas de minimización o para problemas enteros mixtos.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 9-4

Aplíquese la técnica de ramificación y acotamiento para resolver el siguiente problema de programación entera.

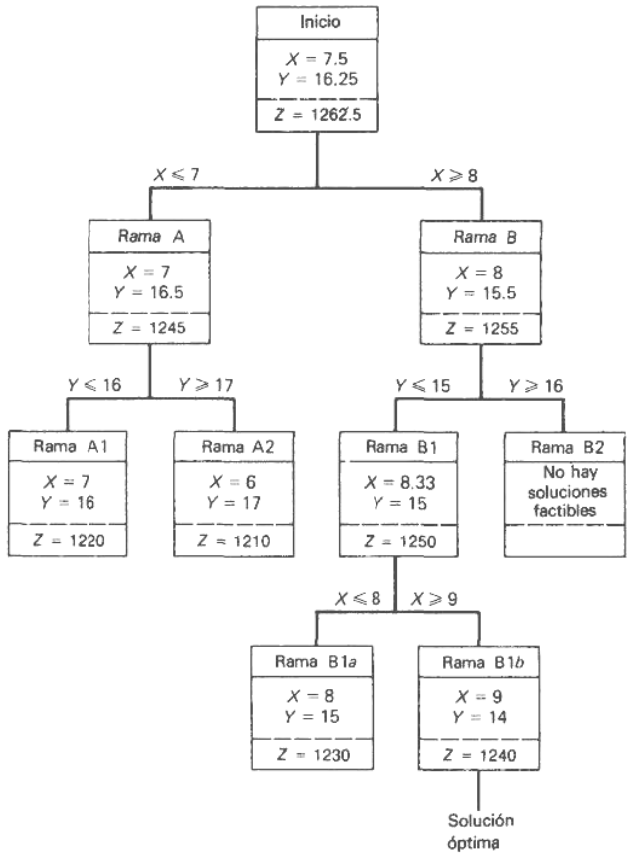


FIGURA 9-10
Solución completa.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & Z = 8X + 7Y \\ \text{Restricciones: } & 2X + 0.5Y \leq 12 \\ & 4X + 7Y \leq 36 \\ & X, Y = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

La solución óptima, ignorando la restricción de variables enteras es

$$\begin{aligned} X &= 5.5 \\ Y &= 2 \\ Z &= 58 \end{aligned}$$

RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO APLICADOS A PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN

La utilidad de la técnica de ramificación y acotamiento puede ilustrarse aplicándola a otro tipo de problemas combinatorios, como el problema de *asignación.* Estos problemas tratan de aparejar o *asignar* trabajos a máquinas, vendedores a distritos o camiones a rutas. El objetivo de la asignación es optimizar algún factor de costo de de ganancia.[4]

[4] Para una mayor descripción de los problemas de asignación véase el capítulo 10.

Considérese el siguiente ejemplo. El despachador de un servicio de ambulancias tiene cuatro ambulancias disponibles en diferentes puntos y cuatro llamados de servicio. En la tabla 9-10 se muestra el tiempo de traslado de cada ambulancia hasta cada paciente. El despachador quiere asignar las ambulancias de manera que se minimice el tiempo total de traslado. Éste es un ejemplo en pequeña escala y se podría resolver fácilmente por prueba y error. De hecho existen soto 24 asignaciones posibles (41). Con ramificación y acotamiento sólo será necesario examinar siete combinaciones para encontrar la solución óptima.

El método de ramificación y acotamiento comienza con una solución no factible la cual, se sabe, tiene el mejor valor criterio posible. En programación entera, el punto de partida es la solución óptima no entera (y, por tanto, no factible) del símplex. Para problemas de asignación se comenzará con la asignación de menor costo posible y se ignorará el hecho de que cada ambulancia puede asignarse sólo a un paciente. Observando la tabla 9-10, selecciónese el menor tiempo de traslado en cada columna:

A - 1:	7	
A - 2:	9	
A - 3:	8	
B - 4:	11	
	35	no factible

La asignación que resulta no es factible, ya que la ambulancia A se asignó a tres pacientes. El tiempo total de traslado, 35, proporciona una *cota* inferior, puesto que ninguna otra asignación puede tener un tiempo de traslado total menor. Se sabe esto por la forma como se hizo la asignación, se escogió el menor tiempo de cada columna.

Ahora se necesita formar las ramas. La estrategia es hacer una partición de las combinaciones posibles en dos conjuntos mutuamente exclusivos y colectivamente exhaustivos. Esto puede hacerse formando una rama que tiene una asignación específica, por ejemplo, A-l, y una segunda rama

TABLA 9-10
Un problema de asignación

	Paciente			
Ambulancia	1	2	3	4
A	7	9	8	13
B	16	16	15	11
C	16	19	10	15
D	16	17	14	16

para todas las combinaciones que *no* tienen A-1 (es decir, $\overline{A\text{-}1}$). Estas dos ramas se muestran en la figura 9-11.

Las asignaciones para estas dos ramas se hacen como sigue. Para la rana de arriba se asigna A a 1. Esto elimina el primer renglón y la primera columna de mayor consideración. De la matriz 3 x 3 que queda, se selecciona el menor tiempo de traslado de cada columna: 16,10,11. Entonces, el tiempo total es 44. La solución no es factible, ya que la ambulancia B se asignó a los pacientes 2 y 4.

Para la rama de abajo cualquier asignación es posible, mientras que A *no* se asigne a 1. Así, sólo se elimina la celda de la extrema superior izquierda (A-l). Encuéntrese el menor tiempo de traslado en cada columna, para obtener un total de 44. Esto tampoco es factible, ya que A se asigna dos veces. En este punto se tienen nuevas cotas inferiores, pero es necesario ramificar más para encontrar una solución factible.

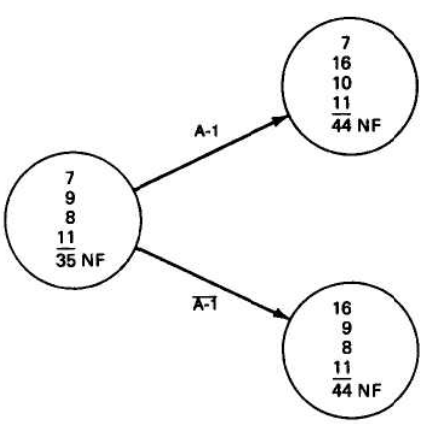
En la rama de arriba ya se tiene A asignada a 1; así, una extensión seria asignar B a 2. Como probablemente ya lo adivino el lector, existe alguna discreción al seleccionar las ramas. Pudo haberse usado B-3, C-3 o D-2. Ramificación y acotamiento es una *estrategia* general; se debe usar el propio sentido común al aplicarla. Para la rama de abajo, $\overline{A\text{-}1}$, la extensión se forma sobre B-l. Las cuatro extensiones se muestran en la figura 9-12.

La solución óptima se encuentra a lo largo de la rama A-l, $\overline{B\text{-}2}$. La asignación se encuentra eliminando la primera columna y el primer renglón, además de la celda B-2. Se escoge el tiempo más pequeño en cada columna de la matriz que queda. Esto da:

$$
\begin{array}{lr}
A\text{-}1: & 7 \\
D\text{-}2: & 17 \\
C\text{-}3: & 10 \\
B\text{-}4: & 11 \\
\hline
 & 45 \quad \text{factible}
\end{array}
$$

Como las otras tres ramas tienen valores criterio más altos que 45, es la asignación debe ser óptima.

FIGURA 9-11
Ramificación



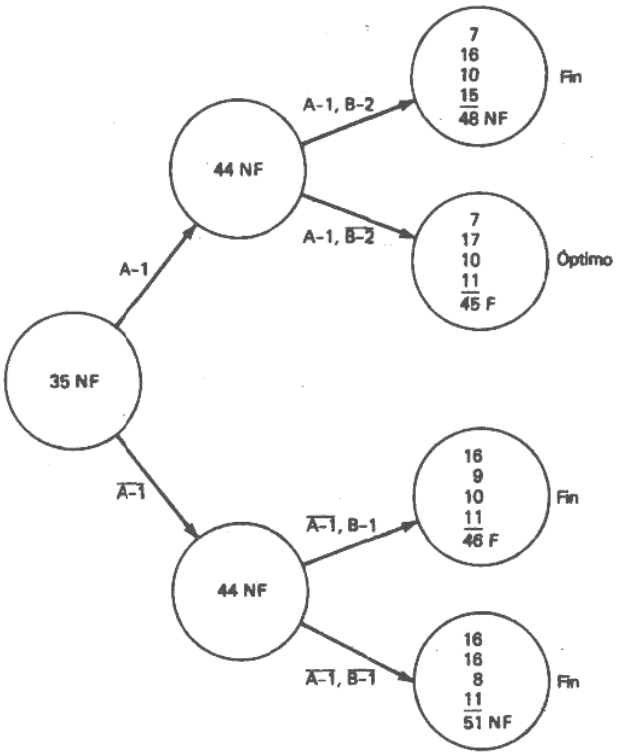


FIGURA 9-12
Diagrama completo de árbol.

En resumen, la estrategia de ramificación y acotamiento sigue siendo la misma. Se inicia con una solución no factible que proporciona una cota. Después se ramifica en dos espacios de solución mutuamente exclusivos y colectivamente exhaustivos. Los cálculos de las cotas y la lógica para la ramificación depende de las características del problema, pero la estrategia es universal.

EJERCICIO DE PRACTICÁIS

Resuélvase el siguiente problema usando ramificación y acotamiento:

	1	2	3	4
W	8	9	15	9
X	6	11	10	13
Y	9	7	9	7
Z	12	5	12	11

EXPERIENCIAS DEL MUNDO REAL

La programación por objetivos no se utiliza mucho hoy en día por varias razones. Primero, no está difundida como lo está la programación lineal estándar. Es mar reciente y todavía no se enseña en todas las escuelas de administración, los paquetes de computadora no se encuentran del todo disponibles. Segundo, tiene sus limitaciones. Además de las limitaciones de PL estándar, como la linealidad y las variables determinísticas, la estructura de prioridades y la necesidad de objetivos claros son problemas para algunas aplicaciones. Será necesario examinar un poco más cada uno de estos puntos.

La estructura de prioridades supone que el primer objetivo es *mucho* más importante que el siguiente. Esto evita los posibles trueques entre pequeños sacrificios en el primer objetivo y grandes ganancias en el siguiente. En otras palabras, aunque el administrador juzgue que un objetivo es más importante que otro, puede sentir que es sólo un poco más importante. Esto podría incorporarse si se pudiera aplicar una escala de medida común, como la utilidad, pero éste muy pocas veces es el caso. La única alternativa es aplicar análisis de sensibilidad en un esfuerzo para estudiar los posibles trueques.

La necesidad de claridad en los objetivos puede no parecer una limitación práctica. Después de todo, ¿no se supone que los administradores siempre tienen sus objetivos bien especificados? ¿No es ésta la era de la administración por objetivos (MBO)? Tal vez, pero cualquiera que tiene experiencia administrativa sabe que los asuntos a corto plazo adquieren una prioridad mucho más alta que las preocupaciones a largo plazo, lo que lleva a cambiar prioridades. También, los puntos de vista respecto de los objetivos o de sus prioridades pueden diferir de un administrador a otro. Estas consideraciones tienden a hacer que los administradores duden al poner sus pensamientos "en concreto".

A pesar de estas limitaciones, aquellos que manejan la programación por objetivos esperan que crezca considerablemente en su aplicación. Lee da ejemplos de las aplicaciones a planeación de la producción, planeación de utilidades, selección de cartera, selección de medios de publicidad planeación del esfuerzo de ventas y planeación corporativa en su libro *Goal Programming for Decision Analysis.* También proporciona ejemplos en hospitales, universidades y gobiernos municipales. Parece justo es decir que la programación por objetivos es una extensión útil a PL y que incrementa el alcance de su aplicación a varias áreas importantes de la administración.

La programación entera debería utilizarse con más frecuencia, ya que muchas aplicaciones de programación lineal requieren soluciones enteras. Aunque es difícil determinarlo con exactitud, los autores piensan que en el mundo real se hace mucho "redondeo". Esto es fácil de comprender. Después de todo, ¿no son muchos de los coeficientes en el modelo sólo aproximaciones? ¿No se está haciendo de hecho un análisis de sensibilidad? ¿*No* está la solución "cerca" del óptimo? Además, no siempre se dispone de programas de computadora para programación entera. Por otro lado requieren tiempo adicional de computadora, lo cual hace que la solución sea más costosa.

Sin duda, si se tiene una confianza razonable en que el redondeo será satisfactorio, entonces debe redondearse. Sin embargo, el tiempo y esfuer-

zo extra que se necesita para aplicar ramificación y acotamiento puede asegurar la mejor solución factible posible.

Existe un beneficio más al aprender la técnica de ramificación y acotamiento. Es algo que puede aplicarse a otras situaciones de toma de decisiones. Por ejemplo, los problemas de asignación pueden resolverse con ramificación y acotamiento. Después de todo, ramificación y acotamiento sólo es un proceso ordenado de eliminación.

RESUMEN

La programación por objetivos y la programación entera son dos extensiones del modelo general de programación lineal. La programación por objetivos permite considerar objetivos múltiples. La programación entera proporciona un método para resolver problemas en que una o más de las variables de decisión deben ser enteros.

La escencia de la programación por objetivos está en la formulación de los objetivos como restricciones agregando variables de desviación. Después se juzgan las variables de decisión en cuanto a su importancia relativa y se les asigna prioridades o ponderaciones. Entonces, el objetivo del problema de PL es minimizar las variables de desviación de acuerdo con las prioridades asignadas. Cuando los objetivos son conmensurables, pueden usarse los métodos estándares de PL. Cuando los objetivos tienen rangos de prioridad, el método símplex se modifica para desarrollar un renglón de criterio símplex para cada nivel de prioridad. Se busca, entonces, una solución que satisfaga un nivel de prioridad a la vez, comenzando con la prioridad más alta.

La técnica de ramificación y acotamiento ha resultado uno de los métodos más fáciles y rápidos de la programación lineal. Más como estrategia que como método matemático específico, sirve de guía para una variedad de soluciones posibles de una manera ordenada, hacia una solución óptima. Las ramas se escogen de una manera lógica y se establecen sus cotas. Se exploran o se eliminan ramas sucesivas, con base en la consideración de las cotas superiores (o inferiores), hasta encontrar una solución óptima.

Puede esperarse que tanto la programación por objetivos como la programación entera se vuelvan más populares cuando más personas vayan aprendiendo las técnicas y se disponga cada vez más de programas de computadora.

EJERCICIOS

Programación por objetivos

9-1 Escríbanse las restricciones de programación por objetivos para cada uno de los objetivos siguientes. También indíquese cuáles variables aparecerían en la función objetivo.

a Una compañía dispone de 100 horas de trabajo regular. Quieren utilizar por completo este tiempo.

b La compañía en (*a*) también quiere minimizar el tiempo extra.

c Los dependientes reciben actualmente $3 por hora. La compañía quiere aumentar esto en un 5%.

d Las mesas se venden en $30 cada una. La meta es alcanzar un total de ingresos de $3 000.

e Un solo producto se vende en $2 y tiene un costo variable de $1.50 y un costo fijo de $5 000. La compañía quiere alcanzar por lo menos el punto de equilibrio.

9-2 Para cada objetivo, escríbase su correspondiente restricción en programación por objetivos.

a Una compañía dispone de 500 horas de trabajo regular. Quiere limitar el tiempo extra a un 20% más.

b La compañía en (*a*) establece ahora que no permitirá ningún tiempo extra superior al 20%.

c Un objetivo de presupuesto es tener $15 000 para gastos de viajes.

d El gerente de producción quiere reducir los costos unitarios de producción a $3.76 durante el próximo año.

e La meta de ventas para el próximo año es 20 000 unidades.

9-3 Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \textbf{Minimizar:} \quad & Z = P_1 D_{UA} + P_2 D_{UB} \\ \textbf{Restricciones:} \quad & 7X_1 + 7X_2 + D_{UA} = 49 \\ & 4X_1 + 6X_2\, D_{UB} = 24 \end{aligned}$$

a Grafíquense las restricciones mostrando las desviaciones que se deben minimizar. Viendo la gráfica, ¿qué solución puede esperarse?

b Resuélvase el problema con método simplex.

9-4 Resuélvase el siguiente problema de programación por objetivos con el método simplex:

$$\begin{aligned} \textbf{Minimizar:} \quad & Z = P_1 D_{UA} + P_2 (D_{UB} + D_{OB}) \\ \textbf{Restricciones:} \quad & 10X_1 + 10X_2 + D_{UA} = 100 \\ & 4X_1 + 8X_2\, D_{UB} - D_{OB} = 32 \end{aligned}$$

9-5 Con el método simplex resuélvase el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \textbf{Minimizar:} \quad & Z = P_1 D_{UA} + P_2 D_{OB} \\ \textbf{Restricciones:} \quad & 7X_1 + 8X_2 + D_{UA} = 56 \\ & 6X_1 + 3X_2 - D_{OB} = 18 \end{aligned}$$

9-6 Aplíquese el método simplex para resolver el siguiente problema de programación por objetivos:

$$\begin{aligned} \textbf{Minimizar:} \quad & Z = P_1 (2D_{U3} + D_{U2} + D_{O3}) + P_2 D_{U1} \\ \textbf{Restricciones:} \quad & 3X_1 + 4X_2 + D_{U1} - D_{O1} = 24 \\ & 2X_1 + X_2 + D_{U2} - D_{O2} = 36 \\ & X_1, D_{U3} - D_{O3} = 12 \end{aligned}$$

9-7 La Zener Corporation produce dos tipos de televisores, de color y blanco y negro. El departamento de control de la producción está tratando de establecer la programación de ensamble de las consolas para el próximo mes. Ambos tipos de televisores usan la misma consola y se dispone de 200 000 consolas. Se usa una misma línea de ensamble para

los dos tipos y se dispone de 100 000 horas de mano de obra regular. Los televisores de color, que son más complejos, usan 1.5 horas de mano de obra y los blanco y negro 1 hora. Para cumplir los objetivos de ventas se establecieron cuotas de 40 000 y 30 000 televisores de color y blanco y negro respectivamente. Los objetivos en orden de prioridad son:

1 Cumplir con las cuotas de producción.
2 Proporcionar seguridad en el trabajo y utilizar en su totalidad horas de trabajo regulares.
3 Minimizar el tiempo extra.

a Establézcanse la función objetivo y las restricciones pare este problema.
b Resuélvase el problema con el método símplex.

9-8 La Mass Media está tratando de seleccionar el medio de publicidad para un cliente. Los medios posibles se han reducido a dos:

Medio	*Costo/unidad*	*Unidades de exposición*
Radio	**$2 000**	**1800**
Televisión	**2000**	**8500**

A partir de las consultas con el cliente se han establecido los siguientes objetivos (en orden):

1 Gastar $20 000 en publicidad.
2 Alcanzar por lo menos 60 000 unidades de exposición.
3 Asignar no más del 60% del presupuesto a la televisión.

a Formúlese éste como un problema de programación por objetivos.
b Resuélvase con el método símplex.

9-9 Un programador de la producción necesita asignar un pedido de 200 unidades a dos líneas de producción. La primera línea es más moderna y produce a una tasa de 12 unidades por hora. La tasa de producción para la segunda línea es de 10 unidades por hora. Ambas líneas trabajan regularmente ocho horas al día. El pedido debe producirse en un día para cumplir con la promesa de entrega. Los objetivos del programador son (en orden de prioridad):

1 Producir la cantidad requerida.
2 Minimizar el tiempo extra (si se tiene que usar, se prefiere la línea 2 a la 1, es su turno).
3 Minimizar la subutilización de las horas de trabajo regulares.

a Formúlese éste como un problema de programación por objetivos. *b* Resuélvase con el método símplex.

9-10 Better Printing tiene dos órdenes de impresión para completar durante la semana entrante: 10 000 libros de pastas suaves y 5 000 re-

vistas. Trabajan dos turnos (80 horas por semana) y pueden producir 200 libros de pastas suaves en una hora o 100 revistas en el mismo tiempo. Una vez preparado un trabajo, debe completarse antes de comenzar el siguiente, debido al tiempo que se lleva el cambio. La Better Printing tiene los siguientes objetivos de acuerdo con su importancia:

1 Completar ambas órdenes: las revistas se consideran dos veces más importantes que los libros.
2 Limitar el tiempo extra a 10 horas.
3 Evitar la subutilización de las horas de trabajo regulares.

a Escríbanse la función objetivo y las restricciones para este problema de programación por objetivos.
b Resuélvase este problema con el método símplex.

9-11 La Gamma Corporation fabrica cuatro clases de juguetes de madera. La corporación quiere planear la producción de la semana próxima en sus dos operaciones, ensamble y terminado. Se conoce lo siguiente:

	Producto				
	A	B	C	D	*Disponibilidad*
Tiempo de ensamble (horas):	2	3	5	2	200
Tiempo de terminado (horas):	2	1	4	3	200
Contribución/unidad:	$5	$7	$8	$6	

Se tienen dos objetivos de igual importancia: minimizar la subutilización de las horas disponibles para cada operación y generar una contribución de $600.
a Formúlese éste como un problema de programación por objetivos.
b Resuélvase con el método símplex.

Programación entera

9-*12* Con el método de ramificación y acotamiento, encuéntrese la solución entera óptima del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & Z = 5X + 7Y \\ \text{Restricciones:} \quad & 3X + 8Y \leq 24 \\ & 6X + 6Y \leq 38 \end{aligned}$$

La solución óptima *no* entera es

$$\mathbf{X = 5^1/_3,\ Y = 1,\ Z = 33^1/_3}$$

9-13 Dado el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & Z = 5X + 5Y \\ \text{Restricciones:} \quad & 14X + 4Y \leq 56 \\ & 10X + 14Y \leq 140 \end{aligned}$$

La solución óptima no entera es

$$X = 1.44, Y = 8.97, Z = 52.1$$

Encuéntrese la solución óptima entera con el método de ramificación y acotamiento.

9-14 Encuéntrese la solución óptima entera para el problema que sigue. Úsese ramificación y acotamiento.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & Z = 5X_1 + 3X_2 \\ \text{Restricciones:} \quad & 16X_1 + 16X_2 \leq 96 \\ & 7X_1 + 11X_2 \leq 77 \end{aligned}$$

La solución óptima no entera es

$$X_1 = 4.43, X_2 = 4.18, Z = 34.7$$

9-15 El dietista Mabel está tratando de seleccionar las cantidades apropiadas de dos alimentos para cumplir con las necesidades diarias de dos vitaminas. El alimento A proporciona cinco unidades de la vitamina X y tres unidades de la vitamina Y a un costo de $0.04 por onza. El alimento B proporciona tres unidades de la vitamina X y siete unidades de la vitamina Y a un costo de 0.05 por onza. Los requerimientos diarios son de 15 unidades de la vitamina X y 20 unidades de la vitamina Y.

a Formúlese éste como un problema de programación lineal.

b Encuéntrese la solución entera que minimiza los costos totales.

9-16 La Handcraft Furniture fabrica sofás especiales de dos tipos: contemporáneo y americano clásico. La compañía dispone de 150 horas de mano de obra para el próximo periodo, para hacer estructuras y de 200 horas para tapizar, únicas operaciones. Los materiales no son una restricción y tampoco la demanda. Un sofá contemporáneo lleva cinco horas para la estructura y tres horas de tapicería y contribuye con $400 a la ganancia. Uno tipo americano clásico lleva tres horas para la estructura y siete horas para la tapicería y contribuye con $500.

a Formúlese éste como un problema de PL.

b Encuéntrese la solución entera que maximiza la contribución.

9-17 Una agencia de publicidad está tratando de determinar el número de anuncios que debe comprar en cada una de dos revistas. Ha recopilado los siguientes datos:

	Exposición/anuncio		
Revista	***Hombres***	***Mujeres***	***Costo/anuncio***
1	**40 000**	**30 000**	**$3 000**
2	**40 000**	**11000**	**$4 000**

La agencia quiere llegar, por lo menos, a 160 000 hombres y a 330 000 mujeres a un costo mínimo.

a Escríbanse la función objetivo y las restricciones para este problema de programación lineal.
b Con ramificación y acotamiento encuéntrese la solución óptima entera.

Problemas de asignación

9-18 Los datos de la tabla representan el tiempo estimado que requiere cada uno de los cuatro mecánicos para completar cuatro trabajos diferentes.

	Trabajo			
Mecánico	*1*	*2*	*3*	*4*
A	13	17	14	12
B	12	14	21	17
C	15	16	19	15
D	17	15	17	13

Con ramificación y acotamiento, encuéntrese una asignación de los mecánicos que minimice el tiempo total de terminación.

9-19 Aplíquese ramificación y acotamiento para encontrar la solución óptima del problema de asignación 10-19.

9-20 Con el método de ramificación y acotamiento resuélvase el problema de asignación 10-21.

9-21 Un gerente de ventas clasificó la eficacia relativa de cuatro vendedores en cuatro rutas, como se muestra en seguida.

	Ruta			
Persona	*1*	*2*	*3*	*4*
Alice	4	1	1	3
Bob	2	3	2	1
Carol	3	4	4	2
Ted	1	2	3	4

Como un número bajo indica una mejor actuación, el gerente de ventas quiere asignar rutas para minimizar el valor total. Con ramificación y acotamiento encuéntrese la asignación óptima.

ESTUDIO DE UN CASO: MODELO DE INVERSIÓN DE JOHN

"¡Eureka, lo encontré!" gritó John al irrumpir en mi oficina.

"¿Qué encontraste John?

"¡El modelo perfecto de inversión! ¡Es tan simple con programación por objetivos! Mira, te lo explicaré. Primero seleccionas tres industrias

fuertes; después, tres buenas compañías dentro de cada industria para tener nueve acciones comunes. Luego, obtienes sus dividendos, su precio y la razón precio/ingresos dados en el periódico, así.

Industria	*Acción*	*P/E*	*Dividendos, %*	*Precio, $/acción*
A	1	17	1.9	87
	2	8	4.9	28
	3	13	2	50
B	4	8	7.3	46
	5	8	5.3	38
	6	9	8	25
C	7	16	2.8	60
	8	8	0.6	62
	9	15	2.6	51

"¿Por qué sólo tres acciones y tres industrias?

"Sólo para que sea sencillo, con propósitos ilustrativos. Puedes tener tantas como pueda manejar tu computadora.

"Bien, John, continúa.

"Después estableces metas máximas para el crecimiento y el ingreso. Por ejemplo, supongamos que quieres que tu cartera tenga un valor agregado P/l de 14 y un dividendo promedio del 5%. Esto te da dos restricciones. Por supuesto, querrás alguna diversificación; así que estableces un máximo del 50% en cualquier industria y del 25% en cualquier acción. Después, si quieres hacer hincapié en el crecimiento, lo haces tu prioridad más alta y los dividendos la segunda. Si quieres acentuar el ingreso, inviertes las prioridades. Sencillo, ¿verdad?

"Temo que no entendí bien John. ¿Qué pasa con los máximos para tus industrias y tus acciones? ¿No necesitan alguna prioridad?

"Simplemente ponlos en tercer lugar. Si escribes esas restricciones con variables de desviación hacia abajo nada más, entonces no pueden ir más arriba.

"Está bien, pero no te oí mencionar cuánto dinero tienes para invertir. ¿No necesitas una restricción de presupuesto?

"Si dejas que tus variables sean proporcionales, no es necesario especificar ninguna cantidad en dólares. Sí necesitas una restricción de presupuesto para hacer que todas las proporciones sumen 1. Con todo, sólo se requieren 9 variables de decisión, 14 variables de desviación, 1 variable artificial y 15 restricciones. No está mal.

"No lo sé, John. De todas maneras, sólo estás usando P/l y el rendimiento para hacer tu selección. Parece un modelo sobresimplificado. Un punto más necesita aclaración. Estableces límites *máximos* sobre el crecimiento y el ingreso. Esto significa que ninguno de los dos tendrá una variable de desviación hacia arriba. Pero, ¿no quieres maximizar el crecimiento y el ingreso?

"Mira, no puedes tener el pastel y también comértelo. Este modelo trata de cumplir con un compromiso razonable entre dos objetivos. Si por ejemplo, dejas que el ingreso sobrepase tu meta y lo pones en la prioridad más alta, sencillamente obtendrás aquellas acciones con el mayor rendí-

miento. No se dará ninguna consideración al crecimiento. En otras palabras, si quieres que tu segunda prioridad obtenga alguna atención, tendrás que poner un límite a tu prioridad más alta.

¿Has probado ya tu modelo, John?

"No. Supongo que debería nacerlo."

Preguntas

1 ¿Qué piensa el lector del modelo de John? ¿Existe alguna razón pura poner en duda su validez o seguridad?

2 Úsense los datos dados antes para establecer las restricciones de programación por objetivos y dos funciones objetivo, una para el crecimiento y otra para el ingreso.

3 Resuélvanse ambos problemas. ¿Qué cartera seleccionó el modelo?

4 Llévese a cabo una prueba del modelo con datos reales, de la siguiente manera. Selecciónense tres industrias como la electrónica, la química y la industrial. En algunas revistas o simplemente en el periódico, selecciónense tres acciones dentro de cada una de las industrias. Encuéntrese el P/I, los dividendos y el precio para hacer en *un año.* Después con estos datos, establézcanse y resuélvanse los modelos de programación por objetivos tanto para ingreso como para crecimiento. Finalmente, verifíquese cuán bien se comportó la cartera seleccionada de acuerdo con los precios actuales de las acciones y los dividendos pagados. Úsese el cambio durante el año pasado de la Dow Jones Industrial Average como base para la comparación. ¿Cómo se portó el modelo?

BIBLIOGRAFÍA Programación por objetivos

Chames, A., y W. W. Cooper: *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming* (New York: Wiley, 1961).

_____ , _____ , y otros: "A Goal Programming Model for Media Planning," *Management Science,* vol. 14, núm. 8 (abril 1968), p. 423-430.

Courtney, J., T. Klastorian y T. Ruefli: "A Goal Programming Approach to-Urban-Suburban Location Preferences," *Management Science,* vol. 18 núm. 6 (febrero 1972) pp. 258-268.

Hartley, Ronald V.: *Operations Research: A Managerial Emphasis* (Pacific Palisades, Calif.: Goodyear, 1976).

Ijiri, Y.: *Management Goals and Accounting Control* (Chicago: Rand-Mc Nally, 1965).

Lee, Sang M.: *Goal Programming for Decision Analysis* (Philadelphia: Auertack, 1972).

_____ y Laurence J. Moore: *Introduction to Decision Science* (New York: Petrocelli/Charter, 1975).

Programación entera

Geoffrion, A. M. y R. E. Marsten: "Integer Programming Algorithms: A Framework and State of the Art," *Management Science* (marzo 1972).

Hartley, Ronald V.: *Operations Research: A Managerial Emphasis* (Pacific Palisades, Calif.: Goodyear, 1976).

Salkin, Harvey: *Integer Programming* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1975).

Zionts, Stanley *Linear and Integer Programming* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1974).

10

PROGRAMACIÓN LINEAL LOS MÉTODOS DE TRANSPORTE Y ASIGNACIÓN

La preocupación por el hombre y su destino siempre debe constituir el interés principal de todos los esfuerzos técnicos, la preocupación por los grandes problemas no resueltos de la organización del trabajo y la distribución de los bienes, para que las creaciones de nuestra mente sean una bendición y no una calamidad para la humanidad. Nunca olvides esto en medio de tus diagramas y ecuaciones.

Albert Einstein

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje
Características de un problema de transporte
Solución por el método de transporte
- Construcción de la matriz de transporte
- Cómo encontrar una solución inicial
- Ejercicio de práctica (10-1)
  - Otros métodos
- Cómo encontrar la solución óptima
- Método de la distribución modificada (MODI)
  - Paso 1: cálculo de los coeficientes de renglón y columna
- Ejercicio de práctica (10-2)
  - Paso 2: cálculo de costos marginales en las celdas vacías
- Ejercicio de práctica (10-3)
  - Revisión de la solución
  - Resumen del MODI
- Ejercicio de práctica (10-4)
- Método de la piedra que rueda
- Ejercicio de práctica (10-5)
- Casos especiales
  - Soluciones óptimas múltiples
  - Muy pocas celdas llenas.
  - Degeneración
  - Cuando se quiere maximizar
    - Método A: minimizar el costo de oportunidad
    - Método B: minimizar ganancias negativas
    - Método C: inversión de todas las reglas de decisión
  - Cuando algunas rutas están prohibidas

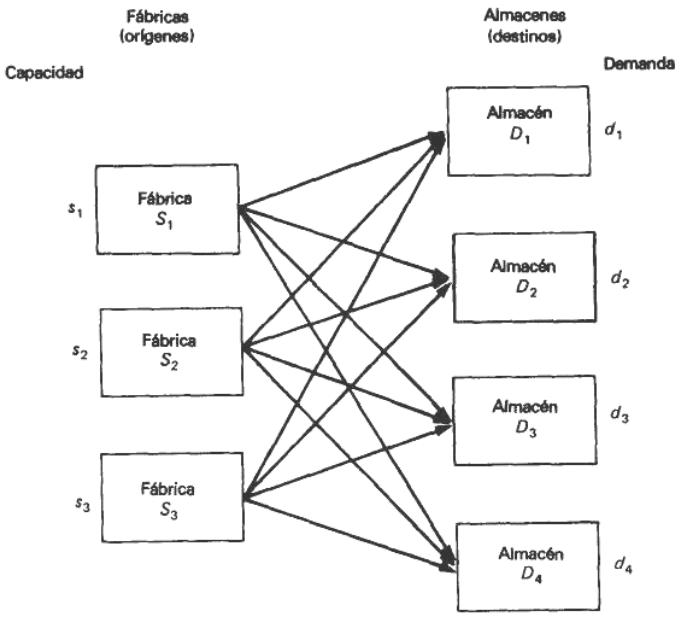
Otros tipos de problemas de transporte
Selección de un medio de publicidad
Programación de la producción
Traslado de carros para renta
Características de los problemas de asignación
Solución por el método de asignación
- La matriz de asignación

Desarrollo de la matriz de costo de oportunidad
Prueba de optimalidad
Revisión de la matriz
La asignación óptima
Resumen del método de asignación
Ejercicio de práctica (10-6)
Casos especiales
El problema no balanceado
Soluciones óptimas múltiples
Asignaciones prohibidas
Maximización
Costos negativos
Experiencias del mundo real
Resumen
Ejercicios
Estudio de un caso: You-Drive Truck Rental Company
Bibliografía

La programación lineal es un campo tan amplio que se extiende a subclases de problemas para los cuales existen métodos de solución especiales. Dos de estas dos subclases se conocen como problemas de transporte y problemas de asignación. Cualquiera de los métodos generales de solución de PL, como el método símplex o el algebraico, puede servir para resolví ir estos problemas. Pero se han desarrollado métodos más sencillos que aprovechan ciertas características de los problemas. Entonces, el *método del transporte* y el *método de asignación* son sólo técnicas especiales para resolver ciertos tipos de problemas de PL.

El transporte desempeña un papel importante en la economía y en las decisiones administrativas. Con frecuencia la disponibilidad de transporte económico es crítica para la sobrevivencia de una empresa. Este capítulo no cubre todo el campo del transporte ya que es demasiado extenso. Más bien se hace hincapié en una clase especial de problemas de transporte y en cómo pueden resolverse. Después se verá que estos mismos métodos pueden usarse para resolver problemas que no tienen relación con el transporte.

FIGURA 10-1
Un problema de transporte



¿Qué significa problema de transporte? En la figura 10-1 se muestra una situación típica. Supóngase que un fabricante tiene tres plantas que producen el mismo producto. Estas plantas a su vez mandan el producto a cuatro almacenes. Cada planta tiene una capacidad limitada y cada almacén tiene una demanda máxima. Cada planta puede mandar productos a todos los almacenes, pero el costo de transporte varía con las diferentes combinaciones. El problema es determinar la cantidad que cada planta debe mandar a cada almacén con el fin de minimizar el costo total de transporte.

Los problemas de asignación en realidad son un caso especial del problema de transporte. Aquí sólo puede mandarse una unidad de cada origen a cada destino. En efecto, cada origen se "asigna" á un destino. Los problemas pequeños de este tipo pueden resolverse con sólo enumerando todas las posibilidades y escogiendo la menos costosa. En problemas más grandes puede utilizarse el método del transporte o el método de asignación, que todavía es más sencillo.

En este capítulo se estudia primero el método del transporte y después el de asignación. Ambos tienen amplias aplicaciones en los negocios debido a que, como se verá, tratan directamente con las tareas de organización del trabajo y la distribución de los bienes.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

En este capítulo el lector debe aprender:

1 Cómo reconocer los problemas de transporte y los problemas de asignación
2 Cómo desarrollar una matriz de transporte y aplicar el método del transporte
3 Cómo resolver problemas de asignación con el método de asignación
4 El significado de los siguientes términos:
método del costo mínimo MODI
método de la piedra que rueda método húngaro

CARACTERÍSTICAS DE UN PROBLEMA DE TRANSPORTE

La manera más fácil de reconocer un problema de transporte es por su naturaleza o estructura "de-hacía": de un origen hacia un destino, de una fuente hacia un usuario, del presente hacia el futuro, de aquí hacia allá. Al enfrentar este tipo de problemas, la intuición dice que *debe* haber una manera de obtener una solución. Se conocen las fuentes y los destinos, las capacidades y demandas y los costos de cada trayectoria. Debe haber una combinación óptima que minimice el costo (o maximice la ganancia). La dificultad estriba en el gran número de combinaciones posibles.

Puede formularse un problema de transporte como un problema de PL y aplicarse el método símplex. Si se hiciera, se encontraría que los problemas de transporte tienen características matemáticas únicas. Para visualizar esto, escríbanse las relaciones de PL para el ejemplo de la figura 10-1. *Xij* representa la cantidad que se manda de la fábrica S_i al destino D_i. En forma análoga, C_{ij} es el costo de mandar una unidad de S_i hacia D_i.

El objetivo es minimizar los costos totales de transporte. La función objetivo de PL es, entonces, minimizar la suma de los costos de transporte para las 12 rutas. Es decir, la función objetivo es

$$\begin{aligned}\text{Minimizar: } Z = {} & C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{14}X_{14} && \text{fábrica } S_1\\ & + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{24}X_{24} && \text{fábrica } S_2\\ & + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33} + C_{34}X_{34} && \text{fábrica } S_3\end{aligned}$$

Las restricciones van de la capacidad limitada de cada planta a la demanda de cada almacén. Para la fábrica Si la restricción es

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = S_1$$

Esto significa que la cantidad total que se manda desde la fábrica S_1 debe ser igual que su capacidad S_1. Análogamente, se debe satisfacer la demanda de cada almacén. Para el almacén D_1 se tiene

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = d_1$$

Si se escribe todo el problema, resulta

$$\begin{aligned}\text{Minimizar } Z = {} & C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{14}X_{14} + C_{21}X_{21} +\\ & C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{24}X_{24} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32}\\ & + C_{33}X_{33} + C_{34}X_{34}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Restricciones: } & X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = s_1 && \\ & X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = s_2 && \text{Restricciones}\\ & X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = s_3 && \text{de origen}\\ & X_{11} + X_{21} + X_{31} = d_1 && \\ & X_{12} + X_{22} + X_{32} = d_2 && \text{Restricciones}\\ & X_{13} + X_{23} + X_{33} = d_3 && \text{de destino}\\ & X_{14} + X_{24} + X_{34} = d_4 && \\ & X_{ij} \geq 0 \text{ para } i = 1,2,3,; j = 1,2,3,4 &&\end{aligned}$$

¿Qué tiene esto de especial? Nótense los coeficientes en cada restricción: todos son 1 o cero (para las variables que no aparecen). Esto siempre es cierto para un problema de transporte. Otra característica es que si se suman las constantes del lado derecho para los orígenes el total es el mismo que al sumar las de los destinos ($s_1 + s_2 + s_3 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4$). Lo que resulta es que, debido a estas características únicas, es posible que haya m método más sencillo de solución, a saber, el método del transporte.

Es necesario examinar otra característica de la formulación de PL. Se tiene un total de siete restricciones: una para cada origen y cada destino. Sin embargo, una de ellas es redundante. Realmente se necesitan sólo seis restricciones. La razón es que se sabe que la cantidad total que se manda desde todas las fábricas debe ser igual que la cantidad total que se recibe en todos los almacenes. Supóngase que se omite la restricción del cuarto almacén. Al resolver el problema se sabe cuánto se mandó de cada fábrica a los tres primeros almacenes y la cantidad total que se mandó desde las fábricas. Se sabrá entonces que la diferencia entre estas dos cantidades se tuvo que mandar al cuarto almacén.

Esto lleva a la regla general de que el número de restricciones *independientes* siempre será una menos que la suma del número de orígenes y el número de destinos. Recuérdese que para cualquier problema de PL el número de variables en la solución final no puede exceder el número de restricciones independientes. Entonces, para el ejemplo, cuando mucho se usarán 6 de las 12 rutas para la solución óptima. Esta regla es muy importante al resolver problemas con el método del transporte.

SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE TRANSPORTE

El método del transporte en realidad no es un método, sino varios. Sin embargo, existe una estrategia general, como se muestra en la figura 10-2. Primero, se construye una matriz de transporte y después se encuentra una solución inicial. Esta solución inicial puede ser óptima o no. La única manera de saberlo es probándolo y existen varias técnicas para hacerlo. Si la solución no es óptima, se revisa y la prueba se repite. Cada interacción la solución estará más cerca del óptimo.

Se examina esta estrategia por partes, una a la vez, comenzando con la matriz de transporte.

Construcción de la matriz de transporte

En la tabla 10-1 se muestra la forma general de una matriz de transporte. A cada origen corresponde un renglón y a cada destino una columna. La capacidad de cada origen se muestra al final del renglón y la demanda de cada destino se escribe abajo de la columna correspondiente. Estas capacidades y demandas se conocen como *condiciones de frontera.* Finalmente,

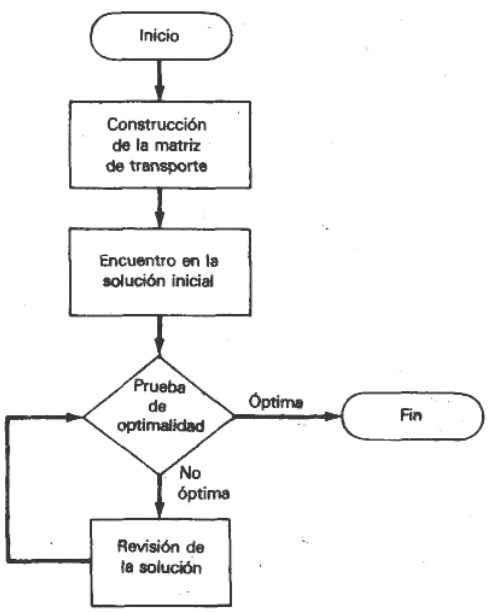
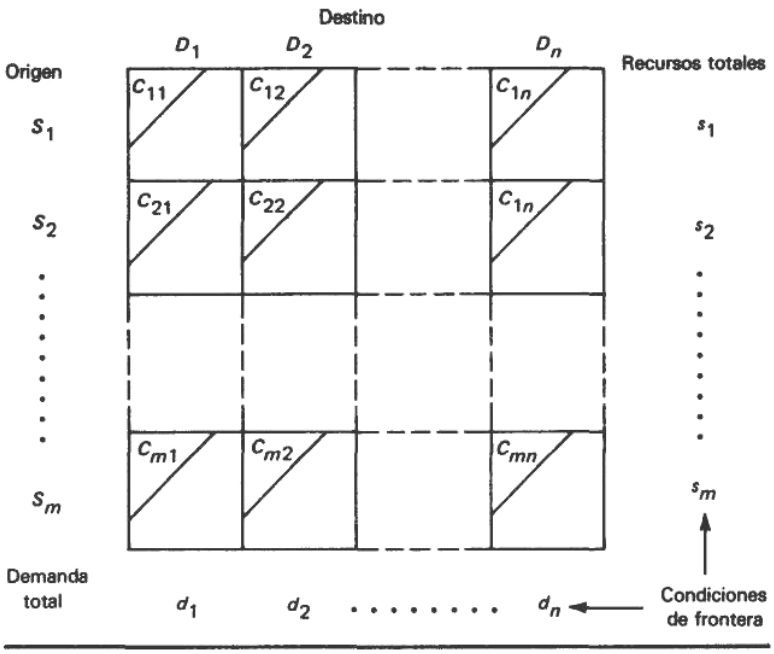


FIGURA 10-2
El método del transporte

TABLA 10-1
Matriz general de transporte



el costo unitario de transporte desde cada origen a cada destino se escribe en la esquina superior derecha de cada *celda* de la matriz.

Existe una flexibilidad considerable en la construcción de una matriz de transporte. Por ejemplo, los renglones podrían ser los destinos y las columnas los orígenes. Los datos del costo unitario pueden ponerse en cualquier lugar de la celda. Ni siquiera se necesita una regla para trazar la matriz. Sin embargo, se piensa que poner un poco de cuidado al dibujarla tendrá ventajas como la de reducir los errores.

Se entenderá mejor la matriz con un ejemplo. En la tabla 10-2 se dan algunos datos para el ejemplo de la figura 10-1. Se dan las capacidades de las tres fábricas junto con las necesidades de los cuatro almacenes y los coitos unitarios de transporte.

Nótese que los recursos totales de las fábricas exceden a la demanda total de los almacenes (600 contra 500). Esto significa que el problema *no está balanceado.* El método de transporte se aplica mejor a los problemas balanceados, por tanto, se echa mano de un sencillo truco. Se agrega un almacén *ficticio* para absorber la holgura. Este destino se muestra en la tabla 10-3, que es la matriz completa. El costo unitario de transporte hacia el almacén ficticio siempre es cero, ya que las 100 unidades no se mandan en la realidad. Cuando se llegue a la solución óptima, las fábricas que "mandan" algo al destino ficticio sencillamente tendrán esa cantidad de capacidad sin usar. Nótese que de la misma manera puede usarse un origen ficticio que absorba el faltante en la capacidad. Una vez construida la tabla, el siguiente paso es encontrar una solución inicial.

TABLA 10-2
Datos para el problema muestra

Recursos en la fábrica		Demanda en el almacén	
Fábrica	Capacidad	Almacén	Demanda
S_1	100 unidades	D_1	150 unidades
S_2	200	D_2	150
S_3	300	D_3	120
	600 unidades	D_4	80
			500 unidades

Costos de transporte ($/unidad)				
	A			
De	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	7	3	8	8
S_2	5	5	6	8
S_3	7	4	9	10

Cómo encontrar una solución inicial

El método para encontrar una solución inicial se llama método del costo mínimo (LCM). Este método está basado en la intuición y la habilidad para descubrir la matriz rápidamente. Como el objetivo es minimizar los costos de transporte la intuición debe conducir a escoger las rutas menos costosas. Esto es exactamente lo que hace el LCM.

Obsérvese la tabla 10-3 y encuéntrese la celda con el menor costo (ignorando por ahora la columna ficticia). El lector debe poder descubrir con

TABLA 10-3
Construcción de una matriz

	Destino (Almacén)					
Origen (Fábrica)	D_1	D_2	D_3	D_4	Ficticio	
S_1	7	3	8	8	0	100
S_2	5	5	6	8	0	200
S_3	7	4	9	10	0	300
	150	150	120	80	100	600

facilidad que la celda SiD_2 con un costo de \$3 es la que se busca. *Se llena ahora esa celda hasta el máximo que permiten las condiciones de frontera.* El almacén D_2 necesita 150 unidades, pero la fábrica S_1 sólo puede proporcionar 100. Así, se ponen 100 unidades en la celda S_1D_2 como se hizo en la tabla 10-4*a*. Nótese que esto agota los recursos de la fábrica S_1, de manera que las demás celdas del primer renglón se eliminan.

Ahora obsérvense las celdas restantes y encuéntrese la que tiene el siguiente costo más barato: S_3D_2 con \$4. Asígnesele lo más que permitan las condiciones de frontera (50 unidades, lo que agota la columna D_2). Continúese este proceso hasta tener la solución completa, como en la tabla 10-5. Si se encuentra un empate para la celda con el menor costo, la selección es arbitraria. Las celdas ficticias se llenan al último. Se quiere:

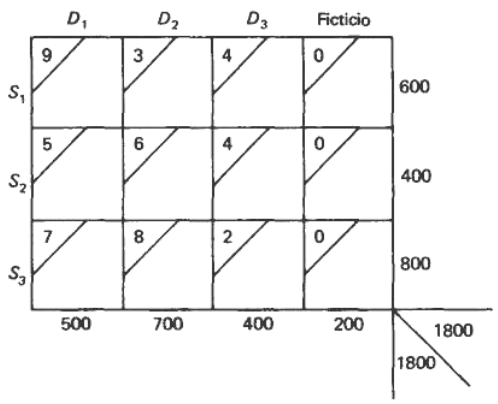
$$\text{Número de celdas llenas} = (\text{número de renglones} + \text{número de columnas}) - 1 = (3 + 5) - 1 = 7$$

Si se tienen *menos* celdas llenas que las requeridas, la solución es *degenerada.* No hay nada de malo en ello, sólo tienen que hacerse algunos ajustes cuando se hace la prueba de optimalidad (que se describirán después). Si se tienen *más* que el número de celdas requeridas, ¡se ha cometido un error! Encuéntrese el error y corríjase antes de seguir adelante. En la tabla 10-5e hay siete celdas llenas; está bien. En resumen, los pasos en el LCM son:

1 Localícese la celda menos costosa en la matriz. (Ignórense las celdas ficticias hasta el final; los empates se rompen arbitrariamente.)
2 Llénese la celda hasta el máximo permitido por las condiciones de frontera. Elimínense las demás celdas en el renglón o columna que se agota.
3 Repítanse los pasos (1) y (2) para las celdas restantes hasta que se llega a una solución completa.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 10-1

Antes de continuar, practíquese el método del costo mínimo con la siguiente matriz. Si lo encuentra muy sencillo, eso es lo correcto.



¿Se tiene el número correcto de celdas llenas?

Otros métodos Existen otros dos métodos para encontrar la solución inicial. La *regla de la esquina noroeste* se programa con facilidad en una computadora, pero da una solución inicial muy pobre. El otro, el *método de aproximación de Vogel,* casi siempre lleva a soluciones un poco mejores que el método del costo mínimo pero requiere mayores cálculos. Consúltese la bibliografía para estos otros métodos.

Cómo encontrar la solución óptima

Una vez encontrada una solución inicial, el siguiente paso es probar la optimalidad. Existen dos métodos para esta prueba. El *método de la distribución modificada* (MODI) y el *método de la piedra que rueda.* Difieren en la mecánica, pero ambos dan exactamente los mismos resultados con la misma estrategia de prueba. Esta estrategia consiste en probar cada *celda vacía* (ruta no usada), una a la vez, calculando el *costo marginal* por usar esa celda. Después, si una o más celdas tienen costo marginal negativo, se revisa la solución. Se explorará esta estrategia un poco más, antes de entrar en los detalles para ponerla en práctica.

Considérese una porción de la solución inicial que se muestra en la tabla 10-5c, en particular las cuatro celdas que se incluyeron en la tabla 10-6a. Tres celdas están llenas y una está vacía. La pregunta que debe hacerse es: ¿se ahorraría dinero usando la celda vacía? La respuesta se obtiene tratando. Supóngase que se trata de mandar una unidad de S_2 a D_2. Para mantener balanceadas las condiciones de frontera, debe reducirse S_2D_3 a 49 unidades. Esto a su vez afecta la columna D_3; por tanto, se agrega una unidad a S_3D_3. Por último, S_3D_2 debe reducirse a 49 unidades y las condiciones de frontera se satisfacen, esto se muestra en la tabla 10-66.

¿Cómo han afectado al costo estos cambios? Los cambios son:

Sumar 1 unidad a S_2D_2	+ 5
Restar 1 unidad de S_2D_3	− 6
Sumar 1 unidad a S_3D_3	+ 9
Restar 1 unidad de S_3D_2	− 4
Costo marginal	+ 4

Para cada unidad que se agrega a la celda S_2D_2, los costos aumentarán en \$4. Como se quiere *minimizar* el costo, la celda S_2D_2 no es apropiada.

La estrategia completa, entonces, es usar un proceso de eliminación. Encuéntrese el costo marginal que corresponde al uso de cada una de las celdas vacías. *La solución será óptima cuando todos los costos marginales sean no negativos.*[1]

Método de la distribución modificada (MODI)

El método MODI obtiene los costos marginales a través de un proceso de dos pasos. Primero, se calculan los coeficientes de los renglones y las co-

[1] Estos costos marginales son idénticos a los valores de $C_i - Z_j$ que se encuentran con el método símplex.

TABLA 10-4
Solución inicial por el método del mínimo costo

	D_1	D_2	D_3	D_4	Ficticio	
S_1	7 X	3 (100)	8 X	8 X	0 X	~~100~~ 0
S_2	5	5	6	8	0	200
S_3	7	4	9	10	0	300
	150	~~150~~ 50	120	80	100	600

(*a*) Llénese la celda de menor costo (S_3D_1)

	D_1	D_2	D_3	D_4	Ficticio	
S_1	7 X	3 (100)	8 X	8 X	0 X	~~100~~ 0
S_2	5	5 X	6	8	0	200
S_3	7	4 (50)	9	10	0	300
	150	~~150~~ ~~50~~ 0	120	80	100	600

(*b*) Después llénese la celda con el siguiente costo menor (S_3D_2)

lumnas usando sólo las celdas *llenas*. Después, con estos coeficientes, se calculan los costos marginales para cada celda vacía. Se encontrará que el procedimiento es fácil de aplicar, aunque parezca peculiar, casi como una treta. Los autores afirman que existe una justificación matemática muy seria para el proceso completo.[2]

[2] El procedimiento se basa en las propiedades del dual como lo explica Richard E. Trueman en *An Introductton to Quantitative Methods for Decisión Making,* 2ª edición (New York: Holt, 1977), pp. 323-325.

TABLA 10-5
Terminación de la solución inicial con el método del costo

	D_1	D_2	D_3	D_4	Ficticio		
S_1	7 X	3 (100)	8 X	8 X	0 X	~~100~~	0
S_2	5 (150)	5 X	6	8	0	~~200~~	50
S_3	7 X	4 (50)	9	10	0	~~300~~	250
	~~150~~ 0	~~150~~ ~~50~~ 0	120	80	100	600	

(*a*) Llénese la celda S_2D_1

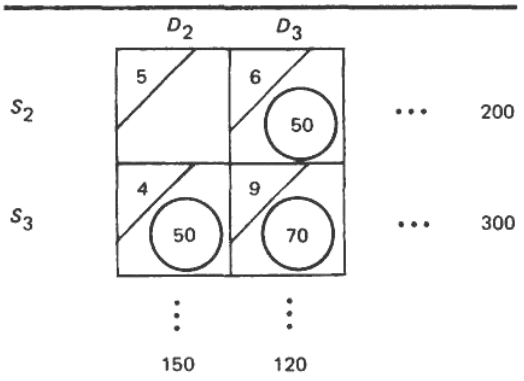
	D_1	D_2	D_3	D_4	Ficticio		
S_1	7 X	3 (100)	8 X	8 X	0 X	~~100~~	0
S_2	5 (150)	5 X	6 (50)	8 X	0 X	~~200~~	~~50~~	0
S_3	7 X	4 (50)	9	10	0	~~300~~	250	
	~~150~~ 0	~~150~~ ~~50~~ 0	~~120~~ 70	80	100	600		

(*b*) Después llénese la celda S_2D_3

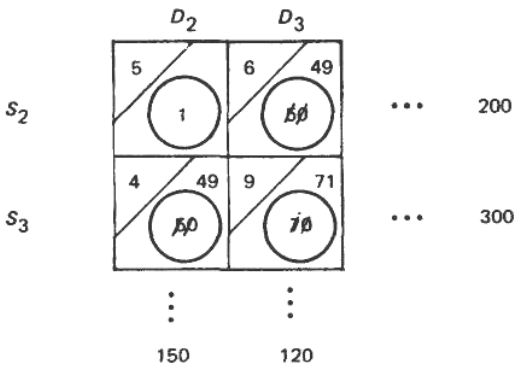
	D_1	D_2	D_3	D_4	Ficticio		
S_1	7 X	3 (100)	8 X	8 X	0 X	~~100~~	0
S_2	5 (150)	5 X	6 (50)	8 X	0 X	~~200~~	~~50~~	0
S_3	7 X	4 (50)	9 (70)	10 (80)	0 (100)	~~300~~	~~250~~	0
	~~150~~ 0	~~150~~ ~~50~~ 0	~~120~~ ~~70~~ 0	~~80~~ 0	~~100~~ 0	600		

(*c*) Solución completa

TABLA 10-6
Una matriz parcial de transporte



(*a*) Una celda vacía



(*b*) Cambio de una unidad

Paso 1: cálculo de los coeficientes de renglón y columna Los cálculos pueden hacerse directamente en la matriz. Después de encontrar una solución inicial, debe dibujarse de nuevo la matriz para comenzar en limpio. Se continúa con el ejemplo de las fábricas y los almacenes y con la solución del método del mínimo costo, como se observa en la tabla 10-7. Se inicia el proceso asignando un cero a un coeficiente arbitrario de cualquier renglón o columna. Por costumbre se asignó un cero al primer renglón en la tabla 10-7*a.* Ahora se busca una *celda llena* en ese renglón: S_1D_2. Puede pivotearse sobre esta celda para encontrar el coeficiente de la columna D_2 usando la relación:

Coeficiente descnocido de columna o renglón = costo en la celda — coeficiente conocido de renglón o columna

Coeficiente de columna D_2 = costo en celda S_1D_2 — coeficiente del renglón 1
Coeficiente de columna D_2 = 3 — 0 = 3

Mentalmente, al ver la matriz en la tabla 10-7a, puede decirse "0 para 3 igual a 3", siguiendo la línea punteada.

Se busca otra celda llena en el renglón S_1. Como no hay, se busca hacia abajo por la columna D_2. La celda S_3D_2 está llena. Una vez conocido el coeficiente de la columna D_2, puede pivotearse sobre la celda S_3D_2 para encontrar el coeficiente del renglón S_3. Siguiendo las líneas punteadas en la tabla 10-7*b*, se dice "3 para 4 igual a 1". Es algo parecido al juego de la pata coja. Se toma un coeficiente *conocido* es un renglón (o columna) y se pivotea sobre una celda *llena* en ese mismo renglón (o columna) para encontrar otro coeficiente.

Continuando con el ejemplo, el coeficiente del renglón S_3 puede usarse para encontrar otros tres, como se muestra en la tabla 10-7c. Para la columna D_3 se obtiene "1 para 9 igual a 8" y análogamente para la columna D_4. Nótese que *ahora se incluye la columna ficticia* y se trata en la misma forma que las demás columnas y renglones. Entonces, para la columna D_5, "1 para 0 igual a —1". Se permiten los coeficientes negativos. Los cálculos para los coeficientes quedan terminados en la tabla 10-7d usando D_3 para encontrar S_2 y, por último, S_2 para encontrar el coeficiente de D_1.

Lo que en realidad se hizo fue resolver un conjunto de ecuaciones simultáneas que contiene más variables que ecuaciones. Para *cada celda llena* puede escribirse la siguiente ecuación:

coeficiente del renglón + coeficiente de la columna = costo en la celda

en donde R = coeficiente del renglón y C = coeficiente de la columna.

Ecuación	*Celda*
$R_1 + C_2 = 3$	S_1D_2
$R_2 + C_1 = 5$	S_2D_1
$R_2 + C_3 = 6$	S_2D_3
$R_3 + C_2 = 4$	S_3D_2
$R_3 + C_3 = 9$	S_3D_3
$R_3 + C_4 = 10$	S_3D_4
$R_3 + C_5 = 0$	S_3D_5

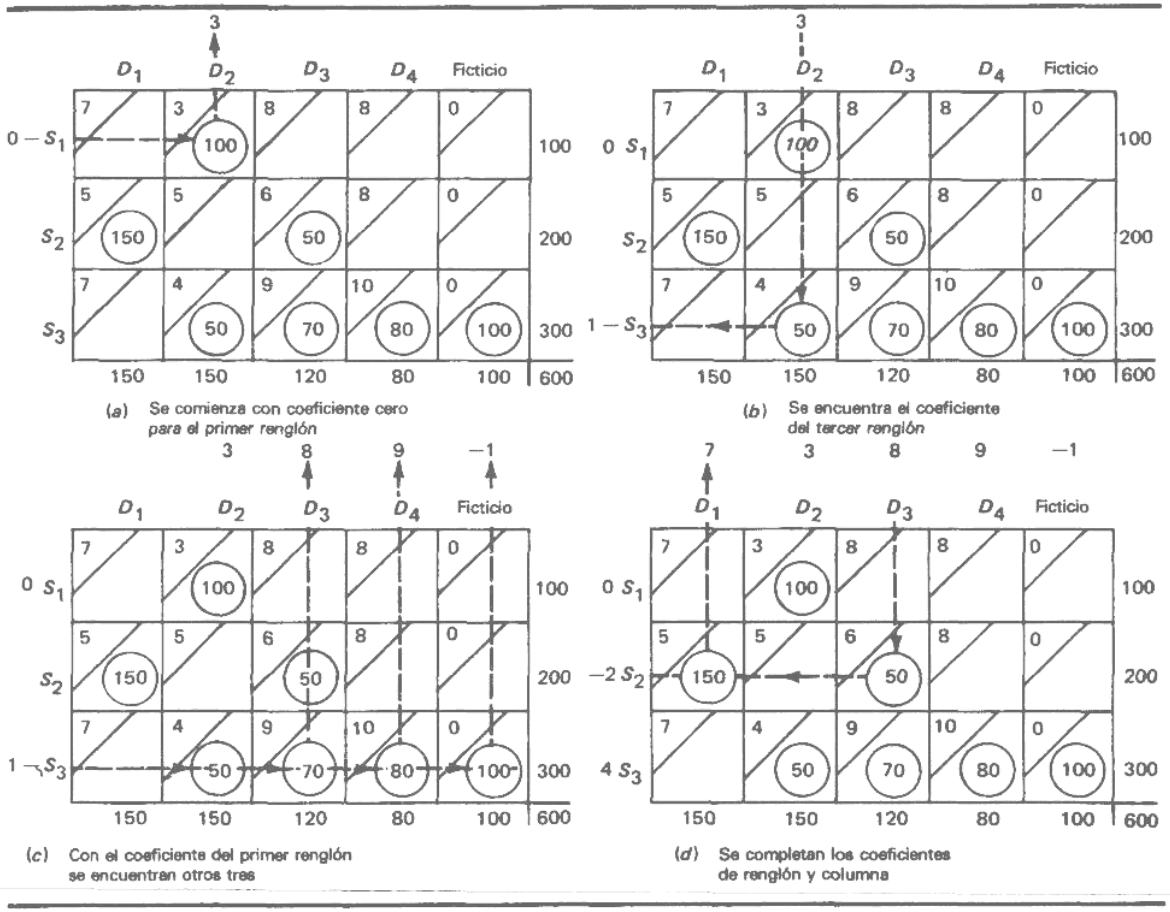
Esto proporciona siete ecuaciones con ocho incógnitas. Como el método MODI se basa en los costos *relativos,* puede asignarse cualquier valor arbitrario a una de las variables. Si se hace $R_1 = 0$, puede encontrarse C_2 con la primera ecuación:

$$\begin{aligned} R_1 + C_2 &= 3 \\ 0 + C_2 &= 3 \\ C_2 &= 3 \end{aligned}$$

Ahora que se conoce C_2, puede encontrarse R_3:

$$\begin{aligned} R_3 + C_2 &= 4 \\ R_3 + 3 &= 4 \\ R_3 &= 1 \end{aligned}$$

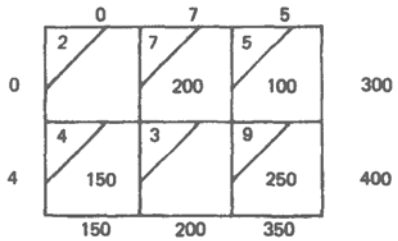
TABLA 10-7
Método MODI



Y así sucesivamente. Puede encontrarse cada penalización. Mientras que no se tenga práctica en el procedimiento, podría resultar más sencillo de hecho escribir las ecuaciones y resolverlas de esta manera para obtener los coeficientes. Más adelante, cuando aumente la confianza, puede hacerse por inspección en la matriz.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 10-2

Calcúlense los coeficientes de renglón y columna para el problema que sigue. Asegúrese que se entiende este procedimiento antes de seguir adelante.



Paso 2: cálculo de costos marginales en las celdas vacías Una vez que se tienen los coeficientes de renglones y columnas, se pone atención a las celdas vacías en la tabla 10-8. Tomando una a la vez y en cualquier orden, el costo marginal es la diferencia entre el costo de la celda y la suma de los coeficientes del renglón y la columna correspondientes. Para la celda S_1D_1, se tiene

Costo marginal = costo de la celda — (coeficiente del renglón + coeficiente de la columna)

Costo marginal de (S_1D_1) = **7 — (0 + 7) - 0**

Para la celda S_3D_1, el resultado es:

Costo marginal de $(S_1D_1) = 7 — (0 + 7) = 7 — 8 = — 1$

Al ir calculando estos costos se colocan en la esquina inferior derecha de cada celda. Observando en la tabla 10-8 la matriz terminada, puede observarse cuáles son las dos celdas que tienen costos marginales negativos: S_1D_4 y S_3D_1. Esto significa que los costos pueden reducirse empleando cualquiera de estas celdas y, por tanto, la solución *no es óptima.*

EJERCICIO DE PRÁCTICA 10-3

Hágase aquí un alto para adquirir un poco de práctica en el cálculo de los costos marginales. La matriz que sigue es la misma que se usó en el ejercicio de práctica 10-2. Encuéntrense los costos marginales para cada celda vacía. ¿Es óptima la solución?

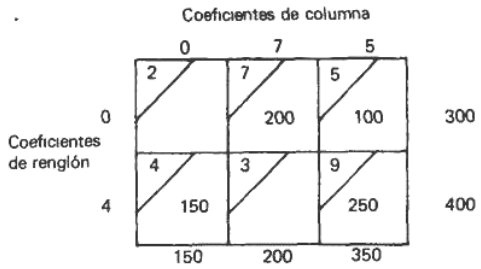


TABLA 10-8
Cálculo de índices de mejoramiento

		7	3	8	9	−1	
		D_1	D_2	D_3	D_4	Ficticio	
0	S_1	7 **0**	3 **100**	8 **0**	8 **−1**	0 **+1**	100
−2	S_2	5 **150**	5 **+4**	6 **50**	8 **+1**	0 **+3**	200
1	S_3	7 **−1**	4 **50**	9 **70**	10 **80**	0 **100**	300
		150	150	120	80	100	600

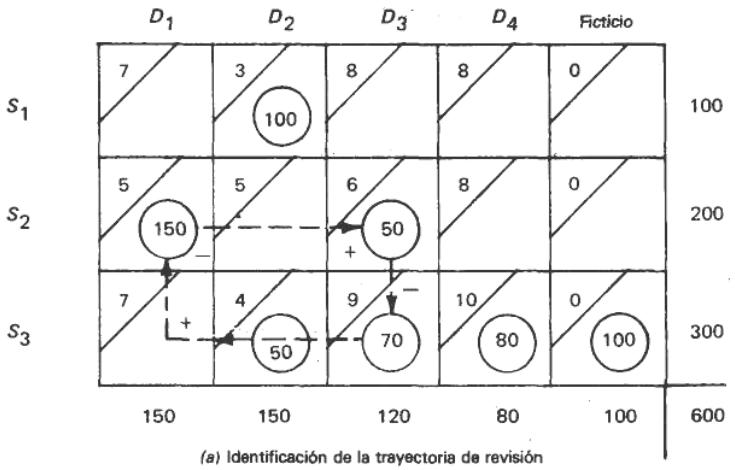
Revisión de la solución Puede revisarse la solución por inspección usando lo que puede llamarse *regla de la trayectoria cerrada con ángulos rectos en las celdas llenas* o, dicho con menos palabras, regla de la piedra que rueda. Esta regla está diseñada para asegurar que las dos condiciones se cumplan siempre en el proceso de revisión. Primero deben satisfacerse las condiciones de frontera. Como pudo observarse en la explicación de la estrategia MODI, el llenar una celda vacía siempre implica cambios por lo menos en otras tres celdas. Segundo, el número de celdas llenas no puede exceder la suma del número de renglones y columnas menos uno. El proceso de revisión también debe obedecer estas condiciones.

Puesto que sólo puede revisarse una celda a la vez, el proceso de revisión se inicia identificando la celda vacía que se debe llenar. En la tabla 10-8 hay dos celdas con costos marginales negativos. Siempre debe seleccionarse la celda con el costo más negativo; en caso de empates, se rompen arbitrariamente. En el ejemplo, se seleccionó la celda S3D1. Cómo habrá un ahorro de $1 por cada unidad que se mande por esa celda, se quiere mandar lo más posible, que sea congruente con las condiciones de frontera y el número de celdas llenas.

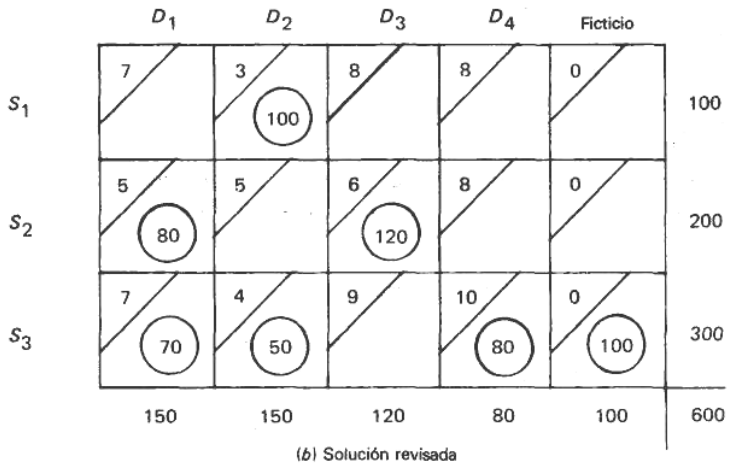
En seguida se aplica la regla de la trayectoria cerrada con ángulos rectos en las celdas llenas. Comenzando con la celda vacía (S_3D_1), se encuentra una trayectoria cerrada que vaya por las celdas de la matriz y regrese a la celda y que cumpla dos condiciones. Primero, sólo se puede ir vertical u horizontalmente, no se permiten las curvas o las diagonales. Segundo, cada *esquina* en ángulo recto debe estar en una celda *llena. Siempre existirá una y solo una trayectoria de este Upo.* ¿Puede el lector encontrarla? En la tabla 10-9 se muestra la trayectoria para S_3D_1.

Nótese que pueden "saltarse" tanto celdas vacías como llenas. Las esquinas o pivotes son las celdas críticas. Se pone ahora un signo más en la celda vacía y se da la vuelta a la trayectoria alternando los signos menos y

TABLA 10-9
Revisión de la solución



(*a*) Identificación de la trayectoria de revisión



(*b*) Solución revisada

más en las celdas pivote llenas. Éstas son las piedras que ruedan. Las celdas con signo menos se reducirán y las celdas con signo más se incrementarán. ¿Cuántas unidades pueden cambiarse? *La cantidad menor en las celdas con signo menos*. En la tabla 10-9*a* hay dos celdas, 150 y 70, que tienen signo menos, de manera que puede hacerse un cambio de 70 unidades alrededor de la trayectoria cerrada. En la tabla 10-9*b* se da esta revisión completa.

¿Es óptima esta nueva solución? Para saberlo, se debe repetir todo el proceso desde el principio. Se calculan todos los nuevos coeficientes de renglón y columna y después se encuentran los nuevos costos marginales para todas las celdas vacías. Esto se hace en la tabla 10-10*a*. Como puede observarse, la celda S_1D_4 tiene un costo marginal negativo lo cual indica que todavía es posible hacer mejoras. La trayectoria de la revisión se muestra en la tabla 10-10*b* y la tercera solución en la tabla 10-10c. Se aplica el método MODI una vez más y resulta que todos los costos marginales son no negativos. Ésta es la solución óptima. El costo total de esta solución se encuentra sumando los productos de los costos en las celdas por las unidades mandadas en cada celda llena.

Resumen de MODI Los pasos del método MODI son, en resumen:

1 Se calculan los coeficientes de renglón y columna usando las celdas llenas:

coeficiente del renglón + coeficiente de la columna = costo en la celda

2 Se calcula el costo marginal de usar cada celda vacía:

Costo marginal = costo en la celda — (coeficiente del renglón + coeficiente de la columna)

3 Se selecciona la celda vacía con el costo marginal más negativo (los empates se rompen arbitrariamente).

4 Se encuentra la trayectoria de revisión y se llena la celda vacía al máximo que permita la trayectoria.

5 Se repiten los pasos 1 al 4 hasta que todos los costos marginales sean cero o positivos.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 10-4

(*a*) Continúese el ejercicio de práctica que se ha venido trabajando. Encuéntrese la trayectoria de revisión y revísese la solución que se da un seguida.

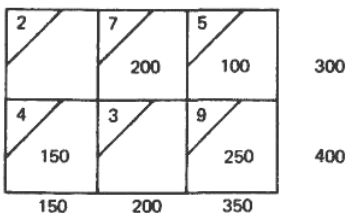
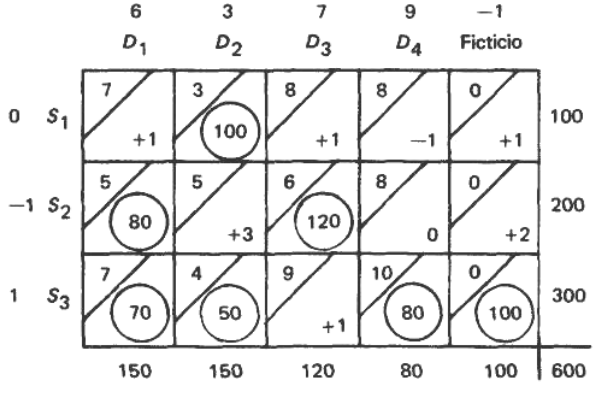
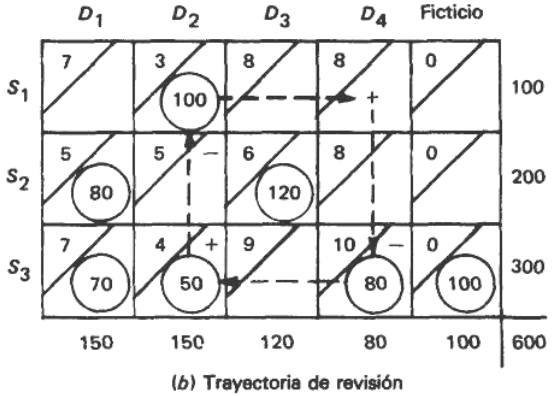


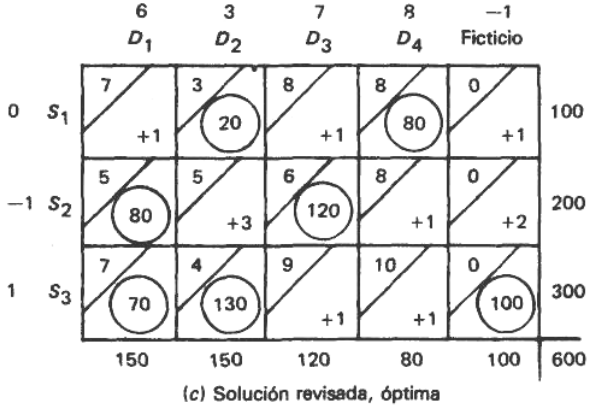
TABLA 10-10
MODI, segundo ciclo



(*a*) La celda S_1S_4 se puede mejorar



(*b*) Trayectoria de revisión



(*c*) Solución revisada, óptima

Costo total
3 × 20 = 60
8 × 80 = 640
5 × 80 = 400
6 × 120 = 720
7 × 70 = 490
4 × 130 = 520
0 × 100 = 0
2830

(b) Aplíquese de nuevo el método MODI a la solución revisada. ¿Es óptima esta solución?

(c) Aplíquese el método MODI al problema de transporte que se muestra en la tabla 10-11. ¿Cuál es el costo total para la solución óptima?

Método de la piedra que rueda

Con el método de la piedra que rueda no se tienen que calcular coeficientes intermedios. Los costos marginales para cada celda vacía se encuentran directamente obteniendo la trayectoria de revisión para cada celda vacía. Ésta es justo la trayectoria que se encontró al revisar una solución MODI y se usan también las mismas reglas. Otra vez, siempre habrá una y sólo una de estas trayectorias para cada celda vacía. Cuando se encuentra la trayectoria para una celda dada, se ponen signos (+) y (—) *en* forma alternada en las "piedras que ruedan" en toda la trayectoria, igual que antes. Para encontrar el costo marginal, se suman los costos de la celda vacía y de las esquinas de la trayectoria que tienen signo (+) y se reptan los costos de todas las esquinas que tienen signo (—). El resultado será el costo marginal para esa celda vacía. Esto se hace para cada celda vacía. Si esto parece familiar, se debe a que se hizo antes usando una matriz parcial (véase la tabla 10-6).

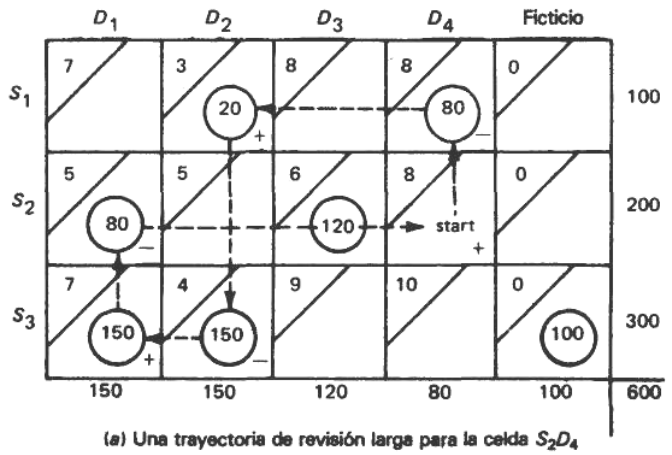
Este método debe su nombre a las piedras que se usarían para cruzar un arrollo. Uno podría imaginarse que la matriz de transporte está cubierta por agua, a excepción de las celdas llenas, que son las piedras. Para encontrar una trayectoria de revisión se debe dejar una celda vacía y regresar a ella usando sólo las piedras como pivotes o esquinas. No se debe olvidar que solo se permiten vueltas en ángulo recto; no se permiten los movimientos en diagonal.

Algunas veces las trayectorias de revisión son indirectas. Por ejemplo, obsérvese la tabla 10-12 (muestra la solución óptima encontrada en la tabla 10-10c). Se usará el método de la piedra que rueda para verificar la celda

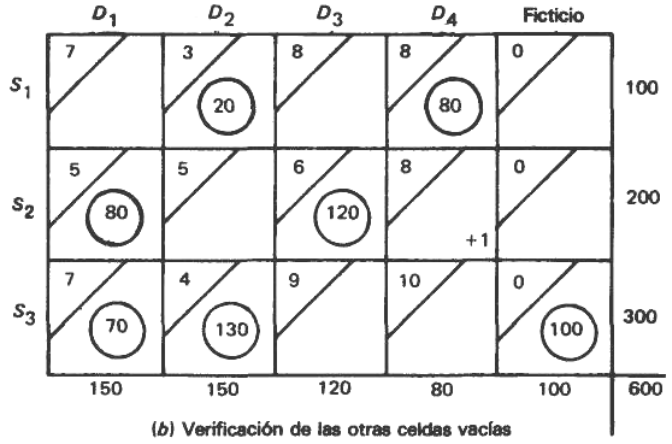
TABLA 10-11
Ejercicio de práctica para el MODI

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	4	12	9	6	1000
S_2	15	8	4	3	1400
S_3	12	5	1	9	1600
	800	1500	1200	500	4000

TABLA 10-12
Método de la piedra que rueda



(*a*) Una trayectoria de revisión larga para la celda S_2D_4



(*b*) Verificación de las otras celdas vacías

S_2D_4. Como sólo se tiene una celda llena en la columna D_4, se sabe que *debe* formar parte de la trayectoria, así que se parte de ahí. De nuevo en el renglón Si lo único que puede hacerse es moverse hacia la izquierda hasta S_1D_2. Dando la vuelta hacia abajo por la columna D_2, se debe llegar hasta el renglón inferior a S_3D_2. Aquí puede escogerse entre ir a la derecha o a la izquierda. Sin embargo, al ir a la derecha a la celda S_3D_5 no habrá después a dónde ir, ya que no hay otra celda llena en la columna ficticia. Entonces, la trayectoria va a la izquierda a S_3D_1 después hacia arriba a S_2D_1 y de regreso al inicio.

Una vez identificada la trayectoria de revisión, puede encontrarse el costo marginal.

Celda vacía:	S_2D_4:	+ 8
Celdas de esquinas:	S_1D_4:	—8
	S_1D_2:	+ 3
	S_3D_2:	—4
	S_3D_1:	+ 7
	S_2D_1:	—5
		+ 18 —17 = + 1

Éste es el mismo costo marginal que se muestra en la tabla 10- 10c, que se encontró con el método MODI. Como ejercicio de práctica el lector puede verificar todas las otras celdas de la tabla 10-12*b*. Las respuestas deben coincidir con las que se muestran en la tabla 10-10c.

¿Qué método es mejor, el MODI o el de la piedra que rueda? Los autores prefieren el método MODI, porque en problemas grandes llega a los costos marginales con mayor rapidez. El método de la piedra que rueda puede resultar bastante laborioso cuando hay muchas celdas vacías que verificar. Sin embargo, este método es más eficaz en problemas pequeños y es útil para corroborar algunos datos en problemas grandes. Por ejemplo, si el MODI indica que una solución es óptima, pueden buscarse las celdas vacías que tienen costos bajos. Si las hay, puede usarse el método de la piedra que rueda para verificarlas. Esto da alguna protección contra los errores matemáticos.

EJERCICIO DE PRÁCTICA10-5

Con el método de la piedra que rueda pruébese la siguiente solución. ¿Es óptima? Si no lo es, revísese la solución y repítase hasta encontrar una solución óptima.

	D_1	D_2	D_3	
S_1	7 / 500	5 / 100	8	600
S_2	3	9 / 600	6 / 200	800
S_3	4	12	10 / 1000	1000
	500	700	1200	

Casos especiales

En esta sección se analizan cuatro casos especiales. Los dos primeros son circunstancias que pueden surgir al probar la optimalidad. Los dos últimos son problemas especiales.

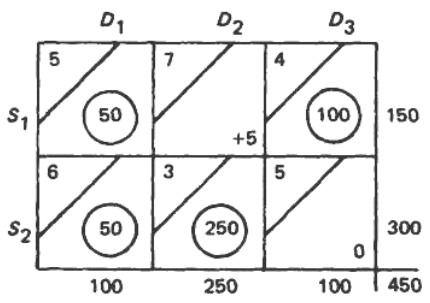
Soluciones óptimas múltiples Si una celda vacía tiene un costo marginal de cero, significa que existe otra solución óptima. Un cero en el costo marginal significa que esa celda puede usarse sin aumentar los costos totales. En la tabla 10-13*a* se muestra un ejemplo. La celda S_2D_3 tiene costo marginal de cero. Si se llena esta celda, se encontrará una segunda solución óptima, esto se muestra en la tabla 10-13*b*.

Las soluciones óptimas múltiples son importantes porque dan a la administración mayor flexibilidad en la toma de decisiones.

Muy pocas celdas llenas, degeneración La regla para el número correcto de celdas llenas es una menos que el número de renglones y columnas. Si la solución tiene menos, se dice que *es degenerada.* Esto no indica que haya un error. Ocurre cuando al llenar una celda se satisfacen las condiciones de frontera tanto del renglón como de la columna. Sin duda una solución óptima puede ser degenerada. No obstante, esto quiere decir que se tendrán problemas al probar la solución con cualquier método, el MODI o el de la piedra que rueda. Para analizar estos problemas, considérese el ejemplo de la tabla 10-14*a*.

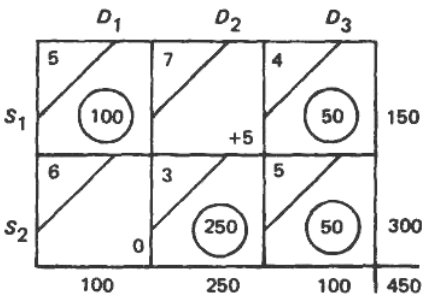
Al probar la solución, MODI comienza con cero en el coeficiente del primer renglón. Con la celda S_1D_1 resulta que el coeficiente de la columna

TABLA 10-13
Soluciones óptimas múltiples



(*a*) Primera solución óptima

Costo total
5 × 50 = 250
4 × 100 = 400
6 × 50 = 300
3 × 250 = 750
1700



(*b*) Segunda solución óptima

Costo total
5 × 100 = 500
4 × 50 = 200
3 × 250 = 750
5 × 50 = 250
1700

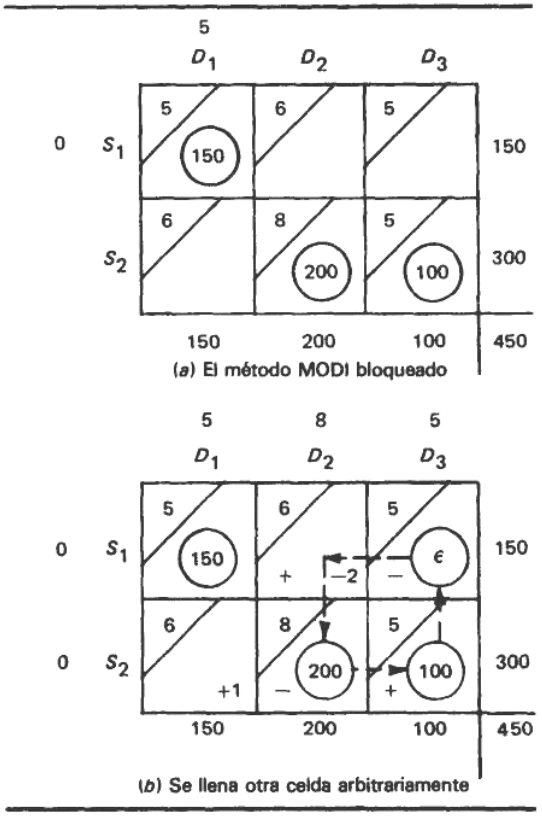
D_1 es (5 – 0 = 5). Ahora no hay a dónde ir. Ni el primer renglón ni la primera columna tienen otra celda llena.

Para corregir esto, sencillamente se llena una celda vacía arbitraria. En la tabla 10-14b se puso la letra griega *épsilon* (∈) en la celda S_1D_3 para indicar que está llena. Epsilon es un dispositivo matemático maravilloso: representa una cantidad mayor que cero e infinitamente pequeña. Realmente es un truco para permitir que se realice la prueba. Algunas celdas vacías resultan más útiles para esto que otras, pero es difícil saber eso de antemano. Se verá lo que sucede cuando se escoge la celda equivocada.

En la tabla 10-14*b* el costo marginal de la celda S_1D_2 es negativo, lo cual indica que es necesaria una revisión. Sin embargo, la trayectoria de revisión tiene un signo menos en la celda de ∈. Esto significa que sólo puede agregarse ∈ a la celda S_1D_2. En términos prácticos, esto quiere decir que se colocó ∈ en el lugar equivocado. Así, lo mejor es cambiar ∈ a la celda S_1D_2 y repetir la prueba, como se muestra en la tabla 10-15*a*.

Con ∈ en una nueva celda, el costo marginal negativo aparece en la celda S_2D_1. La celda se llena y la revisión (véase la tabla 10-15*b*) resulta óptima. Nótese que la solución final no es degenerada. Esto es una coincidencia, pudo haber resultado degenerada.

TABLA 10-14
Una solución degenerada

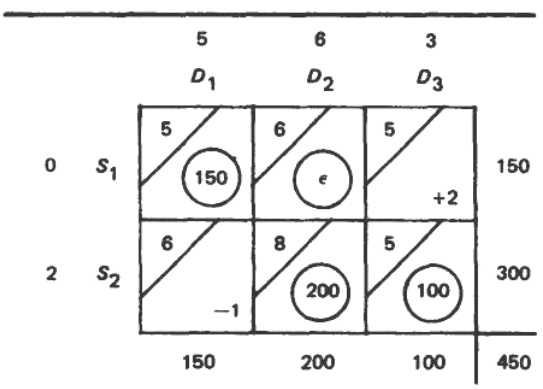


¿Qué pasa si se está usando el método de la piedra que rueda con una solución degenerada? Finalmente se llegará a una celda vacía desde la cual no puede trazarse una trayectoria de revisión. Para observarse esto véase la tabla 10-14*a*. Supóngase que se trata de probar la celda S_2D_1. No existe una trayectoria que tenga celdas llenas en todas las esquinas. Para remediar esto, se agrega ϵ a una celda vacía que permita establecer una trayectoria. En este ejemplo cualquiera de las celdas S_1D_2 o S_1D_3 servirá.

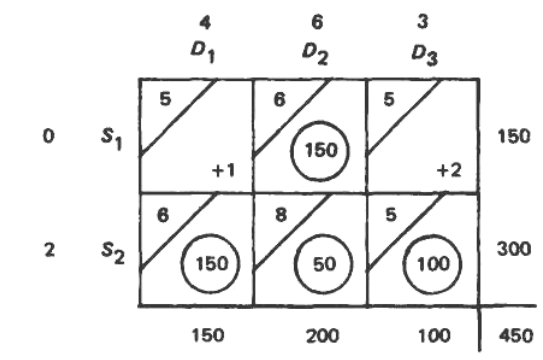
Se dará una última advertencia sobre la degeneración. Una vez que se ha puesto una ϵ en una celda vacía, debe dejarse ahí para esa revisión, no puede moverse a otra celda. Es claro que si hace falta más de una celda llena, se necesitarán varias ϵ's. Pero una vez que se colocan, deben permanecer ahí durante toda la prueba.

Cuando se quiere maximizar El método del transporte está diseñado para problemas de minimización. Sin embargo, habrá veces que se tenga un problema de transporte que requiera maximización. Por ejemplo, si las rutas alternativas incluyen una función del rendimiento, debe maximizar-se ese rendimiento (o ganancia).

TABLA 10-15
Soluciones revisadas



(*a*) Cambio de



(*b*) Solución revisada, óptima

Existen tres formas de adaptarse a la maximización. Aunque todas llevan al mismo resultado, los autores prefieren la primera.

Método A: minimización del costo de oportunidad Si se está maximizando, entonces las ganancias grandes son buenas y las pequeñas son malas. Se le puede dar la vuelta al problema encontrando la celda con la mayor ganancia y restando de esta todos los números en las celdas. Estas diferencias son los *costos de oportunidad* por no usar las celdas de ganancia alta. Se incluyen estos costos de oportunidad en la matriz de transporte y se aplican los métodos estándares para encontrar la solución óptima. En la tabla 10-16 se muestra un ejemplo.

Método B: minimización de las ganancias negativas Otro método es multiplicar por — 1 todas las ganancias en las celdas y proceder con el método del transporte. Esto funciona muy bien para las soluciones por computadora. Si se está resolviendo el problema en forma manual, puede crear confusiones, a menos que se tenga mucha práctica en el manejo de números negativos.

Método C: inversión de todas las reglas de decisión Al invertir todas las reglas de decisión, se maximiza directamente. Se incluyen las ganancia: en cada celda y se aplica el método del transporte reinterpretando las reglas de *decisión.* Para encontrar una solución inicial con el método del menor costo, se comienza con el "costo" *más grande.* Al final, la prueba de optimalidad tendrá que tener todos los valores *no positivos* para indicar que la solución es óptima. Este enfoque está limitado a soluciones manuales y requiere una gran flexibilidad mental.

Cuando algunas rutas están prohibidas ¿Qué se hace cuando algunas de las celdas (rutas) en un problema no pueden usarse, si están prohibidas por alguna razón externa? Esto no causará ninguna dificultad real. Las celda; se incluyen en la matriz y se les asigna un costo muy alto. Si se les asigna, por ejemplo, 100, el costo más alto de los permitidos, esas celdas no aparecerán en la solución final. Para mayor rapidez, puede usarse la letra M para representar un número muy grande. Esto simplifica los cálculos, ya que sumar o restar cualquier número finito no afecta a M. Por ejemplo, M + 6 = M.

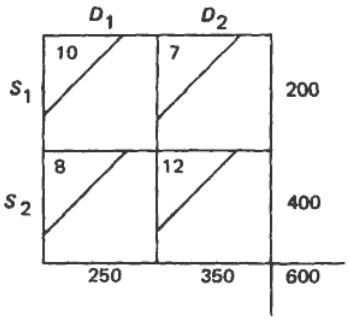
OTROS TIPOS DE PROBLEMAS DE TRANSPORTE

Existen muchas aplicaciones del método de transporte a problemas que no tienen ninguna relación con el envío de bienes. Éstos son problemas de "transporte" sólo en un sentido muy general. A continuación se dan tres ejemplos para ilustrar la variedad de problemas a los que el método se aplica. Por supuesto, ésta no es una lista completa. La intención es ejercitar la mente para ampliar la imaginación.

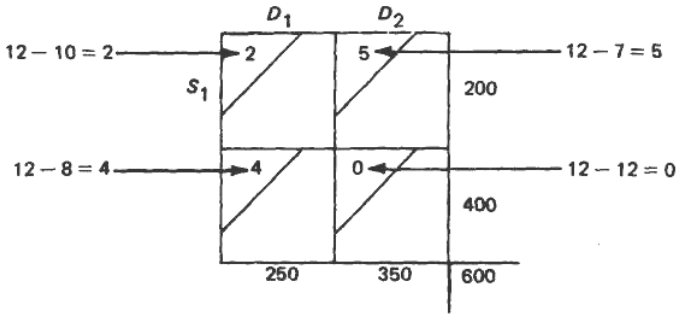
Selección de un medio de publicidad

La publicidad lleva un *mensaje* de una compañía desde varios *orígenes o medios* a los *destinos* deseados por la compañía como metas de mercado

TABLA 10-16
Conversión a costos de oportunidad



(*a*) Un problema de maximización



(*b*) Minimización de los costos de oportunidad

(grupos por edades por ejemplo). Los orígenes, televisión, radio, periódico, tienen capacidades totales en términos de la audiencia a la que pueden llegar en un periodo de tiempo limitado. La compañía puede formular objetivos para cada meta en el mercado en términos del número de personas que se desea queden expuestas a su mensaje. Esto constituye las demandas en los destinos. La última componente que se necesita es el costo por persona expuesta para cada uno de los medios en cada categoría de mercado. Estos costos pueden ser proporcionados por los medios para la audiencia estándar en las categorías. El problema general será, entonces, encontrar la combinación de menor costo para enviar los mensajes de los medios a sus destinos en el mercado. En la tabla 10-17 se ilustra un ejemplo.

Programación de la producción

Una de las tareas en la planeación de la producción es encontrar el programa de menor costo para cumplir con la demanda en los meses futuros. En general, la demanda se conoce, pero varía de un mes a otro. Para suavizar estas variaciones, los artículos se producen para inventario en los meses de

TABLA 10-17
Selección del medio de publicidad

Orígenes	Destinos (grupos de edades) 17-24	25-45	46-65	Más de 65	Ficticio	Audiencia meta total
Periódico	.75	1 (35 000)	.75	1	0	35 000
Un periódico	1.5	1	.75 (30 000)	1	0	30 000
Radio	.5 (20 000)	1	1	1	0	20 000
Televisión	.9	1.1	1	.8 (20 000)	0	80 000
	20 000	35 000	30 000	20 000	60 000	165 000

Tamaño del grupo de mercado al que se debe exponer

Nota: (*a*) Los costos reflejan el costo por cada mil personas que ven el anuncio.
(*b*) Esta solución recomienda el uso de cada medio con anuncios diseñados en especial para un grupo de edad.

holgura y se usa tiempo extra en los meses pico. En efecto, los turnos normales y los de tiempo extra constituyen los *orígenes.* En forma análoga, la demanda en cada mes es un *destino.* Los costos de "transporte" varían. Se incurre en un costo de producción regular cuando los artículos se producen en el mismo mes en que se demandan. Si se usa el tiempo extra, existe un costo unitario agregado. Cuando la producción es para inventario, se agrega también un costo de inventario mensual. Por supuesto, la demanda de enero no puede satisfacerse en febrero. Este tipo de problema se ilustra en la tabla 10-18.

Traslado de carros para renta

No es difícil que una agencia de renta de carros se encuentre con que tiene exceso de carros en algún punto y deficiencia de los mismos en otros. Para corregir esto, los carros deben trasladarse. Pero ¿qué lugares *origen* deben mandar carros a cada lugar *destino?* Si se conoce el costo de transporte unitario para cada ruta posible, este problema puede resolverse con el método de transporte. En la tabla 10-19 se muestra un problema de este tipo.

CARACTERÍSTICAS DE LOS PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN

Los problemas de asignación forman una subclase especial de los problemas de transporte. Para quedar clasificado como un problema de asignación,

TABLA 10-18
Programación de la producción

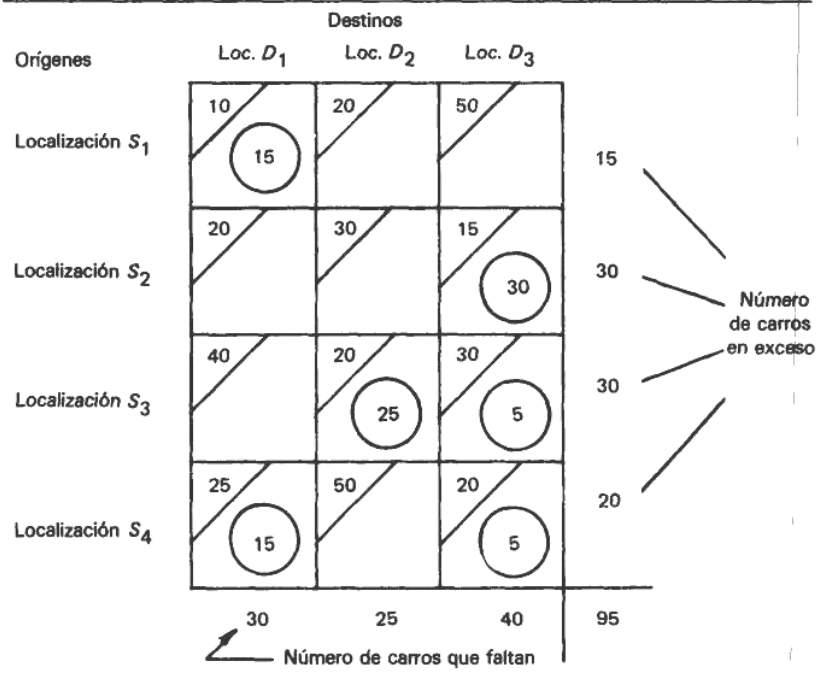
Orígenes	Destinos: Periodo 1	Periodo 2	Periodo 3	Capacidades de producción
Periodo 1: regular	3 (20 000)	4	5	20 000
Periodo 1: tiempo extra	4.5	5.5 (10 000)	6.5	10 000
Periodo 2: regular	M	3 (20 000)	4	20 000
Periodo 2: tiempo extra	M	4.5 (10 000)	5.5	10 000
Periodo 3: regular	M	M	3 (20 000)	20 000
Periodo 4: tiempo extra	M	M	4.5 (10 000)	10 000
	20 000	40 000	30 000	90 000
	Demanda en cada periodo			

Costos: Tiempo regular: $3
Diferencia por tiempo extra: + 1.50
Costos de inventario: $1 por mes
M = un costo muy alto

la capacidad en cada origen y la demanda en cada destino debe ser igual a 1. Como su nombre lo dice, el problema trata de decidir qué origen *asignar* a cada destino. Los problemas típicos de esta naturaleza incluyen el de asignar trabajadores a máquinas, equipos de trabajo a proyectos y agentes de ventas a distritos.

Los problemas de asignación de pequeña escala pueden resolverse con la enumeración de todas las combinaciones y la selección de la mejor. Pero para un problema *de n* x *n,* existen ni soluciones posibles. Aun un pequeño problema de 5 x 5 tiene 120 soluciones. Se podría usar el método de ramificación y acotamiento del capítulo 9. También los métodos generales de solución de PL como el símplex, o aun el método del transporte. Sin em-

TABLA 10-19
Traslado de carros de renta



bargo, se podría obtener un caso de degeneración severa. El mejor enfoque es usar el *método de asignación,* una técnica fácil desarrollada especialmente para este tipo de problemas.

SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE ASIGNACIÓN

En la figura 10-3 se muestra un ejemplo típico del problema de asignación. La Roving Ambulance Company tiene cuatro ambulancias en diferentes lugares de la ciudad. Existen cuatro pacientes que requieren servicio, también en lugares dispersos. Se conoce el tiempo de traslado para cada ambulancia. La Roving Ambulance quiere asignar las ambulancias de manera que se minimice el tiempo total de traslado.

El *método de asignación* o *método húngaro* utiliza una matriz de *costos de oportunidad* para encontrar la asignación óptima. Los pasos de este procedimiento iterativo se muestran en 1a figura 10-4. Se examinarán los pasos uno a la vez usando el ejemplo.

La matriz de asignación

La matriz de asignación es similar a la matriz de transporte, como puede verse para el problema muestra en la tabla 10-20. Los costos, en este caso el tiempo de viaje se colocan en el centro de cada celda, ya que no se escri-

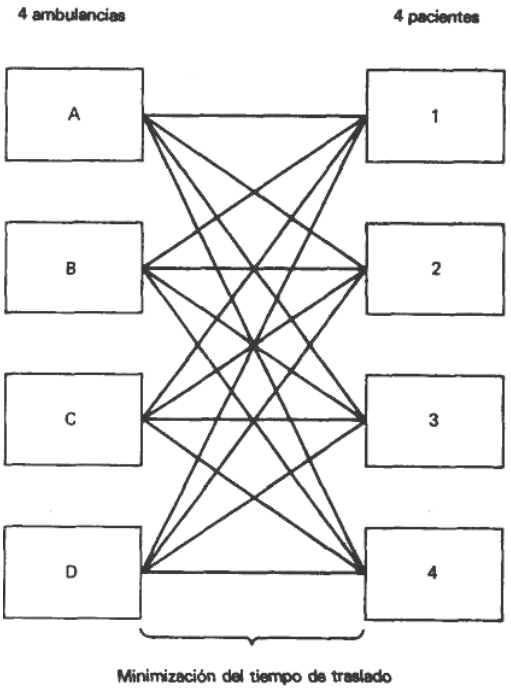


FIGURA 10-3
Un problema de asignación

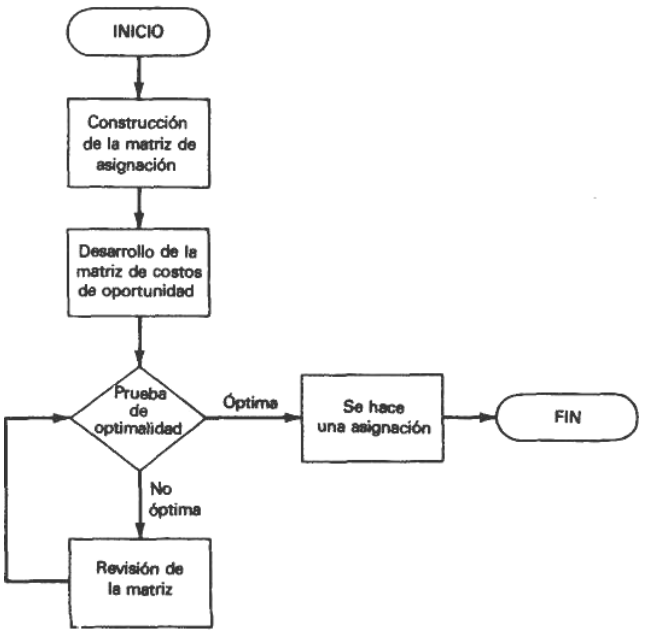


FIGURA 10-4
Pasos en el método de asignación

birá nada más. No se necesitan condiciones de frontera puesto que siempre son igual a 1. Los renglones y las columnas pueden intercambiarse de la misma manera que en el problema del transporte.

Desarrollo de la matriz de costo de oportunidad

El método de asignación busca minimizar el *costo de oportunidad* por 10 usar las celdas menos costosas. El primer paso es desarrollar los costos de oportunidad para cada celda. Esto se hace en la tabla 10-21. El costo ir as bajo en cada renglón se resta de cada celda de ese renglón. Esta reducción de renglón se muestra en la tabla 10-21*a*. Después se lleva a cabo una reducción por columna. Se resta el menor costo de cada columna de todos los elementos en esa columna. El resultado es una matriz de costos de oportunidad que se muestra en la tabla 10-21*b*.

Este paso siempre proporciona por lo menos una celda con costo cero en cada renglón y en cada columna. El costo de oportunidad de cero significa que el uso de esa celda para una asignación da la asignación de menor costo posible. El siguiente paso es verificar la optimalidad.

Prueba de optimalidad

Para realizar la prueba de optimalidad, se examina la matriz de costos de oportunidad para comprobar si se puede hacer una asignación óptima. Una asignación óptima emplea sólo celdas con costo cero. Para el ejemplo, esta prueba se lleva a cabo en la tabla 10-22 con la regla del *mínimo número de líneas.* Con esta regla, se encuentra el mínimo número de líneas que se necesita para "cubrir" todos los ceros de la matriz (no se permiten las líneas diagonales). En la tabla 10-22 se necesitaron tres líneas. Esta solución no es óptima ya que *el mínimo número de líneas debe ser igual que el número de renglones* (o de columnas) para que se tenga una solución óptima.

TABLA 10-20
Construcción de la matriz de costos

	Paciente			
Ambulancia	1	2	3	4
A	7	9	8	13
B	16	16	15	11
C	16	19	10	15
D	16	17	14	16

TABLA 10-21
Desarrollo de la matriz de costos de oportunidad

(*a*) Reducción por renglón

Ambulancia \ Paciente	1	2	3	4
A	7 − 7 = 0	9 − 7 = 2	8 − 7 = 1	13 − 7 = 6
B	16 − 11 = 5	16 − 11 = 5	15 − 11 = 4	11 − 11 = 0
C	16 − 10 = 6	19 − 10 = 9	10 − 10 = 0	15 − 10 = 5
D	16 − 14 = 2	17 − 14 = 3	14 − 14 = 0	16 − 14 = 2

⇒

0	2	1	6
5	5	4	0
6	9	0	5
2	3	0	2

(*b*) Reducción por columna

Ambulancia \ Paciente	1	2	3	4
A	0 − 0 = 0	2 − 2 = 0	1 − 0 = 1	6 − 0 = 6
B	5 − 0 = 5	5 − 2 = 3	4 − 0 = 4	0 − 0 = 0
C	6 − 0 = 6	9 − 2 = 7	0 − 0 = 0	5 − 0 = 5
D	2 − 0 = 2	3 − 2 = 1	0 − 0 = 0	2 − 0 = 2

⇒

0	0	1	6
5	3	4	0
6	7	0	5
2	1	0	2

Nótese que la palabra "mínimo" es importante en esta regla. Se pudieron haber usado cuatro líneas, una en cada renglón, para cubrir los ceros, pero ese no hubiera sido un patrón mínimo. Con alguna práctica no debe tenerse dificultad en encontrar el patrón mínimo.

Con frecuencia puede haber más de un posible patrón mínimo de líneas. Por ejemplo, en la tabla 10-22 se pudo haber dibujado una línea a través del renglón B y no de la columna 4. La trayectoria que se escoge puede afectar al número de iteraciones necesarias, pero esto no puede preverse.

Como no puede hacerse una asignación óptima, la matriz debe revisarse.[2]

Revisión de la matriz

El proceso de revisión opera sobre la matriz tachada que se usó para la prueba. En la tabla 10-23 se muestra esta matriz otra vez. Se localiza la celda con el menor costo de entre las celdas que *no están cubiertas por líneas.* En el ejemplo esta celda es *D2* (costo = 1). Ahora se *resta* este costo de todas 1as celdas sin cubrir en la matriz. También se *suma* ese costo a cada celda *cubierta por una intersección.* Estos ajustes llevan a una matriz revisada que tiene por lo menos una nueva celda con costo cero, como se muestra en la tabla 10-23*a*.

En la tabla 10-23*b* se hace la prueba de optimalidad para la matriz revisada. Se necesitan cuatro líneas para cubrir todos los ceros, por tanta, puede hacerse una asignación óptima.

La asignación óptima

Al hacer la asignación óptima debe haber una celda con cero para cada par único de renglón y columna. Tal asignación puede observarse por las marcas en la tabla 10-23&. Ésta es la única solución óptima para este problema. Para encontrar el costo total de la solución se debe regresar a la matriz original:

TABLA 10-22
Prueba de optimalidad

Ambulancia	Paciente 1	2	3	4
A	0	0	1	6
B	5	3	4	0
C	6	7	0	5
D	2	1	0	2

TABLA 10-23
Revisión de la solución

(*a*) Desarrollo de la matriz revisada

Ambulancia \ Paciente	1	2	3	4
A	0	0	1 + 1 = 2	6 + 1 = 7
B	5 − 1 = 4	3 − 1 = 2	4	0
C	6 − 1 = 5	7 − 1 = 6	0	5
D	2 − 1 = 1	1 − 1 = 0	0	2

⟹

0	0	2	7
4	2	4	0
5	6	0	5
1	0	0	2

(*b*) Prueba de optimalidad

Ambulancia \ Paciente	1	2	3	4
A	0 √	0	2	7
B	4	2	4	0 √
C	5	6	0 √	5
D	1	0 √	0	2

√ Muestra de asignación óptima

Asignación	*Costo (tiempo de traslado)*
A a l	**7**
B a 4	**11**
C a 3	**10**
D a 2	**17**
	45min

Resumen del método de asignación

En resumen, los pasos del método de asignación son:

1 Desarrollo de los costos de oportunidad para cada renglón y columna de la matriz.
2 Prueba de optimalidad usando la regla del mínimo número de líneas.
3 Si no es óptima, se selecciona la celda con menor costo que no está cubierta por una línea y se usa para ajustar la matriz.
4 Se repiten los pasos 2 y 3 hasta que se encuentre una solución óptima.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 10-6

Aplíquese el método de asignación al siguiente problema:

	W	X	Y	Z
A	15	18	16	10
B	14	17	17	8
C	15	19	23	17
D	20	14	16	17

¿Cuál es el costo total de la solución óptima?

Casos especiales

Varias situaciones especiales pueden surgir al trabajar con problemas de asignación. A continuación se examinan las más comunes.

El problema no balanceado Es posible que se encuentre una situación no balanceada. Por ejemplo, puede haber cuatro ambulancias y sólo tres pacientes. Esto se maneja en la misma forma que en un problema de transporte: se agrega un paciente ficticio para balancear la matriz *antes* de hacer las reducciones en los renglones y columnas. Se asigna un costo de oportunidad de cero a cada celda ficticia.

Soluciones óptimas múltiples No existe una indicación clara de que existan varias soluciones óptimas. La única forma en que puede detectarse es-

to es cuando pueden encontrarse dos asignaciones o más en la matriz final. Una buena costumbre es siempre buscar una segunda asignación, no se debe estar satisfecho con una sola. Estas soluciones adicionales proporcionan flexibilidad administrativa en la toma de decisiones.

Asignaciones prohibidas Supóngase que se considera que no pueden usarse ciertas asignaciones por alguna razón. Simplemente se incluyen con un costo muy grande (+ M). Esto asegurará que no queden en la solución final.

Maximización El método de asignación está diseñado para minimizar. Sin embargo, se puede querer asignar vendedores a distritos con objeto de maximizar el rendimiento. Puede hacerse un pequeño ajuste para estos casos. Se construye la matriz de rendimientos (o ganancias) y se restan los números de cada celda del elemento más grande en la matriz. Esto convierte a la matriz en una de costos de oportunidad. Entonces, puede continuarse con las reducciones en los renglones y las columnas aplicando el método de asignación para minimización.

Costos negativos Puede encontrase una situación en que la matriz contiene tanto costos positivos como negativos. Esto no presenta una dificultad, ya que el método de asignación está basado en costos relativos. Sólo se agrega a cada celda una cantidad igual que el costo más negativo. Esto elimina todos los números negativos y puede continuarse con el método normal.

EXPERIENCIAS DEL MUNDO REAL

Hasta este momento (los autores esperan) el lector estará de acuerdo en que los problemas de asignación y de transporte son bastante fáciles de resolver. Aun sin computadora, es probable que pueda resolver un problema grande, por ejemplo de 20 x 20, en menos de dos horas. Incluso uno más grande, de 100 x 100, en menos de un día. Por supuesto, con una computadora podrían resolverse en segundos.

Pero ¿qué pasa con el tiempo que se lleva recopilar los datos necesarios? Los problemas de 20 x 20 requieren 400 elementos individuales de costo. Los problemas de 100 x 100 requieren 10 000 datos individuales. El punto es que la mayor parte del trabajo está en la recopilación de los datos. Algunas veces el costo de reunir los datos excede los ahorros que puedan resultar de disponer de una solución óptima en lugar de una cercana al óptimo. Por ejemplo, se conoce el caso de un sistema de escuelas públicas a la que se le ofreció un método computarizado para obtener las rutas óptimas para los camiones escolares. Las escuelas rechazaron el método porque el costo de reunir los datos necesarios y de poner en práctica el método, $300 000, excedía los posibles ahorros.

Otro obstáculo para el uso de estos métodos es que puede haber otros factores importantes. Por ejemplo, al seleccionar la localización de una planta o de un almacén, los costos de transporte son sólo un factor por considerar. Otras consideraciones que no pueden pasarse por alto son las leyes locales, los costos de bienes raíces e inmuebles, el costo y la disponi-

bilidad de la mano de obra, los objetivos de crecimiento y organizacionales y los impuestos.

A pesar de estas limitaciones, los métodos de transporte y asignación tienen muchas aplicaciones. Las más obvias se han usado en los ejemplos del capítulo y algunos otros están citados al final del mismo. Esto es alentador, ya que la mayoría de estos métodos son relativamente recientes. Se da el crédito por la formulación original del problema del transporte a F. L. Hitchcock en 1941, y el MODI fue desarrollado por George Dantzig en 1955. El método de asignación está basado en un teorema demostrado por el matemático húngaro D. Konig en 1950.

De cualquier manera, antes que estos métodos puedan aplicarse, se debe reconocer que existe un problema y que se ajusta a uno de estos modelos. En la medida en que más administradores conozcan estas técnicas, se encontrarán más aplicaciones.

RESUMEN

Puede pensarse que la programación lineal, el método del transporte y el método de asignación forman una terna jerárquica de técnicas de solución. PL es la más general y el método de asignación es un caso especial del método del transporte. Al compararlas con el símplex, las técnicas de este capítulo tienen tres ventajas: son más rápidas, pueden aplicarse manualmente a problemas grandes y siempre dan soluciones enteras.

Los problemas de transporte pueden reconocerse por su naturaleza desde-hacia o de-a, de un almacén a una tienda, del presente al futuro desde aquí hacia allá. Los problemas de asignación tienen el mismo carácter pero son más fáciles de reconocer si se piensa en "asignaciones": asignaciones de vendedores a territorios, trabajos a máquinas, contratos a contratistas.

la solución de un problema de transporte se lleva a cabo en dos fases. Primero se encuentra una solución inicial y después se prueba la optimalidad de la misma, se revisa, si es necesario, con el MODI o el método de la piedra que rueda. La solución óptima nunca usa más celdas que la suma de los renglones y las columnas menos uno.

El método de asignación emplea una matriz de costo de oportunidad y las reducciones sucesivas exponen al final una asignación óptima.

EJERCICIOS

10-1 Constrúyase una matriz de transporte con los datos que se dan a continuación.

Origen	*Capacidad*	*Destino*	*Demanda*
A	500	W	400
B	800	X	700
C	1 00	Y	1 200
	2 300		2 300

	A		
De	W	X	Y
A	2	3	6
B	2	1	5
C	4	6	12

Encuéntrese una solución inicial con el método del costo mínimo. ¿Cuál es el costo total para esta solución?

10-2 Con los siguientes datos constrúyase una matriz de transporte.

Origen	*Capacidad*	*Destino*	*Demanda*
Chicago	45	Richmond	40
New York	90	Pittsburgh	90
Atlanta	70	St. Louis	30
	205	Cleveland	30
			190

Costos de envío ($/unidad)

	A			
De	*Richmond*	*Pittsburgh*	*St. Louis*	*Cleveland*
Chicago	7	8	1	7
New York	2	3	9	4
Atlanta	9	5	7	6

a Encuéntrese la solución inicial con el método del costo mínimo. ¿Cuál es el costo total de esta solución?
b ¿Cuántos renglones y columnas debe tener la matriz? ¿Es degenerada la solución inicial?

Cómo encontrar una solución óptima

10-3 Establézcase la matriz de transporte para el problema que sigue.

Costos de envío ($/unidad)

	D_1	D_2	D_3	Capacidad
O_1	8	2	3	2
O_2	6	1	6	5
O_3	4	7	5	9
Demanda:	2	4	8	

a Encuéntrese la solución óptima con el MODI.
b Encuéntrese la solución óptima con el método de la piedra que rueda.
c ¿Cuál es el costo total de la solución óptima?
b ¿Existen otras soluciones óptimas?

10-4 Dado el siguiente problema de transporte:

Costo de envío ($/unidad)

	Almacén			
Distribuidor	*1*	*2*	*3*	*Capacidad*
A	15	13	12	200
B	8	10	14	400
C	9	13	11	800
Demanda:	200	500	900	

a Encuéntrese la solución óptima con el MODI.
b Encuéntrese la solución óptima con el método de la piedra que rueda.
c ¿Cuál es el costo total de la solución óptima?
d ¿Existen otras soluciones óptimas?

10-5 Encuéntrese la solución óptima para el ejercicio 10-1. ¿Cuál es el costo total?

10-6 Encuéntrese la solución óptima para el ejercicio 10-2. ¿Cuál es el costo total?

10-7 Los datos siguientes describen un problema de transporte. (Los costos de envío se dan en dólares/unidad.)

	Destino				
Origen	D_1	D_2	D_3	D_4	Capacidad
S_1	15	7	10	13	100
S_2	12	8	13	8	100
S_3	9	11	6	11	150
S_4 10	10	7	7	100	
Demanda	120	90	90	80	

a Encuéntrese la solución óptima. ¿Cuál es el costo total?
b ¿Existen otras soluciones óptimas? Si así es, ¿cuáles son?

10-8 Resuélvase el siguiente problema de transporte. (Los costos de envío se dan en dólares/unidad.)

	A			
De	*X*	*Y*	*Z*	*Capacidad*
A	6	6	3	40
B	10	7	5	30
C	10	7	5	30
D	8	4	6	50
Demanda:	90	50	40	

Maximización

10-9 La Able Company tiene tres plantas cada una de las cuales puede fabricar los tres productos de la compañía. Los precios de venta son

independientes de la planta de origen, pero los costos variables difieren debido a las distintas edades de la maquinaria y a que los costos de mano de obra también difieren. La Able Company quiere saber qué cantidad de cada producto debe fabricar en cada planta. Las capacidades semanales y las demandas de venta se dan en seguida.

Planta	*Capacidad*	*Producto*	*Demanda*
No. 1	500	Estándar	1 500
No. 2	3 000	De lujo	2 000
No. 3	3 500	De super lujo	2 500

La contribución neta (precio-costo variable) para cada planta y la combinación de productos es (en &/unidad):

	Producto		
Planta	*Estándar*	*De lujo*	*De super lujo*
No. 1	4	7	5
No. 2	6	8	7
No. 3	5	4	4

a Con el método de transporte encuéntrese el plan que *maximice* la contribución.

b ¿Cuál es la contribución total por semana?

10-10 Resuélvase el siguiente problema de maximización con el método de transporte. Nótese que hay dos rutas prohibidas. (Las ganancias se dan en dólares/unidad.)

	A			
De	D_1	D_2	D_3	Capacidad
S_1	—	12	10	100
S_2	11	13	12	600
S_3	10	—	9	700
Demanda:	300	400	500	

¿Cuál es la ganancia total para la solución óptima?

Aplicaciones del método del transporte

10-11 La compañía Mobile Home Moving está tratando de programar sus vehículos de arrastre para la próxima semana. La compañía tiene 16 vehículos de arrastre dispersos en tres ciudades del estado: dos en Clearwater, cinco en New Smyrna y nueve en Orlando. Para la próxima semana deben recoger 14 casas móviles y trasladarlas desde otras tres ciudades: dos de Ft. Myers, cuatro de Monticello y ocho de Miami. Los costos estimados para mandar un vehículo a cada una de estas ciudades se dan a continuación:

	A		
De	*Ft. Myers*	*Monticello*	*Miami*
Clearwater	80	10	30
New Smyrna	60	30	60
Orlando	40	70	40

¿Cómo se deben asignar los tractores para minimizar el costo?

10-12 La Ace Manufacturing quiere planear su producción de aparatos para las próximas cuatro semanas. Basándose en los pronósticos de mercado, la compañía necesita 1 000, 1 200, 800 y 1 000 aparatos respectivamente en las próximas cuatro semanas. El nivel de inventario actual es de 200 aparatos y quiere tener 300 en inventario al final del periodo de planeación.

La planta de Ace tiene una capacidad de tiempo normal de 800 aparatos/semana y esto puede elevarse un 50 % con horas extras. El tiempo extra agrega $0.50/unidad al costo de producción normal de $2/unidad. Los costos de mantener inventario son de $0.25/semana.

¿Cuál es plan de producción con costo mínimo?

10-13 En Wakulla County, los camiones que recogen la basura descargan en siete basureros municipales. Tres de estos basureros son estaciones maestras que tienen sus propias plantas con molinos de basura. Esto reduce la cantidad de terreno que se necesita para depositar la basura. Las otras cuatro estaciones son de transferencia que comprimen la basura que reciben y después la mandan a una de las cuatro estaciones maestras para ser molida.

La capacidad de cada estación de transferencia en miles de toneladas por mes es 10, 20, 40 y 10 (respectivamente, para las estaciones 1 a 4). Después de tomar en cuenta la recepción directa, las tres estaciones maestras pueden aceptar 10, 25 y 45 toneladas por mes (respectivamente, para las estaciones 5 a 7) desde las estaciones de transferencia. Las distancias entre las estaciones de transferencia y las maestras se muestran en la tabla, en millas:

	A		
De	Maestra 5	Maestra 6	Maestra 7
Transferencia 1	30	24	18
Transferencia 2	9	15	27
Transferencia 3	15	24	18
Transferencia 4	35	20	16

Con el método del transporte encuéntrese el tonelaje que debe mandarse desde cada estación de transferencia a cada estación maestra para minimizar las toneladas-milla.

10-14 La Venture Products Corp. está planeando una campaña de publicidad para introducir su nuevo producto, un cigarrillo sin tabaco. La compañía ha identificado cuatro grupos de mercado y quiere

que por lo menos 1, 2, 4 y 1 (millones) clientes potenciales vean su anuncio en el lapso de una semana. Se están considerando tres medios: los periódicos, una revista y un comercial en hora prima de televisión. La Venture estima que el número total de clientes potenciales que verán sólo un anuncio y no los otros dos es 1 millón para el periódico, 2.5 millones para la revista y 4.5 millones en la televisión.

Cada medio tiene grupos de audiencias distintas, lo cual resulta en diferentes costos por cliente potencial para cada anuncio. Las tasas efectivas de comercialización por cada 1 000 clientes potenciales en el mercado se muestran en seguida para cada medio.

	Grupo de mercado			
Medio	*1*	*2*	*3*	*4*
Periódico	$1.40	$0.70	$0.90	$1.40
Revista	$1.20	$0.90	$1.20	$1.00
Televisión	$1.00	$1.30	$1.00	$1.10

Formúlese éste como un problema de transporte. ¿A qué grupos de mercado debe dirigirse cada medio para minimizar el costo total?

10-15 La cadena Burnt Burger tiene tres restaurantes en el país, los cuales usan vasos desechables estándares. Se ha invitado a tres proveedores para competir por la concesión de surtir estos vasos. Sus propuestas son:

Proveedor	*Precio (por cada 1 000)*	*Capacidad anual*
A	$0.90	30 000
B	$1.00	75 000
C	$1.10	135 000

El costo de transporte (en dólares/1 000 vasos) varía desde cada proveedor a cada Burnt Burger.

	A la Burnt Burger		
De	*No. 1*	*No. 2*	*No. 3*
A	$0.80	$0.10	$0.30
B	$0.50	$0.20	$0.50
C	$0.20	$0.40	$0.20

Las necesidades anuales de vasos para las tres Burnt Burgers son 30 000, 60 000 y 120 000, respectivamente.

¿Cuántos vasos deben comprarse de cada proveedor para cada restaurante? Resuélvase este problema con el método del transporte.

10-26 Un grupo de nuevos administradores de moteles, después de terminar el programa de entrenamiento de la cadena, deben expresar sus preferencias sobre las tres áreas del país. Sus respuestas tienden a clasificarse en tres grupos, como se muestra en seguida:

	Área		
Grupo	*Norte*	*Sur*	*Oeste*
1	3	10	8
2	5	8	5
3	7	4	7

Los números indican la utilidad o preferencia, en una escala de 1 a 10, que cada grupo tiene por una asignación en cada región. Resultó que de 28 administradores cuatro estaban en el grupo 1, ocho en el grupo 2 y 16 en el 3.

La compañía tiene vacantes para cuatro administradores en el norte 10 en el sur y 18 en el oeste. La firma quiere maximizar la utilidad total. Con el método del transporte resuélvase este problema.

10-17 La Fertile Farms tiene tres parcelas de tierra con 50, 100 y 200 acres, respectivamente. Existen tres cosechas posibles que la compañía puede plantar, pero el Departament of Agriculture ha establecido límites en el tamaño de cada cosecha:

Cosecha	*Máximo número de acres*
C_1	50
C_2	125
C_3	225

En términos de lo que se desea, la Fertile Farms cree que su ganancia variará con la cosecha y la parcela debido a las variaciones en las condiciones del suelo. Se han estimado las siguientes ganancias por acre para cada combinación:

	Cosecha		
Parcela	C_1	C_2	C_3
P_1	87	89	91
P_2	94	92	88
P_3	92	89	91

Con el método del transporte determínese qué cosechas se deben plantar en cada parcela.

10-18 La Miscellaneous Products Company tiene dos almacenes que surten sus cinco depósitos de mayoreo. Los almacenes operan ahora al 100% de su capacidad, la Miscellaneous planea abrir un tercer almacén para proveer el 50% esperado de aumento en las ventas en cada depósito durante los próximos tres años. La situación actual es:

Almacén	*Capacidad*	*Depósito*	*Demanda*
A	120	1	50
B	160	2	100
		3	30
		4	40
		5	60

Costos de transporte

	A				
De	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
A	5	8	4	6	2
B	3	4	9	5	6

Se están considerando dos localizaciones para el nuevo almacén. Los costos de transporte a cada depósito son los siguientes:

	A				
De	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
L_1	7	5	3	8	2
L_2	2	8	3	7	5

Suponiendo que los costos de transporte son el único factor, ¿qué localización debe elegir la Miscellaneous para su nuevo almacén? (No se olvide el 50% de aumento en las ventas.)

El método de asignación

10-19 Con el método de asignación resuélvase el siguiente problema:

	1	2	3	4
A	3	5	3	3
B	5	14	10	10
C	12	6	19	17
D	2	17	10	12

a ¿Cuál es la asignación óptima?
b ¿Cuál es el costo total?
c ¿Son posibles otras asignaciones óptimas? Si es así, ¿cuáles son?

10-20 Encuéntrese la asignación óptima para el siguiente problema:

	D_1	D_2	D_3
S_1	26	6	−4
S_2	11	17	−1
S_3	3	−2	18
S_4	12	3	−5

10-21 Con el método de asignación encuéntrese la asignación *máxima,* dados los siguientes datos:

	Metro	Gramo	Litro	Hora
Cuarto	32	50	40	24
Yarda	60	28	52	40
Libra	45	60	35	50
Minuto	55	35	45	58

10-22 Cuatro personas acaban de terminar el curso de ventas de la compañía y se les va asignar a cuatro distritos diferentes. Basándose en su experiencia, actuación en el curso, conocimiento del producto y los clientes potenciales, la administración ha hecho estimaciones del éxito esperado de cada uno en cada distrito. Las estimador es en la escala del 1 (bajo) al 10 (máximo) son:

	Distrito			
Persona	*Norte*	*Este*	*Sur*	*Oeste*
A	7	9	10	9
B	8	7	9	9
C	7	10	9	8
D	6	8	8	7

Si el objetivo es maximizar las estimaciones totales, ¿quién debe asignarse a qué distrito? ¿Son posibles otras asignaciones óptimas?

10-23 El vicepresidente de administración de productos tiene que asignar cuatro nuevos productos a los gerentes de producto. Para mantener la carga de trabajo balanceada se asigna cada producto a una persona distinta. Se dispone de cinco gerentes de producto. El vicepresidente ha estimado, en términos de porcentajes, la medida en que cada producto se compara con los otros productos y la experiencia de los gerentes de producto. En seguida se muestran estas estimaciones:

	Gerente de producto				
Producto	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*
1	70	50	90	60	70
2	10	40	80	80	90
3	80	60	90	80	50
4	60	90	70	80	80

¿Cómo se debe hacer la asignación?

10-24 El decano del colegio de administración ha encontrado una manera sencilla de determinar qué personal académico debe enseñar los cursos que ofrece el colegio. Asigna cinco profesores para cada uno de los cinco diferentes cursos por un período de un año. Los estudiantes evalúan cada clase. Entonces asignan profesores a cursos de manera que se maximice el beneplácito de los estudiantes. Las evaluaciones recibidas durante el año de rotación (basadas en el promedio compuesto de ocho preguntas) fueron:

	Curso				
Profesor	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Jones	4.2	3.6	3.8	4.5	3.5
Doe	2.8	3.2	2.6	3.5	2.5
Smith	3.8	2.5	4.6	3.5	3.0
Thomas	3.5	4.2	4.3	3.8	4.3
Richards	4.3	4.2	4.0	4.2	4.3

a Con el método de asignación asígnense profesores a cursos de manera que se maximice el beneplácito de los estudiantes.

b Cuando se puso en duda el enfoque del decano a la asignación de profesores, respondió: "Sé que no está bien, pero parece razonable" ¿Es este enfoque, razonable?

10-25 La compañía de seguros We'll Try Anything piensa que las llamadas de larga distancia impresionan más a los clientes potenciales que las llamadas locales. De acuerdo con esto, la compañía planea llamar por larga distancia a clientes potenciales en cuatro ciudades. Los que llaman estarán en esas mismas cuatro ciudades. Para balancear la carga de trabajo, cada ciudad que llama sólo hará llamadas a otra ciudad. Supóngase que se hará un número igual de llamadas a cada ciudad y que las tarifas telefónicas son las que se dan a continuación. ¿Qué ciudad debe llamar a cuál para minimizar el costo?

Tarifas telefónicas

	A			
De	*Miami*	*Chicago*	*NY*	*LA*
Miami	——	$1.75	$1.50	$2.75
Chicago	$1.75	——	$1.50	$2.25
New York	$1.50	$1.50	——	$3.00
Los Angeles	$2.75	$2.25	$3.00	——

ESTUDIO DE UN CASO: YOU-DRIVE TRUCK RENTAL COMPANY

La You-Drive Truck Rental Company renta camiones de carga a negocios y a particulares por contrato de tiempo, para viajes redondos y para viajes sencillos. La compañía tiene muchas oficinas de renta en todo el país, igual que talleres regionales para mantenimiento y reparación.

Debido a la dinámica de la renta de camiones, con frecuencia se tienen que hacer ajustes en los camiones disponibles para satisfacer la demanda. La mayoría se maneja regionalmente. Sin embargo, los camiones tienden a seguir los patrones de migración de la gente; así es necesario hacer traslados periódicos desde los puntos en que hay exceso a los puntos en que hay faltantes.

Está por llegar uno de los periodos de traslado para la You-Drive. La firma pone anuncios en los periódicos de las universidades solicitando choferes, en las localidades que tienen exceso de camiones. Paga a los choferes $0.25 por milla. Además, estima que los costos por depreciación, gasolina y aceite suman $0.15 por milla. En seguida se muestra el estado de 21 ciudades claves:

Ciudad	*Estado (camiones)*	*Ciudad*	*Estado (camiones)*
Albuquerque, N. Mex.	+5	Houston, Tex.	+20
Atlanta, Ga.	+15	Los Angeles, Calif.	−10
Baltimore, Md	−20	Miami, Fla.	+35
Boston, Mass.	−15	New York, N.Y.	−30
Chalotte, N.C.	+5	Philadelphia, Pa.	−15
Chicago, Ill.	−25	Phoenix, Ariz.	+20
Cleveland, Ohio	−18	Richmond, Va.	+7
Dallas, Tex.	−5	Tampa, Fla.	+14
Daytona Beach, Fla	+8	Toledo, Ohio	−15
Denver, Colo.	+12	Washington, D.C.	+12
Detroit, Mich.	−12		

Al mismo tiempo, la compañía planea recibir un pedido de 20 camiones nuevos en Detroit, Michigan. Estos también se considerarán disponibles para satisfacer la demanda.

Preguntas

a ¿Pueden usarse los métodos de este capítulo en este caso?
b ¿Cuál debe ser el objetivo de la You-Drive al decidir qué camiones deben trasladarse?
c ¿Qué datos se necesitan para resolver este problema?
d Reúnanse los datos necesarios y recomiéndese un plan de traslado.
e ¿Qué factores se han dejado fuera del análisis que pueden afectar el plan final?

BIBLIOGRAFÍA

Primeras contribuciones

Chames, A. y W. W. Cooper: The Stepping Stone Method of Explaining linear Programming Calculatíons in Transportation Problems", *Management Science,* vol. 1 (octubre 1954)

Dantzig, George B.: *Linear Programming Extensions* (Princeton, N. J.: Princeton University, 1963).

Hitchcock, F. L.: "The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities", *Journal of Mathematics and Physics,* vol. 20 (1941), pp. 224-230.

König, D.: *Theorie der Endlichen and Unendlichen Graphen* (New York: Chelson, 1950).

Reinfield, Nyles V. y William R. Vogel: *Mathematical Programming* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1958).

Otros tratamientos

Hartley, Ronald V.: *Operations Research: A Managerial Emphasis* (Pacific Palisades, Calif.: Goodyear, 1976).

Hillier, F. S. y G. J. Lieberman: *Introduction to Operations Research,* 2ª edición (San Francisco: Holden-Day, 1974).

Loomba, N. Paul: *Linear Programming* (New York: McGraw-Hill, 1964).

Trueman, Richard *E.:An Introduction to Quantitative Methods for Decision Making,* 2ª edición (New York: Holt, 1977).

Aplicaciones

Aarvik, Oddmund y Paul Randolph: "The Application of Linear Programming to the Determination of Transmission Fees in an Electrical Power Network", *Interfaces,* vol. 6, núm. 1 (noviembre 1975), pp. 45-49.

Holladay, J.: Some Transportation Problems and Techniques for Solving Them, *Naval Research Logistics Ouarterly,* vol. 11 (1974)

Lyon, Herbert L., John M. Ivancevich y James H. Donnelly, Jr.: *Management Science in Organizatíons* (Pacific Palisades, Calif.: Goodyear, 1976).

Machol, R. E.: "An Application of the Assignment Problem", *Operations Research,* vol. 18 (1970).

Marklund, Robert E.: "Analyzing Multi-Commodity Distribution Networks Having Milling-in-Transit Features", *Management Science,* vol. 21, núm. 12 (agosto 1975), pp. 1405-1416

11

CADENAS DE EVENTOS: ANÁLISIS DE MARKOV

Es un tipo de memoria pobre que sólo trabaja hacia atrás.

Lewis Carroll
Through the Looking Glass

Dónde te pares depende de dónde estabas sentado.

Anónimo

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje
Descripción de una cadena de Markov
  Probabilidades de transición
Cálculo de las probabilidades de transición
  Ejercicio de práctica (11-1)
Cálculo de las probabilidades de estado estable
  Método de la suma de flujos
  Aplicación a la administración: cambio de marca
  Ejercicio de práctica (11-2)
  Método de la ecuación matricial
  Ejercicio de práctica (11-3)
Casos especiales
  Cadenas cíclicas
  Cadenas absorbentes
  Aplicación de la administración: Concesión por deudores morosos
  Ejercicio de práctica (11-4)
Aplicación a la administración: planeación de personal
Experiencias del mundo real
Resumen
Ejercicios
Estudio de un caso: Archie's Quarks
Bibliografía

Una cadena de Markov es una serie de eventos, en la cual la probabilidad de que ocurra un evento depende del evento inmediato anterior. En efecto, las cadenas de este tipo tienen memoria. "Recuerdan" el último evento y esto condiciona las posibilidades de los eventos futuros. Esta dependencia del evento anterior distingue a las cadenas de Markov de las series de eventos independientes, como tirar una moneda al aire o un dado.

El juego de blackjack es un ejemplo en el que el pasado condiciona al futuro. Conforme se van jugando las cartas, las probabilidades en las siguientes manos se van modificando. Las posibilidades en el juego dependen del estado o las condiciones en que se encuentre el monte. Lo mismo es cierto para el pócker, cuando se juegan abiertas algunas cartas. Nadie apostaría a una carta cuando otro jugador la tiene.

En los negocios, las cadenas de Markov se han utilizado para analizar los patrones de compra de los consumidores, para pronosticar las concesiones por deudores morosos, para planear las necesidades de personal y para analizar el reemplazo de equipo. Aunque no es una herramienta que se use mucho, el análisis de Markov puede proporcionar información importante cuando es aplicable.

El análisis de Markov, llamado así en honor de un matemático ruso que desarrollo el método en 1907, permite encontrar la probabilidad de que un sistema se encuentre en un estado en particular en un momento dado. Más importante aún, permite encontrar el promedio a la larga o las probabilidades de estado estable para cada estado. Con esta información se puede predecir el comportamiento del sistema a través del tiempo.

En este capítulo se analizar por separado la teoría y las aplicaciones, pues estas últimas son muy variadas. En este sentido, el análisis de Markov es similar a la programación lineal (PL), aunque no se usa tanto. La tarea más difícil es reconocer cuándo puede aplicarse. La característica más importante que hay que buscar es la memoria de un evento a otro.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Los objetivos para este capítulo son aprender:

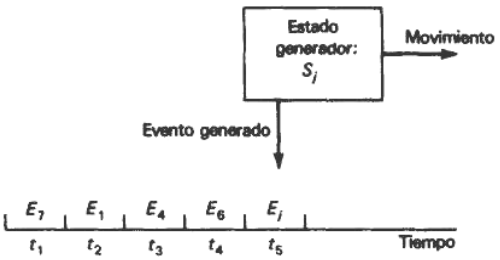
1 Cómo reconocer una cadena de Markov
2 Cómo describir una cadena de Markov usando una matriz de transición o un diagrama de estados.
3 Cómo calcular las probabilidades de estado transitorio.
4 Cómo calcular las probabilidades de estado estable usando el método de la suma de flujos o el método de las ecuaciones matriciales.
5 Cómo aplicar análisis de Markov a comercialización, a contabilidad y a planeación de personal.
6 El significado de los siguientes términos:

Cadena de Markov	Estado estable
Matriz de transición	Cadena absorbente
Diagrama de estados	Cadena cíclica

DESCRIPCIÓN DE UNA CADENA DE MARKOV

En la figura 11-1 se muestra el proceso para generar una cadena de Markov. El generador de Markov produce uno de n eventos posibles, E_j, donde $j = 1, 2, \ldots, n$, a intervalos discretos de tiempo (que no tienen que ser iguales). Las probabilidades de ocurrencia para cada uno de estos eventos dependen del *estado* del generador. Este estado se describe por el último

FIGURA 11-1
Generador de Markov.



evento generado. En la figura 11-1, el último evento generado fue E_i de manera que el generador se encuentra en el estado S_j.

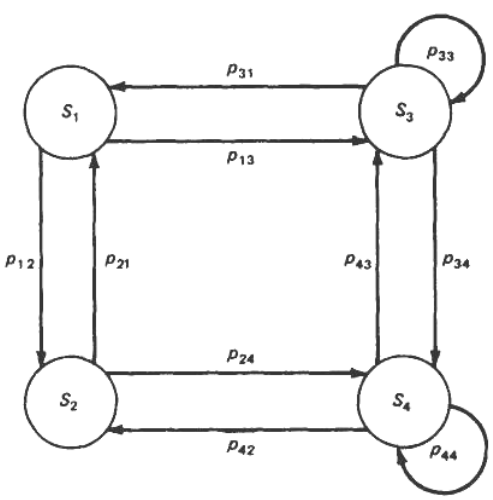
La probabilidad de que E_k sea el siguiente evento generado es una piobabilidad condicional: $P(E_k/S_i)$. Esto se llama probabilidad de *transición* del estado S_i al estado E_k. Para describir completamente una cadena de Markov es necesario saber el estado actual y todas las probabilidades de transición.

En esta sección se presentan dos formas fáciles de exponer las probabilidades de transición.

Probabilidades de transición

Una forma para describir una cadena de Markov es con un *diagrama de estados,* como el que se muestra en la figura 11-2. En ésta se ilustra un sistema de Markov con cuatro estados posibles: S_1, S_2, S_3 y S_4. La probabilidad condicional o de *transición* de moverse de un estado a otro se indica en el diagrama. Para simplificar la notación se usan subíndices para el estado actual y el siguiente. Es decir, $p_{14} = P(S_4/S_1)$. Las flechas muestran las trayectorias de transición que son posibles. Nótese que no aparecen algunas trayectorias como la de S_2 a S_3. Su ausencia significa que esas trayectorias tienen probabilidad de ocurrencia igual que cero.

FIGURA 11-2
Un diagrama de estados.



Otro método para exhibir las probabilidades de transición es usar una *matriz de transición.* La matriz de transición para el ejemplo del diagrama de estados se muestra en la tabal 11-1. Nótese que, como existen cuatro estados posibles, se necesitan 4 x 4 = 16 probabilidades. También nótese que cada *renglón* de la matriz suma 1. Esto se debe a que el sistema debe hacer una transición.

TABLA 11-1
Una matriz de transición

		A: S_1	S_2	S_3	S_4	Total
De:	S_1	0	p_{12}	p_{13}	0	1
	S_2	p_{21}	0	0	p_{24}	1
	S_3	p_{31}	0	p_{33}	p_{34}	1
	S_4	0	p_{42}	p_{43}	p_{44}	1

Las probabilidades de transición son datos para el análisis. Se deben conocer, no existe manera de derivarlas. En algunas aplicaciones esto puede ser una limitación.

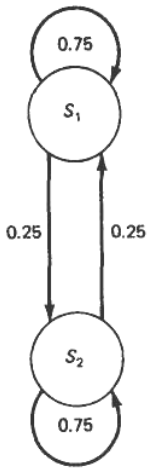
CALCULO DE LAS PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

Ahora que se sabe cómo presentar los datos, ¿qué puede hacerse? Un análisis útil es pronosticar el estado del sistema después de 1, 2, 3 o más periodos. Esto se llama análisis de *transición,* debido a que es a corto plazo y está enfocado a periodos cortos.

Considérese la cadena de Markov que se describe en la figura 11-3. Esta podría representar una copiadora de oficina, poco segura. Si está funcionando un día, existe un 75% de posibilidades de que al día siguiente funcione y un 25% de posibilidades de que no funcione. Pero si no está funcionando, hay 75% de posibilidades de que tampoco funcione al día siguiente y sólo un 25% de que si lo haga (se lleva mucho tiempo la reparación).

Para comenzar un análisis de transición, se deben conocer el estado actual. Supóngase que se está comenzando y que hay 75% de posibilidades de estar en el estado 1 y 25 % de estar en el estado 2. Esto define el estado actual en forma probabilista. ¿Cuál es la probabilidad de estar en el estado 1 al día siguiente? Si se comienza en el estado 1 hay 75 % de posibilidades de seguir ahí. Si se comienza en el estado 2, sólo hay 25 % de cambiar el estado 1. Así:

FIGURA 11-3
Un ejemplo de dos estados.



A:

De:	S_1	S_2
S_1	0.75	0.25
S_2	0.25	0.75

$$P(S_1) = P(\text{comiénceseS}_1)p_{11}P(\text{comiénceseS}_2)p_{21}$$
$$= (0.75)(0.75) + (0.25)(0.25)$$
$$= 0.625$$

Como sólo hay dos estados, entonces $P(S_2) = 0.375$.

Después de dos días:

$$P(S_1) = 0.625p_{11} + 0.375p_{21}$$
$$= 0.625(0.75) + 0.375(0.25)$$
$$= 0.567$$

Este método para hacer cálculos puede representarse por un diagrama de árbol, como se muestra en la figura 11-4. Como puede observarse, la copiadora no es muy segura. Los resultados de los primeros cuatro días son:

	$P(S_1)$	$P(S_2)$
Inicio	0.75	0.25
1	0.625	0.375
2	0.567	0.433
3	0.531	0.469
4	0.516	0.484

En los sistemas con más estados, los cálculos se vuelven más largos, pero el procedimiento es el mismo. Considérese el sistema de tres estados que se, muestra en la figura 11-5. Supóngase que el sistema se encuentra en el estado S_1. En el diagrama puede observarse que para el siguiente ciclo:

$$P(S_1) = p_{11} = 0.4$$
$$P(S_2) = p_{12} = 0.3$$
$$P(S_3) = p_{13} = 0.3$$

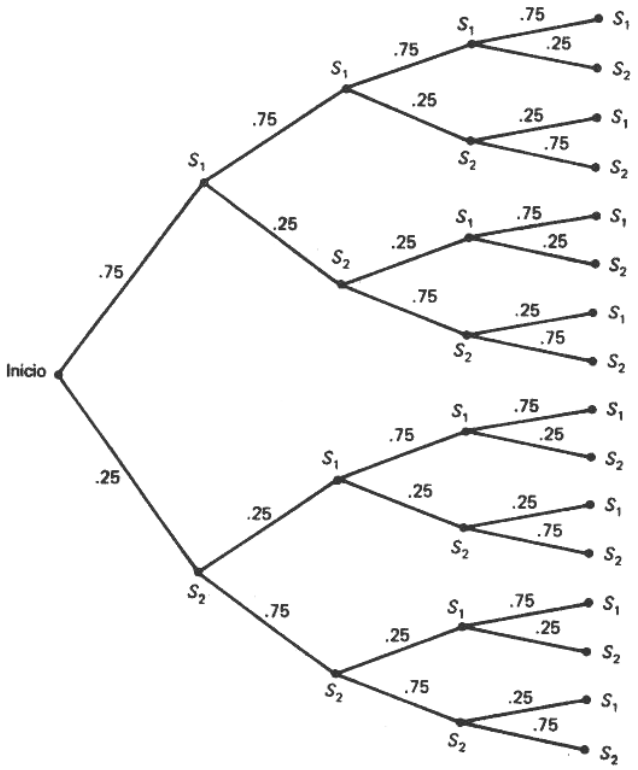


FIGURA 11-4
Diagrama de árbol.

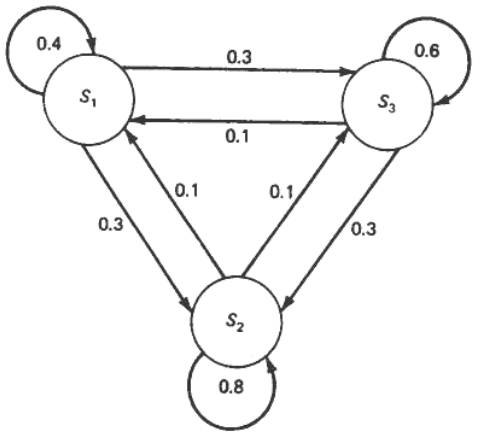


FIGURA 11-5
Un ejemplo de tres estados.

Para el segundo ciclo:

$$P(S_1) = 0.4p_{11} + 0.3p_{21} + 0.3p_{31}$$
$$= 0.4(0.4) + 0.3(0.1) + 0.3(0.1)$$
$$= 0.22$$

$$P(S_2) = 0.4p_{12} + 0.3p_{22} + 0.3p_{32}$$
$$= 0.4(0.3) + 0.3(0.8) + 0.3(0.3)$$
$$= 0.45$$
$$P(S_3) = 0.4p_{13} + 0.3p_{23} + 0.3p_{33}$$
$$= 0.4(0.3) + 0.3(0.1) + 0.3(0.6)$$
$$= 0.33$$

Por supuesto, como el sistema se debe encontrar en algún estado, sólo es necesario calcular dos de estas probabilidades y la tercera puede encontrarse con la siguiente relación:

$$P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) = 1$$

Los resultados para los primeros cuatro ciclos son:

Inicio	$P(S_1)$	$P(S_2)$	$P(S_3)$
1	0.4	0.3	0.3
2	0.22	0.45	0.33
3	0.166	0.53	0.304
4	0.15	0.565	0.285
5	0.145	0.58	0.275

Con este análisis puede encontrarse la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado determinado en cualquier periodo futuro. Más adelante se explicará el análisis de transición.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 11 -1

Dada la cadena de Markov siguiente:

		A	
		S_1	S_2
De:	S_1	0.6	0.4
	S_2	0.2	0.8

a Dibújese el diagrama de estados.
b Si el sistema se encuentra en el estado 1, encuéntrense las probabilidades de transición para los cuatro ciclos siguientes.

CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES DE ESTADO ESTABLE

Las cadenas de Markov poseen una propiedad notable en cuanto a que tienden a aproximarse a lo que se llama *estado estable.* Considérense los dos ejemplos anteriores de análisis de transición. En el sistema de dos estados, $P(S_1)$ resultó ser 0.75 al principio y después 0.625, 0.567, 0.531 *y*

0.516. Estas probabilidades se mueven hacia un límite. En forma análoga, en el sistema de tres estados puede observarse que $P(S_2)$, por ejemplo, adquiere los valores 0.3, 0.45, 0.53, 0.565 y 0.58. Después de unos cuantos ciclos nada más, las probabilidades de estado comienzan a asentarse o estabilizarse. Cuando una cadena de Markov ha llegado lo suficientemente lejos como para estar cerca de estos límites, se dice que ha alcanzado un estado estable. Además, estos límites son los mismos, independientemente del punto de partida del sistema.

Es importante hacer notar que la existencia de una condición de estado estable es una propiedad *adicional* de las cadenas de Markov. De ninguna manera afecta las probabilidades de transición o la dependencia de cada estado en el estado anterior. Los límites de estado estable se refieren sólo al porcentaje de tiempo a largo plazo que el sistema se encontrará en cada estado particular.

En la mayoría de las aplicaciones el estado estable tiene una gran importancia, esto puede apreciarse más adelante. En esta sección se describen dos métodos para determinar estos límites y se presenta una aplicación a comercialización.

Método de la suma de flujos

Este método está basado en el concepto de que todo lo que entra debe salir. El diagrama de estados se usa para presentar los flujos. En la figura 11-6 se muestra de nuevo el ejemplo anterior de dos estados. Para cada estado puede escribirse una ecuación tal que para el estado *k* se cumpla:

$$\sum_{\text{toda } i \neq k} p_{ik} P(S_i) = \sum_{\text{toda } i \neq k} p_{ik} P(S_k)$$

Esta ecuación se ve peor de lo que en realidad es. Observando el estado S, en la figura 11-6, póngase atención sólo en las flechas entre los estados. Para los flujos que llegan, se tiene

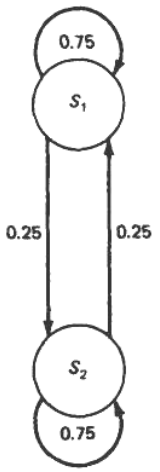


FIGURA 41-6
El ejemplo de dos estadas.

$$\sum_{\text{toda } i \neq k} p_{ik}P(S_i) = p_{21}P(S_2) = 0.25P(S_2)$$

Para los flujos que salen, se suman las probabilidades de transición a todos los otros estados. En este caso sólo hay una, 0.25. Así, la ecuación para S_1 es

$$0.25P(S_2) = 0.25P(S_1)$$

De igual manera, el flujo hacia adentro para el estado S_2 es $0.25P(S_1)$ y el flujo hacia afuera es $0.25P(S_2)$. Esto da para S_2

$$0.25P(S_1) = 0.25P(S_2)$$

El hecho de que estas dos ecuaciones sean iguales es una coincidencia. Pero no son independientes; así, se necesita una relación más:

$$P(S_1) = P(S_2) = 1$$

Esto proporciona tres ecuaciones con dos incógnitas que pueden resolverse por eliminación. El resultado es

$$P(S_1) = P(S_2) = 0.5$$

El procedimiento no cambia en los sistemas con más estados. Considérese el ejemplo de tres estados que se dio antes y que se muestra en la figura 11-7. Para el estado S_1 se tiene

$$0.1P(S_2) + 0.1P(S_3) = (0.3 + 0.3)P(S_1)$$

Para el estado S_2

$$0.3P(S_1) + 0.3P(S_3) = (0.1 + 0.1)P(S_2)$$

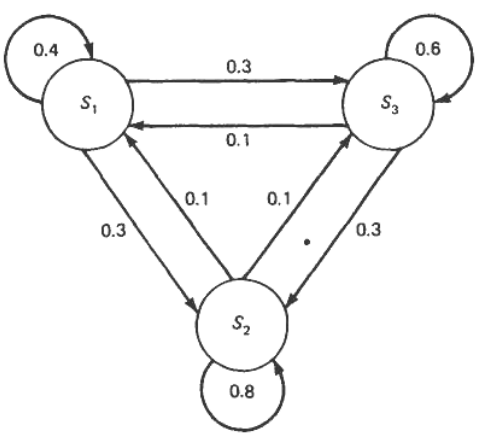


FIGURA 11-7
El ejemplo de tres estados.

y para el estado S_3

$$0.3P(S_1) + 0.1P(S_2) = (0.1 + 0.3)P(S_3)$$

Al poner esto todo junto se tienen cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} -0.6P(S_1) + 0.1P(S_2) + 0.1\,P(S_3) &= 0 \\ 0.3P(S_1) - 0.2P(S_2) + 0.3\,P(S_3) &= 0 \\ 0.3P(S_1) + 0.1P(S_2) - 0.4\,P(S_3) &= 0 \\ P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) &= 1 \end{aligned}$$

Cuando se resuelve un conjunto de ecuaciones como éste, la última ecuación no puede eliminarse. Si se usan sólo las primeras tres, al final se tendrá una identidad ya que no son independientes. Una manera de resolverlas es por eliminación. Se despeja $P(S_1)$ en la primera ecuación y después se sustituye el resultado en las últimas dos:

$$\begin{aligned} P(S_1) &= {}^1/_6\,P(S_2) + {}^1/_6P(S_3) \\ 0.3[{}^1/_6P(S_2) + {}^1/_6P(S_3)] + 0.1P(S_2) - 0.4P(S_3) &= 0 \\ [{}^1/_6P(S_2) + {}^1/_6P(S_3)] + P(S_2) + P(S_3) &= 1 \end{aligned}$$

Sumando términos semejantes, resultan dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} 0.15P(S_2) - 0.35P(S_3) &= 0 \\ 1.17P(S_2) + 1.17P(S_3) &= 1 \end{aligned}$$

Después puede eliminarse $P(S_3)$ multiplicando la primera ecuación por 1.17/0.35 y sumando las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1.17/0.35)(0.15)P(S_2) - 1.17P(S_3) &= 0 \\ 1.17P(S_2) + 1.17P(S_3) &= 1 \\ \hline 1.67P(S_2) &= 1 \\ P(S_2) &= 0.6 \end{aligned}$$

Con este resultado se encuentra $P(S_3)$:

$$\begin{aligned} 1.17(0.6) + 1.17P(S_3) &= 1 \\ P(S_3) &= 0.26 \end{aligned}$$

Por último, se sustituyen los valores en la ecuación de $P(S_1)$:

$$P(S_1) = {}^1/_6(0.6) + {}^1/_6(0.26) = 0.14$$

Según los resultados obtenidos en el análisis de transición, puede observarse que el sistema estaba cerca de estos límites después de sólo cinco ciclos.

Aplicación a la administración: cambio de marca

Las compras de los consumidores están influidas por la publicidad, el precio y muchos otros factores. Con frecuencia un factor clave es la ultime compra del consumidor. Si, por ejemplo, alguien compra un refrigerador marca Y y le da buen servicio, quedará predispuesto a comprar otro refrigerador marca Y. De hecho, una investigación de mercado puede determinar el grado de lealtad a la marca encuestando a los consumidores. Er términos de una cadena de Markov, los resultados de la investigación son las probabilidades de transición de seguir con la marca o de cambiar.

En la figura 11-8 se muestra un ejemplo de cadenas de Markov para el cambio de marca. En este ejemplo, la marca A es la marca de interés y la marca B representa todas las demás marcas. Los clientes son bastante leales, el 80% de ellos son clientes que repiten. La oposición conserva el 70% de sus clientes.

¿Qué información puede obtenerse con el análisis de Markov? Con el análisis de transición puede descubrirse qué tan probable es que un cliente cambie después de cierto número de ciclos. Pero el análisis de estado estable es el más útil. ¿Qué interpretación daría el lector al promedio a largo plazo de estar en cualquiera de los estados? ¡La de porcentajes de mercado! El promedio a la larga del estado A es el porcentaje de mercado que puede esperar recibir la marca A. Así, conociendo el grado de lealtad a la marca entre los clientes puede predecirse el porcentaje de mercado para el producto o servicio.

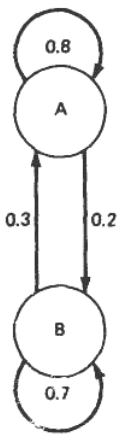
Las ecuaciones de estado estable para el ejemplo de la figura 11-8 son:

$$P(A) = 0.8P(A) + 0.3P(B)$$
$$P(B) = 0.2P(A) + 0.7P(B)$$
$$P(A) + P(B) = 1$$

La solución de este sistema es:

$$\mathbf{P(A) = 0.6}$$
$$\mathbf{P(B) = 0.4}$$

FIGURA 114
Cambio de marca.



	A: Marca A	A: Marca B
De: Marca A	0.8	0.2
Marca B	0.3	0.7

La marca A capturará a la larga el 60% del mercado y las otras marcas tendrán el 40%.

Esta información puede ser útil en muchas formas. Una de ellas es al evaluar las diferentes estrategias de publicidad. Esta publicidad puede estar dirigida a los clientes actuales en un esfuerzo para incrementar la lealtad a la marca. De otra manera, puede dirigirse a los compradores de otras marcas con el fin de persuadirlos para cambiar. ¿Cómo debe asignarse un presupuesto de publicidad entre estas dos alternativas? El análisis de Markov puede proporcionar una respuesta si se dispone de cierta información adicional. Por ejemplo, si cada incremento de un punto porcentual en el mercado aumenta las ganancias en $50 000, el presupuesto de publicidad es $100 000 y esto podría aumentar la lealtad a la marca a 85% *o* incrementar el cambio a la marca a un 35 %; el problema puede resolverse como sigue:

Si se dirige a los clientes de la marca A (véase la tabla ll-2*a*):

$$P(A) = 0.85P(A) + 0.3P(B)$$
$$P(B) = 0.15P(A) + 0.7P(B)$$
$$P(A) + P(B) = 1$$

Resolviendo:

$$P(A) = 0.75$$
$$P(B) = 0.25$$

Si se dirige a los otros compradores (véase la tabla 11-2*b*):

$$P(A) = 0.8P(A) + 0.35P(B)$$
$$P(B) = 0.2P(A) + 0.65P(B)$$
$$P(A) + P(B) = 1$$

Resolviendo:

$$P(A) = 0.64$$
$$P(B) = 0.36$$

El dirigir la publicidad a los clientes actuales traerá el mayor incremento en el porcentaje de mercado, 15 puntos. ¿Vale la pena? La ganancia sería 15 x $50 000 - $750 000 con un gasto de sólo $100 000. A cualquier publicista le gustarían esos resultados.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 11-2

Trátese de encontrar las probabilidades de estado estable con el método de la suma de flujos. Aplíquese éste a la cadena de Markov del ejercicio de práctica (11-1).

TABLA 11-2
La publicidad altera la matriz

(*a*) Anuncios dirigidos a los clientes de la

		A: Marca A	Marca B
De:	marca A	0.85	0.15
	Marca B	0.3	0.7

(*b*) Anuncios dirigidos a otros compradores

		A Marca A	Marca B
De:	Marca A	0.8	0.2
	Marca B	0.35	0.65

Método de las ecuaciones matriciales

Otro método para encontrar las probabilidades de estado estable utiliza la matriz de transición. Formalmente, se desarrolla un conjunto de n + 1 ecuaciones simultáneas en la forma:

$$P(S_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} P(S_i)$$

$$\sum_{i=j}^{n} P(S_j) = 1$$

La primera expresión proporciona una ecuación por cada columna de la matriz de transición.

Considérese el ejemplo de tres estados. En la tabla 11-3 se muestra la matriz de transición para este ejemplo. Para la primera columna puede escribirse:

TABLA 11-3
Matriz de transición para el ejemplo de tres estados

		A: S_1	S_2	S_3
De	S_1	0.4	0.3	0.3
	S_2	0.1	0.8	0.1
	S_3	0.1	0.3	0.6

$$P(S_1) = 0.4P(S_1) + 0.1P(S_2) + 0.1P(S_3)$$

Análogamente, para las otras dos columnas:

$$P(S_2) - 0.3P(S_1) + 0.8P(S_2) + 0.3P(S_3)$$
$$P(S_3) = 0.3P(S_1) + 0.1P(S_2) + 0.6P(S_3)$$

Por último se agrega la ecuación de la suma igual a 1:

$$P\&) + P\&) + p\&) = i$$

Si se pasan todas las variables al lado izquierdo de cada ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned} 0.6P(S_1) - 0.1P(S_2) - 0.1P(S_3) &= 0 \\ -0.3P(S_1) + 0.2P(S_2) - 0.3P(S_3) &= 0 \\ -0.3P(S_1) - 0.1P(S_2) + 0.4P(S_3) &= 0 \\ P(S_2 + P(S_2) + P(S_3) &= 1 \end{aligned}$$

A excepción de los signos cambiados en las primeras tres ecuaciones, éstas son idénticas a las relaciones que se encontraron con el método de la suma de flujos.

Entonces, lo que se presentó, fueron dos formas de escribir las ecuaciones necesarias, a partir del diagrama de estados o a partir de la matriz de transición. Ambos métodos proporcionan las mismas ecuaciones.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 14-3

Para el ejercicio de práctica 11-1, escríbanse las ecuaciones para encontrar las probabilidades de estado estable, con el enfoque de las ecuaciones matriciales. ¿Son éstas las mismas que se encontraron con la suma de flujos?

CASOS ESPECIALES

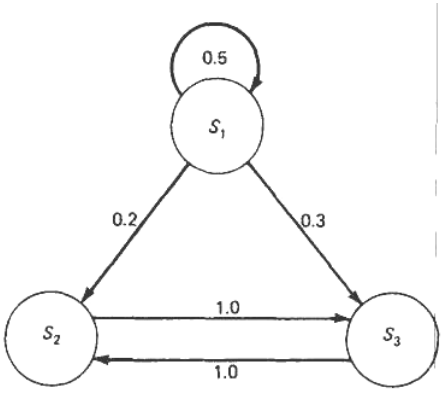
Pueden ocurrir dos casos especiales en cadenas de Markov. Uno se llama cadena *absorbente,* debido a que el sistema se bloquea en un estado y nunca se mueve de ahí, de hecho ese estado "absorbe" a la cadena. El otro caso es el de una cadena *cíclica.* Como el nombre lo dice, el sistema entra en un ciclo entre ciertos estados siguiendo un patrón fijo. Cuando esto sucede, la cadena se convierte en determinista en lugar de probabilista. En esta sección se analizará cómo reconocer estas dos condiciones y cómo analizarlas. Además se describirá una aplicación contable.

Cadenas cíclicas

Una cadena cíclica es la que se repite de manera determinista. En la figura 11-9 se ilustra un ejemplo. Puede reconocerse una cadena cíclica en una

FIGURA 11-9
Una cadena cíclica

De:	A: S_1	S_2	S_3
S_1	0.5	0.2	0.3
S_2	0	0	1
S_3	0	1	0



matriz de transición por la presencia de un patrón de unos en dos o más renglones (un solo renglón no la haría cíclica). El patrón debe ser una trayectoria cerrada entre los estados del ciclo y no puede incluir ningún estado que no esté en él. En la matriz de transición puede observarse que S_2 siempre se mueve a S_3 y que S_3 siempre va a S_2, cerrando el ciclo. Esto queda bastante claro en el diagrama de estados. Es necesaria una condición más: debe ser posible entrar en el ciclo.

El análisis de cadenas cíclicas es limitado. Con el análisis de transición puede conocerse cuál es la probabilidad de entrar en el ciclo en un número dado de transiciones. A la larga o en el estado estable, el sistema será cíclico y pasará el mismo tiempo en cada uno de los estados del ciclo. Sólo es necesario conocer el estado del generador en cualquier tiempo dado pitra predecir todos los estados futuros.

El ciclado es común en algunas operaciones de máquinas, en ciertas funciones matemáticas y en algunos sistemas administrativos. Muy rara vez se aplica el análisis de Markov a estos casos, ya que su estudio es muy sencillo. Se deben conocer las cadenas cíclicas para poder reconocerlas y corregirlas (si es que hay un error) o realizar un análisis apropiado.

Cadenas absorbentes

Para quedar clasificado como cadena absorbente, un sistema debe cumplir dos requisitos: debe tener un estado absorbente *y* debe poder alcanzar ese estado. Un estado absorbente es aquel del que no puede salirse. Esto puede observarse fácilmente en la matriz de transición, porque un estado absorbente tiene una probabilidad de transición hacia sí mismo de uno y de cero hacia todos los demás estados, es decir, $p_{ii} = 1$. En la tabla 11-4 se muestra un ejemplo. Los estados S_2 y S_4 son estados absorbentes. En la administración, los estados absorbentes incluyen el pago de una nota, el que un empleado deje de serlo, la terminación de un contrato y la venta de un activo fijo.

El análisis de transición de una cadena absorbente sigue el mismo procedimiento analizado. Sin embargo, el análisis de estado estable es diferente. Si el sistema tiene sólo un estado absorbente, se sabe que finalmente

TABLA 11-4
Una cadena con dos estados absorbentes

		A: S_1	S_2	S_3	S_4
De:	S_1	0.4	0.3	0.2	0.1
	S_2	0	1	0	0
	S_3	0.1	0.1	0.6	0.2
	S_4	0	0	0	1

el sistema se encerrará en ese estado. Pero, ¿qué pasa si el sistema tiene dos o más estados absorbentes? Puede ser de interés encontrar la probabilidad de terminar en cada uno de ellos.

Considérese el ejemplo que se muestra en la tabla 11-4. Dos estados, el S_2 y el S_4, son absorbentes y ambos pueden alcanzarse desde cualquiera de los estados no absorbentes. La probabilidad de terminar en S_2 o en S_4 depende del punto de partida. Es obvio que, si el sistema comienza en un estado absorbente, nunca saldrá de ahí. Entonces, sólo se tiene interés cuando se comienza en un estado que no es absorbente. Puede definirse una probabilidad P_{ik} como la probabilidad de terminar en el estado absorbente k, dado que el sistema comienza en el estado no absorbente i. Si se encuentran estas probabilidades para todos los estados no absorbentes y un estado absorbente en particular, deben sumar uno:

$$\sum_{\text{toda } i} P_{ik} = 1 \quad \text{para cada } k$$

Pero esto no es suficiente para resolver el problema. Se necesita otra relación. Esta es, sin demostración, para cada combinación i y k:

$$(1 - p_{ii})P_{ik} = p_{ik} + \sum_{\text{toda } j \neq i} p_{ij}P_{jk}$$

en donde $P_{jk} = 0$ si j es un estado absorbente.

Esta fórmula parece más complicada de lo que es. Se aplicará al ejemplo de la tabla 11-4. Existen cuatro combinaciones de interés: de S_1 a S_2, de S_1 a S_4, de S_3 a S_2 y de S_3 a S_4. Comenzando con la primera, de S_1 a S_2, se tiene:

$$\begin{aligned}(1 - p_{11})P_{12} &= p_{12} + \sum_{\text{toda } j \neq 1} p_{1j}P_{j2} \\ &= p_{12} + p_{12}P_{22} + p_{13}P_{32} + p_{14}P_{12}\end{aligned}$$

Sustituyendo las probabilidades de transición y cero para P_{22} y p_{42}:

$$(1 - 0.4)P_{12} = 0.3 + (0.3)(0) + (0.2)P_{32} + (0.1)(0)$$

o

$$0.6P_{12} = 0.3 + 0.2P_{32}$$

La mejor manera de entender lo que está pasando es observar el diagrama de estados para el problema que se muestra en la figura 11-10. ¿Qué trayectorias pueden llevar la cadena de S_1 a S_2? Existen sólo dos. La trayectoria directa tiene una probabilidad de 0.3. La otra trayectoria va de S_1 a S_3 y después a S_2. La probabilidad de que esto ocurra es $0.2P_{32}$. Entonces, el lado derecho queda: $0.3 + 0.2P_{32}$. Pero esto es igual sólo al 60% de la probabilidad de moverse de S_1 a S_2, ya que el 40% del tiempo S_1 se quedará ahí mismo:

$$0.6P_{12} = 0.3 + 0.2P_{32}$$

Siguiendo con el ejemplo, para la segunda combinación, de S_1 a S_4, se tiene

$$0.6P_{14} = 0.1 + 0.2P_{34}$$

Para la tercera combinación, de S_3 a S_2,

$$0.4P_{32} = 0.1 + 0.1P_{12}$$

Y finalmente, para la de S_3 a S_4

$$0.4P_{34} = 0.2 + 0.1P_{14}$$

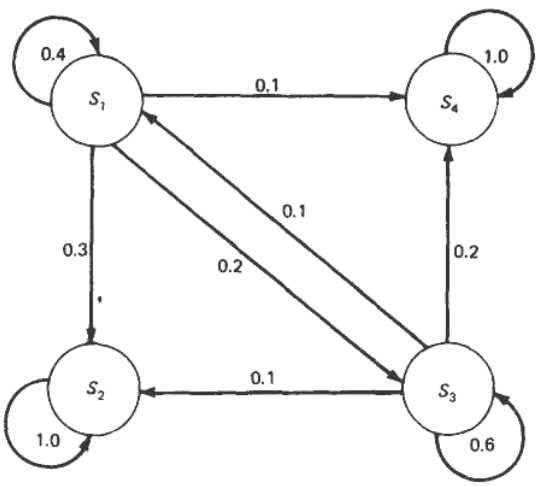


FIGURA 11-10
Diagrama de estados con estados absorbentes.

Reuniendo todo esto, se tienen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$0.6P_{12} = 0.3 + 0.2P_{32}$$
$$0.6P_{14} = 0.1 + 0.2P_{34}$$
$$0.4P_{32} = 0.1 + 0.1P_{12}$$
$$0.4P_{34} = 0.2 + 0.1P_{14}$$

En realidad, éstos son dos pares de ecuaciones con dos incógnitas, lo cual resulta sencillo de resolver. Si se usa la primera ecuación para sustituir P_{12} en la tercera,

$$0.4P_{32} = 0.1 + 0.1(0.5 + 0.33P_{32})$$

$$P_{32} = \frac{0.15}{0.367} = 0.41$$

Entonces

$$P_{12} = \frac{0.3 + 0.2(0.41)}{0.6} = 0.64$$

Análogamente, sustituyendo P_{14} de la primera ecuación en la cuarta:

$$0.4P_{34} = 0.2 + 0.1(0.167 + 0.33P_{34})$$

$$P_{34} = \frac{0.217}{0.367} = 0.59$$

y

$$P_{14} = \frac{0.1 + 0.2(0.59)}{0.6} = 0.36$$

Para verificar, se observa que:

$$P_{12} + P_{14} = 0.64 + 0.36 = 1$$
$$P_{32} + P_{34} = 0.41 + 0.59 = 1$$

¿Cuál es la probabilidad de terminar en S_2? ¿O en S_4? Eso depende de en dónde se inicia la cadena. Si comienza en S_1 existe un 64% de posibilidades de terminar en S_2, mientras que el inicio en S_3 da el 41 % de posibilidades de terminar en S_2. Para dar una respuesta más completa, se necesitan conocer las probabilidades de comenzar en S_1 o S_2. Por ejemplo, si se dice que existe un 40% de posibilidades de comenzar en S_1 y un 60% de comenzar en S_2, entonces:

$$P(\text{terminar en } S_2) = 0.4(0.64) + 0.6(0.41) = 0.50$$
$$P(\text{terminar en } S_4) = 0.4(0.36) + 0.6(0.59) = 0.50$$

En resumen, se debe saber cómo reconocer una cadena cíclica o una absorbente, porque cambian el método de análisis y afectan la información que se debe tener disponible.

Aplicación a la administración: concesión por deudores morosos

Los deudores morosos son un hecho en la vida de los negocios y una buena práctica contable exige que se tome en consideración una "cuenta dudosa". Un método sencillo para hacer esto es tomar un porcentaje directo de las cuentas por cobrar; por ejemplo 2%. Sin embargo, este método es débil, porque no considera la edad de esas cuentas por cobrar. El análisis de Markov toma en cuenta la edad.

Supóngase que un contralor proporciona, a través del análisis de cuentas por cobrar pasadas, los datos que se muestran en la tabla 11-5. Primero nótese que la matriz tiene dos estados absorbentes, Pagadas y Deudas morosas. El primer renglón de la matriz (0-30 días) muestra lo que comúnmente pasa con las cuentas que en este momento tienen un tiempo entre 0 y 30 días:

40% todavía será de 0-30 días el próximo mes y sin pagar
10% será de 31-90 días y sin pagar
50% se habrá pagado

TABLA 11-5
Matriz de transición para las cuentas por cobrar

		A (mes 2)			
		0-30 días	31-90 días	Pagadas	Deudas morosas
De:	0-30 días	0.4	0 1	0 5	0
	31-90 días	0.1	0.2	0.6	0.1
	Pagadas	0	0	1	0
	Deudas morosas	0	0	0	1

Balance de cuentas por cobrar:
0-30 días. $60 000
31-90 días $40 000

En este ejemplo, una cuenta no puede convertirse en morosa a menos que tenga más de 90 días.

El segundo renglón (31-90 días) muestra:

10 % se reclasificará a la categoría de 0-30 días, debido que el cliente incurre en cargos adicionales

20% seguirá siendo de 31-90 días
60% se pagará
10% quedará como de más de 90 días

Estas probabilidades de transición están basadas en la cantidad de *dólares* que se mueven de un estado a otro, no en el número de clientes o de cuentas. El objetivo en este análisis es estimar la concesión en dólares que debe hacerse por cuentas morosas para el próximo mes. En el sentido de Markov esto significa estimar la probabilidad de llegar al estado absorbente Deudas morosas. Puede estimarse esto escribiendo dos ecuaciones para pasar de los dos estados no absorbentes al de Deudas morosas:

$$0.6P(0\text{-}30)_{DM} = 0 + 0.1P(31\text{-}90)_{DM}$$
$$0.8P(31\text{-}90)_{DM} = 0.6 + 0.1P(0\text{-}30)_{DM}$$

Resolviendo por sustitución se tiene:

$$P(0\text{-}30)_{DM} = 0.021$$
$$P(0\text{-}90)_{DM} = 0.128$$

Entonces, 2.1% de las cuentas de 0 a 30 días por cobrar este mes terminará siendo cuentas morosas junto con el 12.8% de las cuentas por cobrar que actualmente tiene entre 31 y 90 días. ¿Cuál debe ser la concesión?

$$\text{Concesión por deudas morosas} = 60\,000(0.021) + 40\,000(0.128)$$
$$= \$6\,380$$

En este ejemplo, la firma necesita dirigir sus esfuerzos hacia el cobro de las cuentas de 31 a 90 días, ya que finalmente casi el 13 % de estas quedará sin pagar.

EJERCICIO DE PRÁCTICA i 1-4

A continuación se da una cadena absorbente, (*a*) Encuéntrese la probabilidad de terminar en cada uno de los estados absorbentes comenzando en cada uno de los estados no absorbentes, *(b)* Si los estados no absorbentes son igualmente probables, ¿cuál es la probabilidad de terminar en cada uno de los estados absorbentes?

De:	A			
	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	0.5	0.1	0.2	0.2
S_2	0.3	0.4	0.2	0.1
S_3	0	0	1	0
S_4	0	0	0	1

APLICACIÓN A LA ADMINISTRACIÓN: PLANEACIÓN DE PERSONAL

El análisis de transición puede ser útil al planear satisfacer las necesidades de personal. Muchas firmas emplean trabajadores de diferentes niveles de clasificación dentro de la misma categoría de trabajo. Esto es común para personal de confianza, oficinistas, obreros calificados, no calificados y personal profesional. La firma debe tener el número de empleados en cada nivel de clasificación para proporcionar la oportunidad de promoción adecuada, cumplir con las habilidades necesarias para el trabajo y controlar la nómina. Una planeación de personal a largo plazo apropiada requiere que se considere el movimiento de personas tanto hacia arriba en el escalafón de clasificación como hacia afuera de la organización. El análisis de Markov puede ayudar en este esfuerzo de planeación.

El movimiento de personal a otras clasificaciones puede considerarse como una cadena de Markov. Esto se ilustra en la figura 11-11. Se supone que hay tres clasificaciones; el grado 1 es la más baja. Además, los descensos se consideran raros y se omiten. El estado "salen" es absorbente, el cual incluye renuncias, ceses, despidos y muertes. Por supuesto, todos los empleados finalmente alcanzan este estado.

Las transiciones del grado 1 al grado 2 y del grado 2 al grado 3 representan promociones. Como transiciones de probabilidad, están controladas por la firma, puede establecerse el nivel que la firma determine que es necesario para cumplir sus objetivos. Como ejemplo, supóngase que la firma tiene en este momento 30 empleados del grado 3, 90 empleados del grado 2 y 300 empleados del grado 1 y que desea mantener este nivel de empleados durante el próximo año. Por experiencia, se espera que salga el 30% de los empleados de grado 1 al año, el 20% de los empleados de grado 2 y el 10 % de aquellos que están en el grado 3. Si la política es contratar sólo en los niveles de clasificación más bajos, ¿cuántos se deben contratar y cuántos se deben promover el siguiente año para mantener estables los niveles?

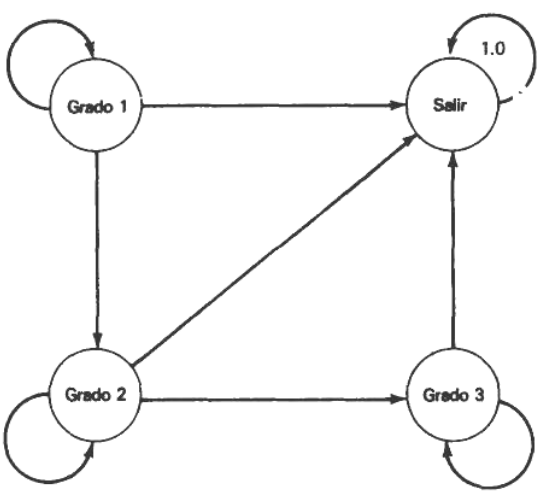


FIGURA 11-11
Planeación de personal.

Este problema puede resolverse sin el análisis de Markov, pero el modelo es útil para ayudar a conceptualizar el problema. Como se trata sólo de un ciclo, se usa el análisis de transición. En la figura 11-12 se muestra el diagrama parcial de estados que se necesita. El análisis comienza con el grado más alto. No se hacen promociones pero el 10%, o sea, 3, sale. Todos ellos deben reemplazarse por promociones del grado 2. En el nivel de clasificación, el 20% sale y se deben promover 3, con una pérdida de 21. Esto se debe compensar por promoción del grado 1. Al pasar al grado 1, el 30% sale y 21 deben promoverse, lo cual una pérdida total de 111. Por tanto, el siguiente año se deben contratar 111 empleados del nivel 1.

En este ejemplo se derivan algunas tasas de transición a partir de consideraciones externas. En algunas firmas, primero se establecen las tasas de promoción y el análisis de Markov se usa para explorar sus efectos en los niveles de clasificación. En cualquier caso, el uso de cadenas de Markov es una ayuda significativa en la planeación de personal.

EXPERIENCIAS DEL MUNDO REAL

La aplicación más notable de cadenas de Markov a la administración ha sido la del cambio de marca. Es evidente que es apropiado para el análisis de los porcentajes de mercado. Sin embargo, existen otras aplicaciones que han sido benéficas y la lista continúa creciendo. Aunque la técnica es antigua, no se conoció en realidad sino desde hace 20 años.

Ahora bien, estas aplicaciones no quedan exentas de crítica. Considérese el caso del cambio de marca. El análisis de Markov supone que:

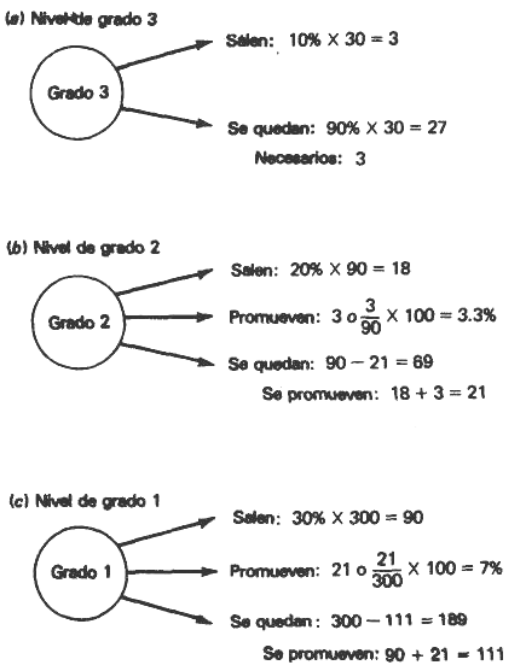


FIGURA 11-12
Análisis de los niveles de clasificación.

1 Las probabilidades de transición permanecen constantes.
2 Las transiciones tienen lugar en intervalos discretos de tiempo.
3 La memoria se remonta sólo al estado inmediatamente anterior.

La primera suposición será válida sólo para periodos cortos. La publicidad, la estación del año, las condiciones de la economía y las ventas especiales son, todos, factores que pueden influir en las preferidas del comprador.

La segunda suposición también puede atacarse ya que las compras tienen lugar en casi cada instante del día. Además, con frecuencia las compras se hacen en cantidades más que por unidades, como lo implica la segunda suposición.

La tercera suposición es, por cierto, literalmente incorrecta para la gente. Aun en compras más o menos pequeñas como pan o leche, la mayoría de los consumidores recordarán varias compras anteriores, no sólo la última. De hecho, el análisis de Markov puede ampliarse para permitir una memoria más larga. Este capítulo se ha limitado a las cadenas de Markov de una memoria o de *primer orden.* Pueden analizarse las cadenas de Markov de *segundo orden* o más en forma matemática, pero la complejidad crece rápidamente. La crítica básica de todas formas es válida, ya que se tendría qué especificar con exactitud cuántas de las compras anteriores influyen en la próxima compra.

A esta lista se podría agregar el hecho de que a veces es difícil obtener las probabilidades de transición. Tiene muy poco sentido gastar una "libra" para obtener datos cuando la aplicación del modelo significa un ahorro de sólo un "centavo".

Todas estas críticas son válidas hasta cierto punto. Pero ésta es una situación inherente al aplicar modelos a la vida real; los modelos son sólo aproximaciones. El valor de la información que se gana con el análisis *de,* Markov debe compararse con su costo. Los autores piensan que los conceptos de memoria, probabilidades de transición, estados y eventos consti - tuyen una aportación para comprender mejor el mundo.

RESUMEN

Las cadenas de Markov son una serie de eventos en que cada uno condiciona las posibilidades del evento siguiente. El sistema avanza de un estado a otro de acuerdo con estas probabilidades de transición o probabilidades condicionales. La memoria respecto del último evento identifica en forma única una cadena de Markov. Para definir por completo una cadena de Markov, se debe especificar el número de estados, las probabilidades de transición entre todos los estados y el estado actual del sistema. Las matrices de transición y los diagramas de estados se emplean para preser - tar estos datos.

El comportamiento transitorio o a corto plazo de una cadena de Markov puede analizarse con un diagrama de estados. Éste puede emplearse para predecir el estado del sistema después de un cierto número de ciclón. Al pasar los ciclos, las cadenas de Markov tienden hacia un estado estable. El estado estable representa las proporciones promedio que a la larga pasa

el sistema en cada estado. Estas proporciones promedio pueden calcularse con el método de la suma de flujos o el método de ecuaciones matriciales.

Dos casos especiales, las cadenas cíclicas y las cadenas absorbentes, son importantes para su efecto sobre el comportamiento del sistema. Las cadenas cíclicas se comportan en forma determinista. Las cadenas absorbentes ocurren con frecuencia en la administración. Como estas cadenas finalmente quedan bloqueadas en uno de estos estados, casi siempre es interesante conocer las posibilidades de que esto pase partiendo de diferentes estados.

Se examinan las aplicaciones a comercialización, contabilidad y planeación de personal para ilustrar el nivel de aplicación del análisis de Markov. Igual que con todos los métodos de este texto, deben compararse los costos que implica la recolección de los datos necesarios con los beneficios, anticipados antes de emprender una aplicación de cadenas de Markov.

EJERCICIOS

11-1 Para la siguiente matriz:

		A	
		A	*B*
De	*A*	0.7	0.3
	B	0.5	0.5

a Encuéntrense las probabilidades de estado estable con el enfoque de ecuaciones matriciales.
b Dibújese el diagrama de estados.
c Encuéntrense las probabilidades de estado estable con el enfoque de la suma de flujos.

11-2 En seguida se muestran las preferencias por dos marcas competidoras:

		A	
		Rojo	Azul
De	Rojo	0.6	0.4
	Azul	0.2	0.8

a Supóngase que se acaba de hacer una compra de Rojo. Calcúlese la probabilidad de que se compre Rojo las siguiente cinco veces.
b Dibújese el diagrama de estados.
c Encuéntrense las probabilidades de estado estable con el método de la suma de flujos.

11-3 Dada la siguiente matriz de tres estados:

De	A		
	A	*B*	*C*
A	0.6	0.2	0.2
B	0.1	0.5	0.4
C	0.2	0.1	0.7

a Encuéntrense las probabilidades para cinco ciclos suponiendo el inicio en el estado A.
b Dibújese el diagrama de estados.
c Encuéntrense las probabilidades de estado estable.

11-4 Una cadena de Markov tiene las siguientes probabilidades de transición:

De	A			
	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	0.5	0.3	0.1	0.1
S_2	0.3	0.4	0.1	0.2
S_3	0.1	0.2	0.6	0.1
S_4	0.1	0.3	0.1	0.5

a Sin hacer cálculos, ¿qué estado piensa el lector que se ocupará con más frecuencia?
b Encuéntrense las probabilidades de estado estable.

11-5 Encuéntrense las probabilidades de estado estable para la siguiente cadena de Markov:

De	A		
	S_1	S_2	S_3
S_1	0	1	0
S_2	0	0	1
S_3	1	0	0

11-6 La siguiente matriz incluye dos estados absorbentes:

De	A			
	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	0.2	0.4	0.3	0.1
S_2	0.1	0.6	0.2	0.1
S_3	0	0	1	0
S_4	0	0	0	1

a ¿Cuáles son los estados absorbentes?
b Para cada estado no absorbente encuéntrese la probabilidad de terminar en cada estado absorbente.

c Si los estados no absorbentes son igualmente probables, ¿qué proporción del tiempo terminará el sistema en cada uno de los estados absorbentes?

11-7 El departamento de comercialización de la marca X hizo una investigación y encontró que, si un cliente compra su marca, existe un 70% de posibilidades de que la compre de nuevo la próxima vez. Por otro lado, si la última compra fue de otra marca, entonces se escoge la marca X sólo el 20% del tiempo. Cuál es el porcentaje de mercado que puede pronosticarse a la larga para la marca X?

11-8 La Alpha Corp., al considerar sus estrategias de mercado, observa que sus propios clientes son bastante leales: 85 % compran de nuevo su producto. Sin embargo, sólo 10% de los clientes de la competencia se aventura a tratar con Alpha. El departamento de publicidad piensa que la lealtad de los clientes puede elevarse al 90% con una campaña especial dirigida a los clientes de la firma. De otra manera, podrían estructurarse los anunicios para comparar Alpha con sus competidores. Con esto puede esperarse elevar el cambio de marca del 10 al 20 %. En cualquier caso, la campaña de publicidad costaría $100 000 y redundaría en una contribución de $6 000 por cada punto ganado en el porcentaje de mercado.

a Antes de cualquier campaña publicitaria, ¿cuál es el porcentaje de mercado a favor de la Alpha Corporation?

b ¿Cuál es la estrategia de publicidad que daría el mayor aumento en el porcentaje de mercado?

c ¿Es provechosa la mejor campaña de publicidad?

11-9 Un gerente de crédito estima que el 95 % de aquellos que pagan sus cuentas a tiempo un mes también lo harán el siguiente mes. Sin embargo, de aquellos que se tardan sólo la mitad pagarán a tiempo la próxima vez.

a Si una persona paga a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que pagará a tiempo durante seis meses desde ahora?

b En promedio, ¿cuál es la proporción de cuentas pagadas a tiempo y qué proporción se pagan tarde?

11-10 Se está considerando comprar dos copiadoras de oficina. Son similares en todos aspectos excepto en el control de claro-oscuro que opera en forma automática. En la máquina A existe una posibilidad del 95% de que el control permanezca ajustado todo el día, si está ajustado en la mañana. Pero si no está ajustado, hay 10% de posibilidades de que permanezca así. Para la máquina B, las cantidades equivalentes son 90 % y 5 %, respectivamente. Si el costo es el mismo, ¿qué máquina debe comprarse?

11-11 Considérese el destino de la ciudad Metrópolis localizada en el condado de Bake. Actualmente, los seis millones de residentes del condado están divididos entre la ciudad y los suburbios. Cada año un residente de cada cinco se traslada de la ciudad a los suburbios, pero sólo uno de cada 20 se cambia de los suburbios a la ciudad. Suponiendo que los que mueren o se van del condado están bien balanceados por nuevos residentes que llegan al condado:

a Pronostíquese la población de la ciudad, dentro de tres años.
b ¿A qué nivel se estabilizará la población de la ciudad?

11-12 Un actuario mencionó casualmente que en un país en desarrollo los bebés recién nacidos tenían una posibilidad del 95% de sobrevivir su primer año. Si sobreviven, tienen un 75% de posibilidades de llegar a mediana edad, y una persona de mediana edad tiene el 60% de posibilidades de llegar a viejo. A la larga, ¿qué proporción de la población llega a viejo? (Supóngase una población balanceada, es decir, el número de nacimientos es igual que el número de muertes.)

11-13 La agencia de alquiler de automóviles Rent-A-Bucket tiene dos oficinas en el área metropolitana. Los carros pueden devolverse a cualquiera de las oficinas. Por experiencia se sabe que el 80 % de los carros alquilados en la oficina 1 se devuelve ahí y el 20% a la oficina 2. El 70 % de los carros alquilados en la oficina 2 se devuelve ahí mientras que el 30% va a la oficina 1.
a ¿Cómo se debe asignar la flotilla entre las dos oficinas?
b ¿Qué suposición importante se hizo en (a)?
c Supóngase que el 60 % de todos los carros se alquila en la oficina 1 y el 40% en la oficina 2, ¿Cuál es la proporción de carros que habrá en cada oficina?

11-14 El contralor de la Ace Widgets analizó las cuentas por cobrar de la compañía y desarrollo la siguiente matriz de transición:

		A (mes 2)			
De: (mes 1)		*A*	*B*	Pagadas	Cuentas morosas
	A	0.3	0.2	0.5	0
	B	0.2	0.2	0.5	0.1
	Pagadas	0	0	1	0
	Cuentas morosas	0	0	0	1

Las cuentas A tienen de 0 a 30 días y actualmente dan un total de $100 000. Las cuentas B tienen de 31 a 90 días y dan un total de $50 000 en este momento. ¿Qué concesión debe dar el contralor para cuentas morosas?

11-15 La Acmé Engineering emplea ingenieros de tres niveles de clasificación. Paga $10 000 al año a los nuevos ingenieros, un promedio de $15 000 a los ingenieros veteranos y un promedio de $20 000 al año a los consultores. Cada año el 20% de los nuevos, el 15% de los veteranos y el 10% de los consultores dejan la compañía. Aquellos que se van se reemplazan por ingenieros nuevos. La compañía tiene ahora 500 nuevos. 100 veteranos y 10 consultores. ¿Cuántos ingenieros nuevos y veteranos se deben promover cada año para mantener estables los niveles de empleados? ¿Cuántos ingenieros nuevos se deben contratar al año?

ESTUDIO DE UN CASO: ARCHIE'S QUARKS

A Archie Connelly le gusta experimentar con recetas nuevas de cocina. Uno de sus experimentos recientes resultó bastante bueno (muchos han sido malos). Tan bueno en realidad, que Archie cree haber descubierto un nuevo producto para botana. Los que lo han probado piensan que es bueno y lo están animando a entrar en el negocio. Archie está considerando la posibilidad de venderlo en los corredores de un centro comercial. Ha decidido llamarlos "quarks".

Mediante algunas investigaciones, Archie descubrió que un espacio pequeño pero bien localizado en un centro comercial cercano cuesta $500 por mes. También estimó que su equipo se depreciará a razón de $100 mensuales que sus gastos varios ascenderán a otros $100 por mes. El gerente del centro comercial le informó que puede esperar que pasen 10 000 personas al día por ese lugar. El centro comercial opera 365 días al año.

Si Archie cobra 25 centavos por cada quark y si el 5% de los que pasan compran uno, tendrá una ganancia bruta de 5 centavos en cada quark. Sin embargo, esto no es suficiente para cumplir con su objetivo de ganancias, que es de $300 a la semana. Serán necesarios otros puntos para vender.

Archie ha decidido tratar su nuevo producto durante un mes en un local temporal en el centro comercial. Espera la misma cantidad de tráfico.

Preguntas

1 ¿Qué proporción de clientes debe regresar para que Archie alcance su objetivo de ganancias?

2 Durante el mes de prueba, ¿cómo sabrá Archie qué clientes regresaron y quienes no?

BIBLIOGRAFÍA

Cyert, R. M., J. J. Davidson y G. L. Thompson: "Estimation of the Allowance for Doubtful Accounts by Markov Chains". *Management Science,* vol. 8 (abril de 1962), pp. 287-303.

Ehrenberg, A.S.C.: "An Appraisal of Markov Brand Switching Models", *Journal of Marketing Research,* vol. 2 (1956) pp. 347-362.

Freedman, D.: *Markov Chains* (San Francisco: Holden-Day, 1971).

Meliha, Dileep: "Markov Proceses and Credit Collection Policy", *Decision Sciences,* vol. 3 (abril 1972).

Trueman, Richard E.: *An Introduction to Quantitative Methods for Decision Making,* 2ª edición (New York: Holt, Rinehart y Winston, 1977).

Turban, Efraim y J.R. Meredith: *Fundamentals of Management Science* (Dallas: Business Publications, Inc., 1977).

12
PLANEACIÓN DE PROYECTOS, PERT Y CPM

Lleva menos tiempo hacer algo bien que explicar por qué se hizo mal.

Henry Wadsworth Longfellow

Si algo puede salir mal, saldrá mal.

Ley de Murphy

Murphy era un optimista.

Ley de O'Reilly

PERFIL DEL CAPITULO

Objetivos de aprendizaje
Gráficas de Gantt
Dibujo de las redes de proyecto
- De la gráfica de Gantt al diagrama de redes
- Dos tipos de diagramas
- Actividades ficticias
- Los diagramas deben ser legibles

Cómo se encuentra la ruta crítica
- Tiempos y holguras de los eventos
- La ruta crítica
- Ejercicio de práctica (12-1)
- Tiempos y holguras de las actividades
- Ejercicio de práctica (12-2)

Uso de diagramas de redes en la administración
- Planeación
- Programación
- Control PERT: uso de redes probabilistas
- Tres estimaciones de tiempos
- Cálculo de las estadísticas de tiempo de las actividades
- Estadísticas de la ruta crítica
- Ejercicio de práctica (12-3)
- Estimación de la terminación del proyecto
- Ejercicio de práctica (12-4)

CPM: trueque entre el tiempo y el costo
- Compra de tiempo
- Cómo encontrar la red de tiempo mínimo-costo mínimo
- Ejercicio de práctica (12-5)
- Cómo encontrar la red óptima
- Ejercicio de práctica (12-6)

Necesidad de las computadoras
Otras técnicas de proyecto
Experiencias del mundo real
Resumen
Ejercicios
Estudio de un caso: Xylon Electronics
Bibliografía

Ya sea que el lector esté consciente de ello o no, tiene una experiencia considerable en la planeación y administración de proyectos. Un proyecto es cualquier empresa humana con un claro principio y un claro final. Para este momento, probablemente ya se manejaron algunos proyectos semestrales, proyectos de grupo, proyectos en la casa, proyectos de "podar el césped" y proyectos de "emprender el trabajo por la mañana". Estos son proyectos relativamente pequeños. Existen proyectos grandes: la construcción de una casa, la construcción de un edificio, o la pavimentación de una carretera. Y algunos que son muy grandes: el proyecto Manhattan, el proyecto Polaris, el proyecto Apollo y el proyecto de la tubería desde Alaska.

Todos los proyectos, pequeños o grandes, tienen ciertas características comunes. Siempre hay:

Una combinación de actividades

Una relación secuencial entre algunas de las actividades

Una preocupación por el tiempo: la terminación del proyecto *a tiempo* es importante

Una preocupación por los recursos: completar el proyecto *dentro del* presupuesto también es importante

Cuando se trata de un proyecto pequeño, todas las fechas importantes y la información pueden guardarse en la memoria. Sin embargo, cuando el proyecto es grande, los administradores necesitan poner en un papel los detalles del proyecto en caso de que quieran asegurar la planeación y el control apropiados.

En este capítulo se presentan las herramientas que pueden usarse para planear, programar y controlar proyectos grandes. La *planeación* de proyectos requiere desglosar el proyecto en actividades, estimar los recursos y el tiempo para cada actividad y describir las interrelaciones de las actividades. La *programación* requiere detallar las fechas de inicio y terminación para cada actividad. El *control* del proyecto no sólo requiere información sobre el estado actual sino analiza los posibles trueques cuando surgen dificultades. Por supuesto, una buena planeación minimiza el número de problemas que pueden encontrarse más adelante, pero la ley de Murphy parece universal en los asuntos humanos.

Se describen cuatro métodos para organizar y desplegar los datos de un proyecto: (1) la gráfica de barras o de Gantt, (2) las redes de proyecto, (3) la técnica de evaluación y revisión de programas (PERT) y (4) el método de la ruta crítica (CPM). Cada método tiene ciertas características únicas, valiosas en la administración de proyectos. En conjunto, proporcionan una herramienta significativa.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Los objetivos de estudio de este capítulo son conocer:

1 La diferencia entre una gráfica de Gantt y un diagrama de redes.
2 Dos formas de construir un diagrama de redes.

3 Cómo encontrar e interpretar la ruta crítica.
4 La técnica de evaluación y revisión de programas (PERT) para emplear tiempos probabilistas para las actividades.
5 El método de la ruta crítica (CPM) para realizar trueques entre el tiempo y el costo.
6 El significado de los siguientes términos:

Gráfica de Gantt	Ruta crítica
Evento	Tiempos próximos y lejanos
Actividad	Distribución beta
Holgura	Tiempo y costo normales
Ficticia	Tiempo y costo intensivos

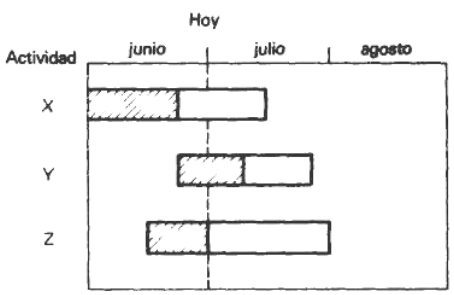
GRÁFICAS DE GANTT

Una de las herramientas más antiguas, más fáciles de usar y más flexibles en la administración de proyectos es la gráfica de Gantt[1] o diagrama de barras. En la figura 12-1 se muestra un ejemplo sencillo. En el lado izquierdo del diagrama se encuentra la lista de las actividades del proyecto. El tiempo se muestra horizontalmente, ya sea hasta arriba o hasta abajo del diagrama. Entonces la duración de cada actividad se da como una barra desde la fecha de inicio hasta la fecha de terminación.

Sería difícil sobreestimar el valor de la gráfica de Gantt. Sin duda, es la herramienta que con más frecuencia utilizan los administradores en más organizaciones que ninguna otra herramienta, método o técnica de este libro. Tal vez sea la herramienta gráfica administrativa más importante que se haya inventado.

¿Qué hace que un dispositivo tan sencillo sea tan significativo? Básicamente tres motivos. Primero, para poder dibujar una gráfica de Gantt pura un proyecto, es necesario desglosarlo en actividades significativas, estimar cuánto durará cada actividad y programar el inicio y la terminación de cada una. Esto significa *planear.* Así, obliga a realizar un ejercicio muy saludable de planeación. El segundo factor es la simplicidad de la gráfica de Gantt y la facilidad para entenderla. No es necesario ser un experto pa-

FIGURA 12-1
Gráfica de Gantt.



[1] Desarrollada por Henry L. Gantt, un pionero de la administración científica. Su primera gráfica publicada apareció en un artículo en la revista *Industrial Management* (febrero de 1918).

ra leerla o dibujarla. El tercer factor es que es muy sencillo actualizar la gráfica para mostrar el estado actual para propósitos de control. La longitud de cada barra de actividad representa el 100 % de su realización. En el día del informe se sombrea cada barra para mostrar el grado de avance. Por ejemplo, en la figura 12-1, la actividad X está a la mitad y retrasada. La actividad Y también lleva el 50% de avance y está adelantada, mientras que la actividad Z va a tiempo.

La mayor incapacidad de la gráfica de Gantt es la dificultad para mostrar las relaciones entre las actividades. Los proyectos incluyen secuencias de actividades. Igual que en una fila de dominó, si una actividad se retrasa, puede hacer que otras se retrasen y también tomado el proyecto. Cuando estas interrelaciones son más o menos sencillas, pueden incorporarse a la gráfica de Gantt con flechas. Sin embargo, cuando las actividades son muchas, con interrelaciones más complejas, la gráfica de Gantt es demasiado rígida. Se necesita una mejor manera de describir las relaciones entre actividades.

DIBUJO DE LAS REDES DE PROYECTO

En general, los diagramas de redes se dibujan en formato libre sin escala fija. Esto las hace muy apropiadas para mostrar las interconexiones de las actividades del proyecto. Las actividades se pueden dibujar ya sea como líneas o como círculos, lo que lleva a dos convenciones diferentes para dibujar los diagramas de redes. Antes de analizar estas convenciones se examinará como pasar de una gráfica de Gantt a un diagrama de redes.

De la gráfica de Gantt al diagrama de redes

Para considerar un ejemplo, supóngase que se quiere construir una casa. Uno de los primeros pasos al planear es dividir el proyecto en actividades separadas que se deben llevar a cabo. La mayoría de los contratistas usan alrededor de 40 actividades para una casa, pero para mantener la simplicidad se usarán sólo 5. Éstas se muestran en la tabla 12-1. Se muestra la duración de cada actividad y se indica la precedencia cuando una actividad debe terminarse antes que otra pueda comenzar.

La gráfica de Gantt para el proyecto de la construcción de una casa se muestra en la figura 12-2. Para hacer hincapié en los tiempos de inicio

TABLA 12-1
Proyecto de construcción de una casa

Actividad	*Descripción*	*Predecesor*	*Duración (semanas)*
A	Cimientos paredes	ningunos	4
B	Plomería, electricidad	A	2
C	Techos	A	3
D	Pintura exterior	A	1
E	Pintura interior	B, C	5

más próximo y de terminación más lejana, se han colocado círculos en ambas orillas de cada barra. La escala de tiempo se ha colocado en la parte inferior para poder denotar cuatro pilares hasta arriba. Con la gráfica de Gantt en esta forma puede pasarse al diagrama de redes.

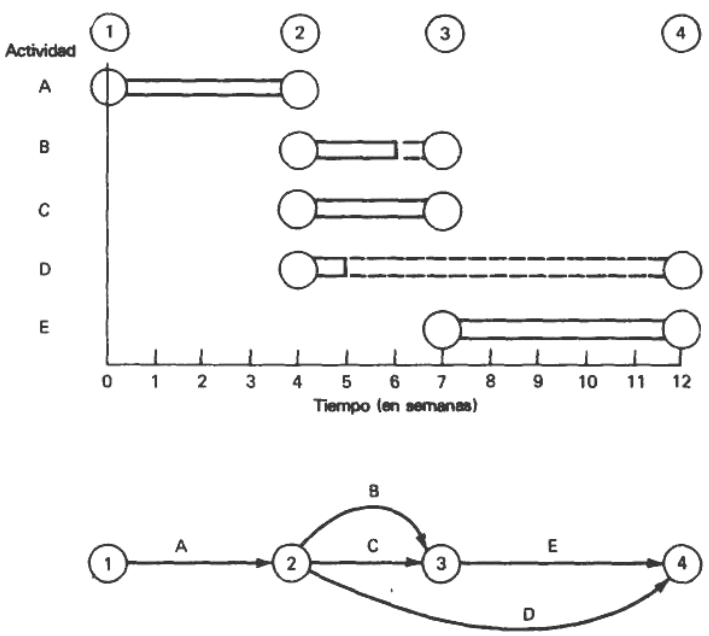
Para formar el diagrama de redes, se colocan los cuatro pilares en fila y se dibujan las actividades como líneas entre ellos. La longitud de una línea de actividad no guarda relación con la duración de la misma. El único criterio para dibujar el diagrama es la precedencia. Los pilares (o eventos, como se llamaran en adelante) se colocaron en una escala de tiempo para que pueda observarse su relación con la gráfica de Gantt, pero muy pocas veces se dibujan los diagramas de redes a escala.

La relación de precedencia entre las actividades de la red es importante y es necesario un completo entendimiento sobre cómo se muestra en el diagrama. Un evento tiene lugar sólo cuando *todas* las actividades *que llegan* a él se han terminado. Por ejemplo, el evento 3 en la figura 12-2 no tendrá lugar sino hasta que tanto la actividad B como la C se hayan completado. Así, la actividad E no puede comenzar sino hasta que ambas actividades B y C hayan terminado.

Dos tipos de diagramas

Durante los últimos 25 años han surgido dos tipos de convenciones para dibujar diagramas de redes. En la figura 12-3 se muestra el proyecto de la casa usando ambos métodos. En el diagrama superior (véase la figura 12-3*a*) se muestra el método del diagrama *de flechas* que se ha usado hasta aquí. Las actividades están representadas por líneas (o flechas) y los even-

FIGURA 12-2
De la gráfica de Gantt al diagrama de red.



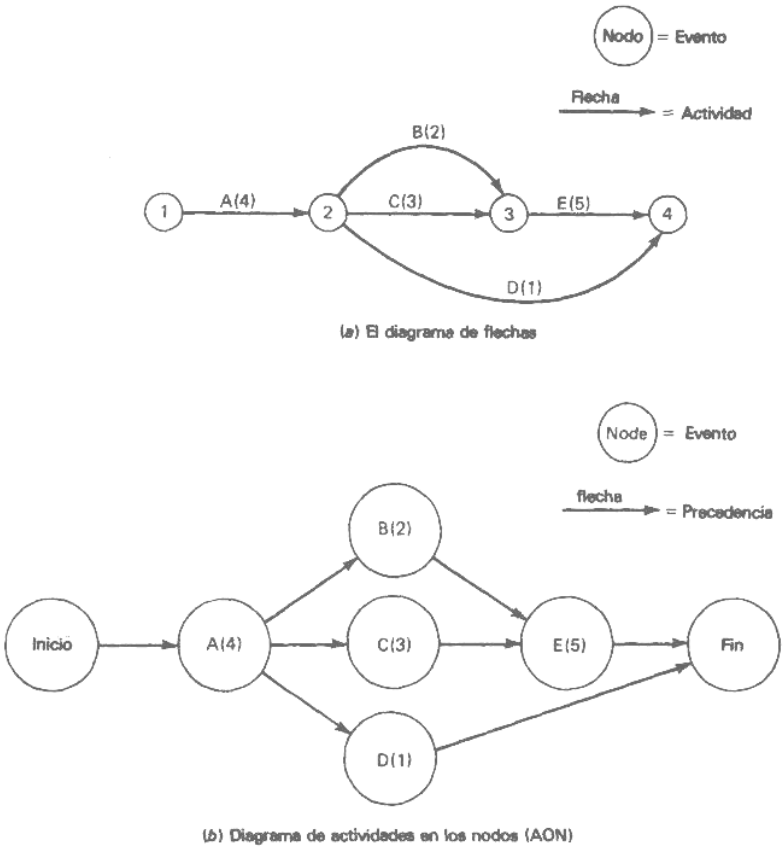


FIGURA 12-3
Dos maneras de dibujar diagramas.

tos por círculos (o nodos). La duración de las actividades se muestra sobre las flechas. Las actividades pueden identificarse de dos maneras: (1) por una letra o símbolo sobre la línea o (2) haciendo referencia a los eventos-inicial y terminal (esto es, la actividad A podría llamarse la actividad 1, 2). La segunda convención es la de *actividad en el nodo* (AON) y se muestra en la figura 12-3*b*. Aquí las actividades se colocan como nodos o círculos. Entonces, las líneas o curvas indican meramente las relaciones de precedencia entre las actividades. La identificación de las actividades y su duración se debe mostrar dentro del círculo. Al observar los dos diagramas puede dudarse que sean para el mismo proyecto. Pueden verificarse las relaciones de precedencia para borrar estas dudas.

¿Qué convención es mejor? En adelante se usará el método del diagrama de flechas, pero esto realmente se debe a preferencias personales. Cualquier método puede usarse para los propósitos de este capítulo. En la historia, el método de flechas surgió con el PERT y tiende a emplearse en las aplicaciones de PERT. El método de AON surgió con el CPM y tiende a usarse en las aplicaciones de CPM. Sin embargo, los dos métodos son completamente intercambiables. El diagrama de flechas muestra las acti-

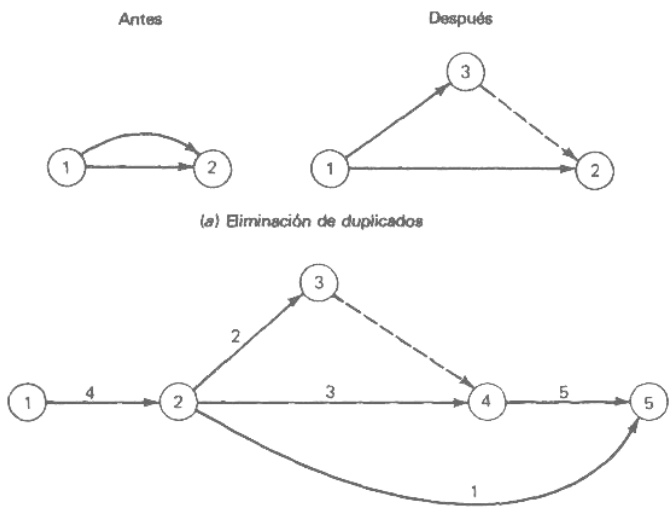
vidades y los eventos, mientras que el de actividad en el nodo sólo muestra las actividades, pero la mayor diferencia es pictórica, ¿qué es lo que atrae la atención? En forma visual, los círculos atraen la vista más que las líneas. Entonces el diagrama de flechas está orientado hacia los *eventos* y la red de AON está orientada a las *actividades.* Mientras que esta diferencia puede ser significativa en algunos casos, es más común que las personas aprendan un método y lo usen en todas las situaciones.

Actividades ficticias

Ahora que se ha optado por el método del diagrama de flechas es necesario observar un caso especial, el de las actividades ficticias. La manera más fácil de identificar las actividades es por medio de los números de los eventos inicial y terminal de cada una. De hecho, en la figura 12-3*a* se tiene doble identificación excepto en un caso. Las actividades B y C ambas comienzan y terminan en los mismos eventos, haciendo que las dos sean la actividad (2,3). Es necesario hacer una revisión para que no haya dos actividades entre los dos mismos eventos.

Las actividades ficticias se usan para proporcionar pares únicos para cada actividad, como se muestra en la figura 12-4, y para satisfacer las relaciones de precedencia. Cuando existe una duplicidad, sólo se agrega un nuevo evento que termine en una de las actividades. Esto proporciona pares de números únicos. Después, para satisfacer la relación de precedencia, se agrega una actividad *ficticia* entre el nuevo evento y el que ya se tenía. Las actividades ficticias necesitan un tiempo cero para terminarse, no consumen recursos y se dibujan como líneas punteadas. No obstante, una vez insertados, la actividad ficticia y el nuevo evento se tratan en la misma forma que las demás.

FIGURA 12-4
Actividades ficticias



(*a*) Eliminación de duplicados

(*b*) Red del proyecto de la casa con actividad ficticia

Los diagramas deben ser legibles

Los administradores dibujan diagramas de redes por dos razones. Primero para uso personal y como ayuda para organizar sus pensamientos. Cuando un diagrama es para uso personal puede dibujarse de cualquier manera: de cabeza, con líneas irregulares, hacia atrás o de lado. Pero los diagramas se utilizan sobre todo para ayudar a otros a comprender el proyecto. En este caso será mucho mejor seguir ciertas reglas sencillas, que se muestran en la figura 12-5. El mundo no se saldrá de la órbita si se violan, pero harán los diagramas más legibles.

CÓMO SE ENCUENTRA LA RUTA CRÍTICA

La *ruta crítica* se define como la ruta *más larga* a través de una red. Esta trayectoria es importante porque determina la longitud del proyecto. También, si alguna de las actividades en la ruta crítica se retrasan, todo el proyecto se retrasará. Toda red tiene *por lo menos una* ruta crítica; algunos tienen más de una, si es que existen empates para la ruta más larga. Si se observa de nuevo la figura 12-46, se verá que el proyecto de la casa tiene tres rutas:

1-2-3-4-5: 4 + 2 + 0 + 5 = 11 semanas
1-2-4-5: 4 + 3 + 5 = 12 semanas
1-2-5: 4 + 1 = 5 semanas

En esta pequeña red puede encontrarse la ruta crítica enumerando todas las rutas. La trayectoria 1-2-4-5 es la ruta crítica, ya que es la que emplea

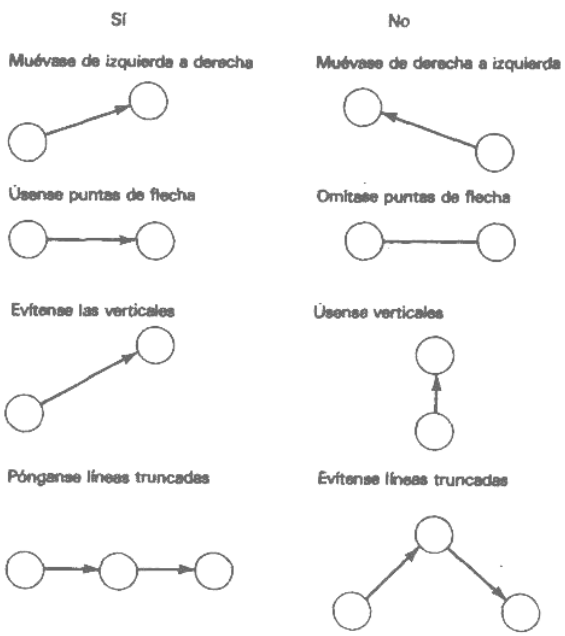
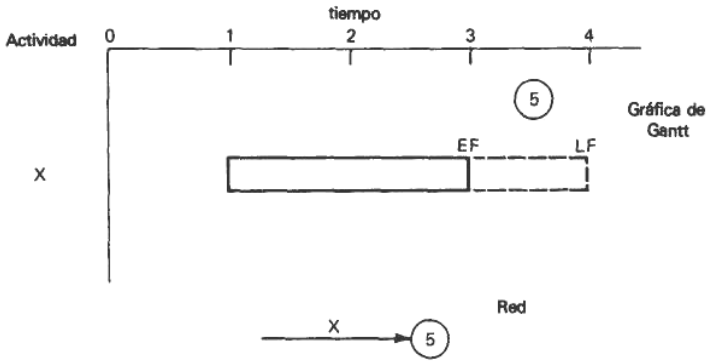


FIGURA 12-5
Algunos sí y no al dibujar diagramas

FIGURA 12-6
Tiempos próximo y lejano de un evento.



el mayor tiempo, 12 semanas. Sin embargo, en el caso de redes más extensas, la enumeración será tardada y tediosa.

En esta sección se presenta un procedimiento directo para encontrar la(s) ruta(s) crítica(s) en cualquier red. Este procedimiento también proporciona otra información útil en el control de proyectos. El primer paso es encontrar el tiempo de terminación próxima, el tiempo de terminación lejana y la holgura para cada evento.

Tiempos y holguras de los eventos

En la red de un proyecto, los *eventos* son puntos discretos en el tiempo, o pilares, que representan la terminación de las actividades que llegan. Es de gran interés para propósitos de control *el momento* en que se espera que ocurra un evento. Según las actividades que llegan, puede haber dos tiempos diferentes para un evento: un tiempo de *terminación próxima* y un tiempo de *terminación lejana.* Para aclarar esto, considérese la figura 12-6. La actividad X podría terminar tan pronto como 3 o tan tarde come 4. Entonces, para el evento 5, el tiempo de terminación próxima (TP) es 3 y el tiempo de terminación lenta (TL) es 4.[2]

Para encontrar estos tiempos, se trabaja en el diagrama comenzando con los tiempos de terminación próxima (TP). En la figura 12-7 se muestran estos tiempos para la red del proyecto de la casa. El tiempo de terminación próxima se encuentra pasando a través de la red de *izquierda a derecha,* siguiendo la regla:

$$TP = TP \text{ (del evento anterior)} + \text{duración de la actividad}$$

Es decir, el TP para cualquier evento es el TP del evento que le precedí más la duración de la actividad. *Si llega más de una actividad, debe cal-*

[2] Algunos autores se refieren a estos tiempos como los tiempos de *inicio* próximo e *inicio* lejano. La diferencia está en la perspectiva. Un evento representa tanto la *terminación* de las actividades que llegan como el *inicio* de las actividades que salen. Entonces, el tiempo de terminación próxima de las actividades que llegan también es el tiempo de inicio próximo de las actividades que salen. De igual manera, los tiempos de terminación lejana y de inicio lejano son los mismos.

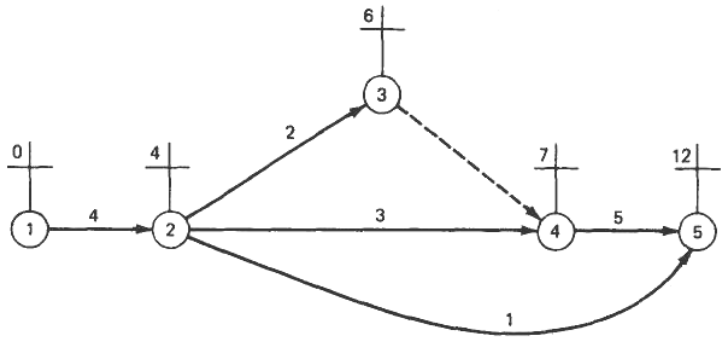


FIGURA 12-7
Cómo encontrar el tiempo de inicio próximo de los eventos.

cularse el TP para cada una y seleccionarse el tiempo más largo como el TP del evento. Debe usarse el tiempo más largo, ya que el evento representa la terminación de *todas* las actividades que llegan a él. La regla no es tan difícil de aplicar como aparenta. Se usará en la figura 12-7. Se comienza estableciendo en forma arbitraria EF = 0 para el evento 1. A menos que se tenga una razón para usar otro tiempo, el cero es el valor más conveniente. El TP para el evento 2 es: 0 + 4 = 4. Para el evento 3 se tiene: 4 + 2 = 6. El evento 4 tiene dos actividades que llegan, (3,4) y (2,4). El tiempo de terminación próxima a lo largo de estas rutas es:

$$(3,4): EF = 6 + 0 = 6$$
$$(2,4): EF = 4 + 3 = 7$$

Se quiere el tiempo más largo, 7, para el evento 4. El evento 5 también tiene dos actividades que llegan. Para la actividad (2,5) el TP es 5 mientras que la actividad (4,5) tiene un TP de 12, que es el tiempo más largo. Éste también es el tiempo más próximo para terminar el proyecto. El siguiente paso es calcular los tiempos de terminación lejana para cada evento. Esto se hace pasando de *derecha a izquierda* o hacia atrás a través de la red, aplicando la siguiente regla:

TL = TL (del siguiente evento) — duración de la actividad

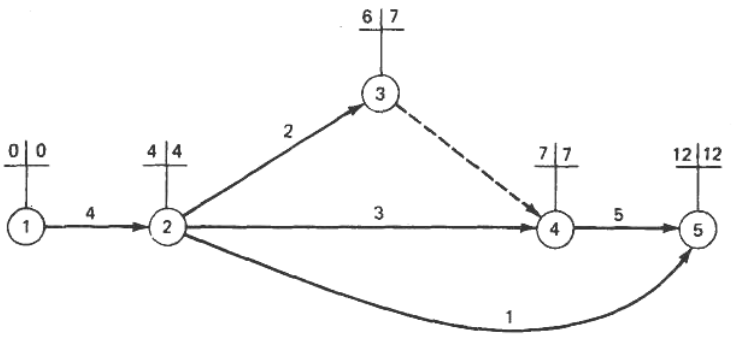


FIGURA 12-8
Como encontrar el tiempo de inicio lejano de los eventos.

En la figura 12-8 se comienza con el último evento, el 5. A menos que se tenga un tiempo de terminación dado para el proyecto, debe comenzarse por establecer TL = TP para el proyecto. Aquí se supone que 12 semanas es aceptable y, por tanto, se establece LF = 12 para el evento 5. El evento 4 tiene sólo un evento que le sigue, (5). Entonces:

$$LF = 12 - 5 = 7$$ Análogamente,

el evento 3 sólo tiene un evento que le sigue:

$$LF = 7 - 0 = 7$$

Para el evento 2 existen tres eventos siguientes:

(2,3):LF = 7 — 2= 5
(2,4):LF = 7 — 3= 4
(2,5):LF = 12—1= 11

El tiempo TL para el evento 2 debe ser el *más pequeño* posible. Para entender esto, supóngase que se usará el más grande, 11. Si el evento 2 no se terminara hasta la semana 11, las demás rutas no podrían terminarse en la semana 12 y el proyecto se retrasaría. Sólo seleccionando el valor más pequeño como TL, pueden evitarse los retrasos. Por último, para el evento 1 se tiene:

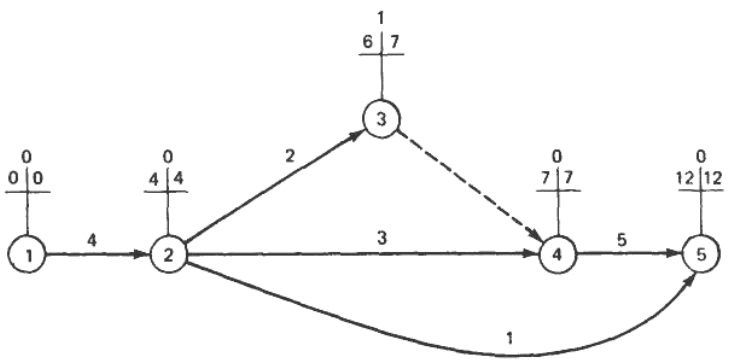
$$LF = 4 - 4 = 0$$

La holgura de los eventos es simplemente la diferencia entre los tiempos de terminación próximo y lejano.

$$\text{Holgura del evento} = LF - EF$$

Estas diferencias se muestran en la figura 12-9. En este momento ya puede(n) identificarse la(s) ruta(s) crítica(s).

FIGURA 12-9
Holgura de un evento.



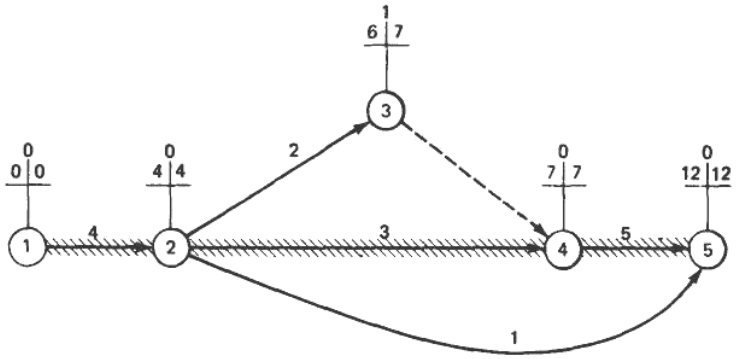


FIGURA 12-10
La ruta crítica

La ruta crítica

Cualquier evento que tiene holgura *cero* debe estar en la ruta crítica. Si se medita un momento sobre esto se comprobará que tiene sentido. Si el evento tiene holgura cero, entonces una o más actividades que llegan deben terminar justo a tiempo, es decir, no tienen holgura y deben estar en la ruta crítica. Por otra parte, si el evento tiene holgura, no puede formar parte de la ruta más larga porque se permite un corrimiento en su terminación.[3]

En la figura 12-9 puede observarse que sólo el evento 3 tiene holgura. Entonces, los eventos 1, 2, 4 y 5 están sobre la ruta crítica. ¿Cuántas trayectorias diferentes unen estos eventos? Sólo una. Esto se muestra en la figura 12-10. Así, el proyecto de la casa tiene sólo una ruta crítica: 1-2-4-5.

Desde un punto de vista administrativo, la ruta crítica tiene un nombre apropiado. Sin duda, es crítico que cada actividad en esta ruta termine a tiempo. De otra manera, todo el proyecto se retrasa. Aunque todas las actividades deben supervisarse durante el proyecto, se espera que se tenga un control más cerrado sobre las actividades críticas.

Una de las razones más importantes para dibujar las redes de proyecto es localizar la ruta crítica. Esto no puede hacerse en una gráfica de Gantt, excepto en casos triviales.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 12-1

Ahora le toca el turno al lector. Para la red que se muestra en la figura 12-11:

a Encuéntrese el tiempo de terminación próxima para cada evento.
b Encuéntrese el tiempo de terminación lejana para cada evento.
c Encuéntrese la holgura de cada evento.
d Encuéntrese la(s) ruta(s) crítica(s).

[3] Esto es cierto sólo cuando EF = LF en el evento final del proyecto. Si TP ≠ TL, entonces todos los eventos pueden tener holgura. En tal caso, los eventos cuya holgura es igual que la diferencia entre la TP y la TL serán los que forman la ruta crítica.

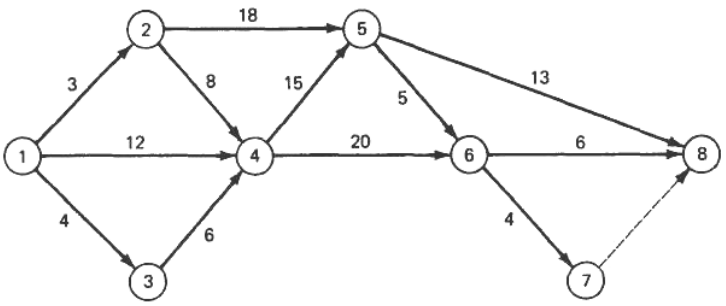


FIGURA 12-11
Ejercicio de práctica 12-1.

Tiempos y holguras de las actividades.

Para encontrar la ruta critica se calculan los tiempos de terminación próxima y lejana de cada *evento.* También es útil conocer los tiempos de terminación próxima y lejana de las *actividades.* A las actividades se les asocian cuatro tiempos en lugar de dos, que se asocian a los eventos. En la figura 12-12 se ilustran los tiempos de las actividades. Según en dónde se use la holgura, la actividad X tiene un inicio próximo (IP) en la semana 1, un inicio lejano (IL) en la 2, una terminación próxima (TP) de 3, y una terminación lejana (TL) de 4.

Los cuatro tiempos de actividades pueden calcularse directamente en la red con una lógica similar a la que se usó para el cálculo de los tiempos de los eventos. No obstante, se recomienda un procedimiento diferente que utiliza los tiempos de los eventos. En la mayoría de las aplicaciones los de s tiempos serán de interés. Si éste es el caso, es más fácil encontrar primero los tiempos de los eventos y después usarlos para encontrar los tiempos de las actividades.

Se necesita una tabla para registrar los tiempos de las actividades como la que se muestra en la tabla 12-2. Nótese que se están usando los mismos símbolos, TP y TL tanto para las actividades como para los eventos. Esto no causa confusión, ya que los tiempos de los eventos se registran en el diagrama de red y los tiempos de las actividades se muestran en una tabla aparte. De todas maneras, es necesario que se distinga con claridad entre los tiempos de *actividades* y los de *eventos.*

FIGURA 12-12
Cuatro tiempos de actividades.

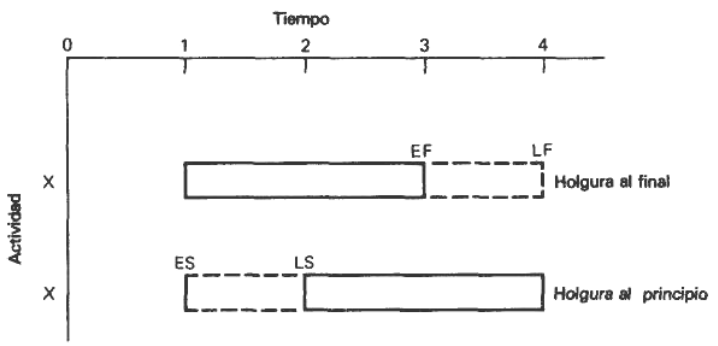


TABLA 12-2
Cómo encontrar el inicio y la terminación próximos de las actividades

Actividad	*Duración*	*ES*	*holgura*	*LS*	*EF*	*LF*
			(*a*) Tiempo de inicio próximo			
1-2	4	0				
2-3	2	4				
2-4	3	4				
2-5	1	6				
3-4	5	7				
			(*b*) Tiempo de terminación próxima			
1-2	4(+)	0	(=)	4		
2-3	2(+)	4	(=)	6		
2-4	3(+)	4	(=)	7		
2-5	1(+)	4	(=)	5		
3-4	0(+)	6	(=)	6		
4-5	5(+)	7	(=)	12		

Para completar la tabla 12-2, se usarán los tiempos de eventos que se muestran en la figura 12-10. La primera columna que debe llenarse es la de el inicio próximo. Para cualquier actividad:

$$\text{IP (actividad)} = \text{TP (evento en que comienza)}$$

Es decir, la actividad no puede comenzar antes que termine el evento en que comienza. Entonces, para encontrar el IP para cada actividad sólo tiene que verse el número del evento en que comienza y registrar el TP de ese evento. Como ejemplo, en la actividad (2,4) el TP del evento 2 es 4. Éste también es el IP de la actividad (2,4).

Una vez que se tiene IP para todas las actividades, es fácil encontrar el tiempo de terminación próxima sumando la duración de la actividad a su tiempo de inicio próximo. La fórmula es:

$$\text{TP (actividad)} = \text{IP} + \text{duración}$$

Estos cálculos se llevan a cabo en la tabla 12-2.

El siguiente paso es encontrar el tiempo de terminación lejana de cada actividad. De nuevo se utilizarán los tiempos de los eventos. Una actividad no puede terminarse después que el tiempo de terminación lejana del evento en que termina. Por tanto:

$$\text{TL (actividad)} = \text{TL (evento en que termina)}$$

Para encontrar el TL de cada actividad, se observa el número del evento terminal, se encuentra el TL de ese evento en la figura 12-10 y se registra en la tabla. Esto se hace en la tabla 12-3*a*.

El último paso es encontrar el tiempo de inicio lejano. Esto es, la terminación lejana menos la duración de la actividad.

$$\text{IL (actividad)} = \text{TL (actividad)} — \text{duración}$$

TABLA 12-3
Cómo encontrar el inicio y la terminación lejanos de las actividades

Actividad	*Duración*	*ES*	*LS*	*EF*	*LF*	*Holgura*
		(*a*) Tiempo de terminación lejana				
1.2	4				4	
2.3	2				7	
2.4	3				7	
2.5	1				12	
3.4	0				7	
4.5	5				12	
		(*b*) Tiempo de inicio lejano				
1,2	4	(+)	0	(=)	4	
2,3	2	(+)	5	(=)	7	
2,4	3	(+)	4	(=)	7	
2,5	1	(+)	11	(=)	12	
3,4	0	(+)	7	(=)	7	
4,5	5	(+)	7	(=)	12	

En la tabla 12-32*b* se muestra estos cálculos.

Ahora puede encontrarse la holgura de la actividad:

$$\text{Holgura de la actividad} = TL - TP = IL - IP$$

En realidad es una buena idea calcular la holgura de las dos formas (restando los tiempos de terminación *y* los tiempos de inicio) para verificar errores. En la tabla 12-4 se muestran las holguras de las actividades. *Cualquier actividad con holgura cero está en la ruta crítica.* Puede verificarse que la ruta crítica es la misma que se encontró antes.

Hay que tener cuidado al interpretar la holgura tanto de las actividades como de los eventos. En la tabla 12-4 puede tenerse la tentación de sumar los números en la columna de holgura y concluir que se tienen 9 semanas de holgura en la red. Estos sería un error por dos razones. Primero, la holgura en una ruta de la red se traslapa con la de otras rutas. Si se suma toda la columna de holgura, se agregan rutas diferentes y se obtiene un número que no tiene sentido.

Segundo, y más importante, el método para calcular la holgura asigna holgura de todas las rutas a las actividades (o eventos). Para entender, esto considérese la trayectoria 1-2-3-4-5. El tiempo total de esta ruta es 11 semanas, dejando 1 semana de holgura para toda la ruta. Pero en la tabla

TABLA 12-4
Cómo encontrar la holgura de las actividades

Actividad	*Duración*	*ES*	*LS*	*EF*	*LF*	*Holgura*
1,2	4	0	0	4	4	0*
2,3	2	4	5	6	7	1
2,4	3	4	4	7	7	0*
2,5	1	4	11	5	12	7
3,4	0	6	7	6	7	1
4,5	5	7	7	12	12	0*

*En la ruta crítica

12-4 dos de las actividades, la (2,3) y la (3,4), tienen una semana de holgura. De hecho, la holgura para cada actividad se deriva bajo la suposición de que a las demás actividades en esa ruta se les asignará una holgura de cero. Esto también es cierto para las holguras de eventos.

Si se quiere conocer la holgura de la *ruta,* se deben sumar las duraciones de todas las actividades sobre esa ruta y compararse con la duración del proyecto.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 12-2

Con la misma red que en el ejercicio de práctica 12-1 (figura 12-11):

a Prepárese una tabla para los tiempos de las actividades.
b Encuéntrense IP, IL, TP, TL y la holgura de cada actividad.
c ¿Qué actividades están en la ruta crítica?

USO DE DIAGRAMAS DE REDES EN LA ADMINISTRACIÓN

¿Cómo deben los administradores usar los diagramas de redes? Se tratará de responder a esta pregunta y al mismo tiempo indicar hasta qué grado los que aplican estos métodos, de hecho, usan diagramas de redes. El enfoque más conveniente es observar las tres funciones del administrador: planeación, programación y control.

Planeación

Los diagramas de redes ayudan a la planeación al prescribir qué información se debe proporcionar. Antes de poder dibujar un diagrama, es necesario conocer las actividades del proyecto y sus interrelaciones. Para hacer cualquier cálculo es necesario saber la duración de cada actividad. Si puede proporcionarse esta información para un proyecto, se está en camino de una buena planeación. Por supuesto, el refrán de "si se introduce basura se obtiene basura" sigue siendo cierto. El valor de cualquier red para la planeación depende de la exactitud de los datos.

Otra razón para emplear redes en la planeación es que proporcionan una visión global de todo el proyecto. El diagrama de red puede emplearse para analizar la asignación de recursos y las áreas en que sería posible una reducción de tiempos. Escasas veces se llega a un plan para el proyecto completamente satisfactorio en el primer intento. En general se necesitan revisiones y modificaciones.

La tercera ventaja de las redes es la atención sobre las actividades críticas. Esto proporciona al administrador una estructura de prioridades dentro del proyecto. En la etapa de planeación, se debe tener cuidado de revisar todas las estimaciones que se hicieron para las actividades, pero en especial para las que pertenecen a la ruta crítica.

Según algunas investigaciones, como la que efectuaron Watson y Baecher, citada en el capítulo 1, las técnicas de redes de proyecto se usan

ampliamente. Como es de esperarse, la mayoría de las aplicaciones surgen cuando la naturaleza del trabajo está orientada al proyecto. Un estudio reciente sobre los gerentes de investigación y desarrollo (I y D) en 200 compañías importantes estadounidenses mostró que el 86% piensan que los métodos de redes de proyecto se seguirán usando o se ampliarán.[4] La industria de la construcción es el mayor usuario de las redes.[5] Se están desarrollando nuevas aplicaciones en el sector público para planeación de convenciones.[6]

Algunos de los mayores beneficios de las redes de proyecto se derivan en la fase de planeación y a un costo muy bajo. El método es bastante simple y fácil de usar. Todo lo que se necesita es papel y lápiz.

Programación

Las redes de proyecto son de poca utilidad para desplegar en forma gráfi - ca la programación (horarios) de las actividades. Para proyectos sencillos es posible dibujar la red en una escala de tiempo. Sin embargo, para proyectos grandes, las interrelaciones son muchas como para poderlas restringir a una escala de tiempo. El beneficio del uso de las redes se obtiene de cálculo de los tiempos próximo y lejano de los eventos y actividades. Estos datos pueden usarse para preparar las gráficas de Gantt que despliegan la programación de actividades. En resumen, se recomienda, que se usen les diagramas de redes para los cálculos y las gráficas de Gantt para desplegar la información de programación.

Control

El uso de las redes de proyecto para control significa actualizarlas de manera periódica conforme avanza el trabajo, recalcular la ruta crítica al igual que los tiempos de los eventos y actividades que quedan y hacer los ajustes necesarios para cumplir con las fechas y los costos propuestos. Esto puede ser bastante costoso, debido a los informes del estado de las cosas y la actualización que se requieren. Siempre deben ponerse sobre la balanza los beneficios potenciales del uso de redes de control contra el costo que incluya.

Los beneficios estriban en poder detectar con rapidez algunos problemas y analizar los cambios posibles. Con las redes puede llevarse un control más estrecho del proyecto. Su costo en general va del 1 al 5% del costo del proyecto cuando éste es grande; cuando el proyecto es pequen), el costo resulta en un porcentaje mayor. Como resultado, las redes tienden

[4] D. Ezell, V. Luchsinger y B. Kedia, "An Empirical Examination of PERT Utilization: What Project Managers Think and Why", *Management in an Age of Complexity and Change* (Mississippi State, Miss.: Southern Management Association, 1977), pp. 38-40.

[5] Una investigación con 400 compañías constructoras importantes mostró que el 80% usa las técnicas de redes de proyecto. Véase Edward W. Davis, "CPM Use in the Top 400 Construction Firms", *J. Construction* Dio., *ASCE,* vol. 100 (marzo de 1974).

[6] Anthony Rutigliano, "Servin's 90 Day PERT Chart Plots Countdown to Keynote", *Meeting News* (agosto de 1977), pp. 1, 18.

a usarse para control sólo cuando se trata de proyectos extensos, aquellos que incluyan un millón de dólares o más. Para proyectos más pequeños casi siempre es suficiente un informe menos formal del grado de avance y las gráficas de Gantt.

PERT: USO DE REDES PROBABILISTAS

Hasta este momento se ha usado un tiempo determinista para la duración de cada actividad. Esto equivale a suponer que se tiene una predicción perfecta sobre cada actividad. Es claro que ésta es una suposición mala. Aun en las mejores circunstancias de planeación, las descomposturas de las máquinas, la enfermedad del personal, el clima y otros factores intervienen para causar desviaciones del plan original.

El PERT (técnica de evaluación y revisión de programas) se desarrolló con el fin de poder incluir la incertidumbre en las estimaciones de la duración. En lugar de una estimación de tiempo, el PERT usa tres estimaciones. Éstas se combinan estadísticamente para llegar a estimaciones probabilistas de la terminación del proyecto.

Tres estimaciones de tiempo

Al usar PERT se estiman la duración máxima, la mínima y la más probable para cada actividad del proyecto. El tiempo mínimo se llama estimación *optimista,* ya que supone que todo irá bien. El tiempo máximo o *pesimista se* genera bajo la suposición de que la ley de Murphy está en vigor. El tiempo más probable es el mejor juicio sobre lo que durará la actividad. Siguiendo con el ejemplo del proyecto de la casa, en la tabla 12-5 se muestran estas tres estimaciones para cada actividad.

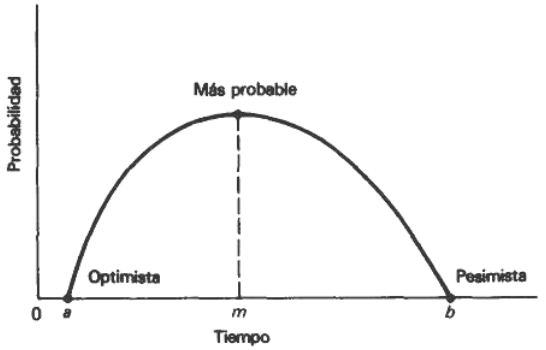
La técnica del PERT combina estas tres estimaciones suponiendo que definen los parámetros de una distribución de probabilidad beta. Esta se muestra en la figura 12-13. Los tiempos optimista y pesimista establecen los límites de la distribución y el tiempo más probable define el punto pico o la *moda* de la misma.

Ahora bien, es necesario encontrar la duración *media* o promedio para cada actividad, para poder determinar los tiempos de los eventos y las actividades. Una vez que se hace esto, puede aplicarse e[1] procedimiento ana-

TABLA 12-5
Tiempos del PERT para el proyecto de la casa

	Tiempo (semanas)		
Actividad	*Optimista*	*Más probable*	*Pesimista*
1,2	2	3	10
2,3	1	1	7
2,4	2	3	4
2,5	1	1	1
3,4 (ficticia)	0	0	0
4,5	3	4	11

FIGURA 12-13
Distribución beta.



lizado antes para encontrar los tiempos de los eventos y las actividades. Por último, se debe calcular la desviación estándar de la duración de cada actividad, con el fin de interpretar el tiempo de terminación de todo el proyecto. En parte, se escogió la distribución beta para que estos cálculos estadísticos fueran sencillos.

Cálculo de las estadísticas de tiempo de las actividades

La media de la distribución beta está dada por:

$$t = \frac{a + 4m + b}{6}$$

en donde a = tiempo optimista (mínimo)
m = tiempo más probable (moda)
b = tiempo pesimista (máximo)
t = tiempo medio

En la tabla 12-6 se calcula el tiempo medio de cada actividad del proyecto de la casa. Nótese que el cálculo se llevó a cabo en tres pasos. Primero se sumaron *a y b.* Después se multiplicó m por 4. Por último se sumaron estos tres resultados y se dividieron entre 6. Esto se debe estrictamente por con-

TABLA 12-6
Cálculo del tiempo medio de las actividades

	Tiempo (semanas)					
Actividad	*Optimista*	*Más probable*	*Pesimista*	$a + b$	$4m$	t
2,2	3	10	12	12	4	
2,3	1	1	7	8	4	2
2,4	2	3	4	6	12	3
2,5	1	1	1	2	4	1
3,4	0	0	0	0	0	0
4,5	3	4	11	14	16	5

veniencia en los cálculos. Una calculadora programable podría hacer esto automáticamente.

Nótese que el tiempo medio de cada actividad en la tabla 12-6 resultó ser el mismo que la estimación sencilla de tiempo que se usó antes en el capítulo. Es obvio que no es coincidencia, esto se hizo por simplicidad. El siguiente paso al analizar la red sería emplear los tiempos medios de las actividades para encontrar la TP y TL para cada evento y después encontrar los tiempos de las actividades y la ruta crítica. Esto ya se hizo, los resultados se mostraron en la figura 12-10 y en la tabla 12-4.

Se necesitará la desviación estándar de la duración de cada actividad para analizar la terminación de todo el proyecto. Con la distribución beta, esto está dado por:

donde a = desviación estándar
a = tiempo optimista
b = tiempo pesimista

La tabla 12-7 muestra los cálculos de la desviación estándar que por conveniencia se hicieron en dos pasos.

Estadísticas de la ruta crítica

Uno de los principales objetivos del PERT es encontrar el tiempo medio y la desviación estándar de la ruta crítica, es decir, de todo el proyecto. Formalmente esto significa combinar las variables (actividades) que tienen una distribución beta, esto es una tarea difícil. Para simplificar el procedimiento, es común suponer que el proyecto es grande y concluir que el tiempo de terminación sigue una distribución normal. Aunque puede haber algún error en este razonamiento, en la mayoría de los casos el error introducido será menor que el que ya existe en las tres estimaciones de tiempo para cada actividad.

Suponiendo la distribución normal, el tiempo medio de la ruta crítica será la suma de los tiempos medios de las actividades individuales. Esto es lo que se ha hecho todo el tiempo al dar 12 semanas para el proyecto de la casa.

La desviación estándar de la ruta crítica es un poco más complicada. La fórmula es:

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2}$$

en donde σ_τ = desviación estándar de la ruta crítica y σ_i = desviación estándar de la actividad i.

Nótese que sólo se incluyen las actividades que están en la ruta crítica. El proyecto de la casa tiene tres actividades en la ruta crítica: las actividades (1,2), (2,4) y (4,5). De la tabla 12-7,

TABLA 12-7
Cálculo de la desviación estándar de las actividades

	Tiempo (semanas)				
Actividad	*a* *Optimista*	*m* *Más probable*	*b* *Pesimista*	$b - a$	σ
1,2	2	3	10	8	1.33
2,3	1	1	7	6	1.0
2,4	2	3	4	2	0.33
2,5	1	1	1	0	0
3,4	0	0	0	0	0
4,5	3	4	11	8	1.33

$$\sigma_{12} = 1.33$$
$$\sigma_{24} = 0.33$$
$$\sigma_{45} = 1.33$$

Para encontrar la desviación estándar de todo el proyecto:

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma^2_{12} + \sigma^2_{24} + \sigma_{45}}$$
$$= \sqrt{(1.33)^2 + (0.33)^2 + (1.33)^2}$$
$$\sigma_T = 1.91$$

Usando el PERT, se concluye que la terminación del proyecto de la casa se distribuye normalmente, con media de 12 semanas y desviación estar - dar de 1.91 semanas. Antes de seguir adelante para ver cómo se interpretan estos resultados, trátense los cálculos.

EJERCICIO DE PRACTICA 12-3

Dados los siguientes datos de un proyecto:

	Tiempo, días		
Actividad	*Optimista*	*Más probable*	*Pesimista*
1,2	15	20	25
1,3	8	16	28
1,4	20	24	34
2,3 (ficticia)	0	0	0
2,4	8	9	16
3,4	5	8	11

a Calcúlese el tiempo medio para cada actividad.
b Dibújese la red. Encuéntrense los tiempos de terminación próxima y lejana y la holgura para cada evento.
c ¿Cuál es la ruta crítica?

d Calcúlese la desviación estándar de cada actividad en la ruta crítica.
e ¿Cuál es la media y la desviación estándar para la terminación del proyecto?

Estimación de la terminación del proyecto

El PERT da una respuesta estadística a la pregunta: ¿cuándo se terminará el proyecto? El lugar de una sola estimación, el PERT da una distribución de probabilidad, ésta se muestra en la figura 12-14 para el proyecto de la casa. Ésta es una distribución normal, con media de 12 semanas y desviación estándar de 1.91. Entonces se dirá que existe sólo un 50% de las posibilidades de terminar en 12 semanas o menos.

La distribución del tiempo de terminación de un proyecto puede usarse para responder a una serie de preguntas sobre el tiempo estimado. Por ejemplo, supóngase que se quiere conocer la probabilidad de terminar la casa en 15 semanas. Para dar la respuesta se utiliza la tabla normal (véase el apéndice B). Primero se convierten 15 semanas a una coordenada normal estandarizada:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{15 - 12}{1.91}$$

$$Z = 1.57$$

Después se encuentra en el apéndice B la probabilidad asociada con Z = 1.57. El valor en la tabla es 0.942. Entonces existe una probabilidad del 94.2% de terminar la casa en 15 semanas.

El PERT ha resultado bastante útil en proyectos de investigación y desarrollo. Existe mucha incertidumbre al tratar de predecir cuánto tiempo se llevará desarrollar algún producto o proceso nuevo. El PERT proporciona información adicional al reconocer explícitamente esta incertidumbre. De hecho, cuantifica el riesgo del administrador, permitiendo hacer trueques entre el tiempo y los recursos. No obstante, si la duración de las actividades puede predecirse en forma razonable, el PERT contribuye poco en el análisis,

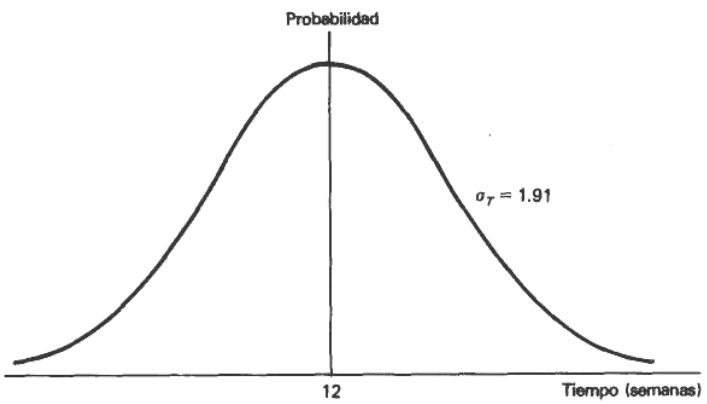


FIGURA 12-14
Terminación PERT del proyecto de la casa.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 12-4

Con los tiempos PERT, se ha estimado que el tiempo medio de terminación para un proyecto es 50 semanas con una desviación estándar de 5.

a ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto se termine en 50 semanas?; ¿en 55 semanas?; ¿en 60 semanas?
b ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto se lleve *más de* 58 semanas?
c Si se quiere tener un 99% de confianza en terminar el proyecto, ¿qué estimación se debe dar para estimar el proyecto?

CPM: TRUEQUE ENTRE EL TIEMPO Y EL COSTO

El método de la ruta crítica (CPM) se desarrolló para resolver el problema de los trueques entre el tiempo y los recursos. El método supone que la; duraciones y los costos de las actividades se pueden predecir bastante bien para poder usar estimaciones deterministas. Sin embargo, el CPM requiere dos estimaciones de tiempo y costo para cada una de las actividades, en lugar de una sola. Toma en cuenta la posibilidad de que el esfuerzo extra (costo) puede reducir el tiempo de terminación de una actividad.

Compra de tiempo

Los dos pares de estimaciones que se usan en CPM se llaman tiempo y costo *normal* y tiempo y costo *intensivo* para cada actividad. La estimación normal se refiere al tiempo y el costo para terminar una actividad suponiendo un nivel de esfuerzo estándar o "normal". La estimación intensiva supone que se aplica el mayor esfuerzo para minimizar el tiempo de terminación de la actividad. Una suposición más del CPM es que las estimaciones normal e intensiva guardan una relación lineal, como se muestra en la figura 12-15.

Ciertamente, la noción de que un esfuerzo adicional puede reducir el tiempo de terminación es razonable, por lo menos dentro de ciertos límites. Sin embargo, en muchos casos la relación no es lineal. Se han de-

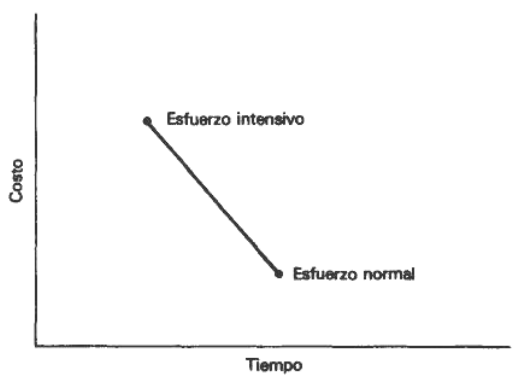


FIGURA 12-15
Trueque entre el tiempo y el costo en el CPM.

sarrollado programas especiales de computadora para aceptar trueques de tiempo y costo no lineales, debido a que éstos no están dentro del alcance de este texto, no se analizan.

Cómo encontrar la red de tiempo mínimo-costo mínimo

Una de las cuestiones principales que pueden resolverse con el CPM es: ¿Cuál es el costo mínimo para completar un proyecto en un tiempo mínimo? Con las estimaciones dobles, el CPM incluye dos redes extremas y algunas variaciones intermedias. En un extremo se tiene la red con *tocio normal,* que se lleva el tiempo más largo para la terminación y tiene el costo total más pequeño posible. En el otro extremo está la red con *todo intensivo* que tiene el tiempo más corto, pero el costo total de proyecto máximo. Con frecuencia sucede que algunas actividades en esta red no necesitan hacerse intensivas. Es decir, el tiempo mínimo de terminación puede alcanzarse a un costo un poco menor que el máximo. Esto es lo que se llama la red de tiempo mínimo-costo mínimo.

Existen tres enfoques para encontrar la red de tiempo mínimo-costo mínimo:

1 Comenzar con la red normal e ir reduciendo los tiempos de terminación hasta un mínimo.
2 Comenzar con la red de todo intensivo y "desintensificar" actividades para reducir el costo sin afectar el tiempo total.
3 Comenzar con la ruta crítica de la red de todo intensivo con un tiempo mínimo, pero con todas las demás actividades normales. Después reducir las otras trayectorias como sea necesario.

Se ilustrará el primer enfoque comenzando con la red de todo normal. Para cada problema, une de los tres métodos es el más eficaz. Desafortunadamente es difícil predecir de antemano cuál es el mejor; casi siempre esto se sabe después.

Considérese ahora el ejemplo del proyecto de la casa una vez más. Para hacerlo más interesante para el CPM se ha modificado la red como se muestra en la figura 12-16. En la tabla 12-8 se dan los tiempos y los costos normales e intensivos. El costo incremental de intensificar cada actividad también se muestran , pues se usará después.

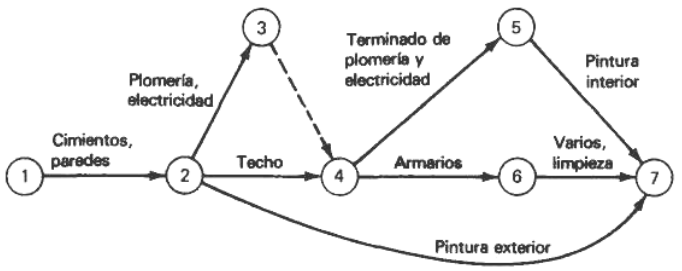


FIGURA 12-16
Expansión de la red del proyecto de la casa.

TABLA 12-8
Datos del CMP para el proyecto de la casa

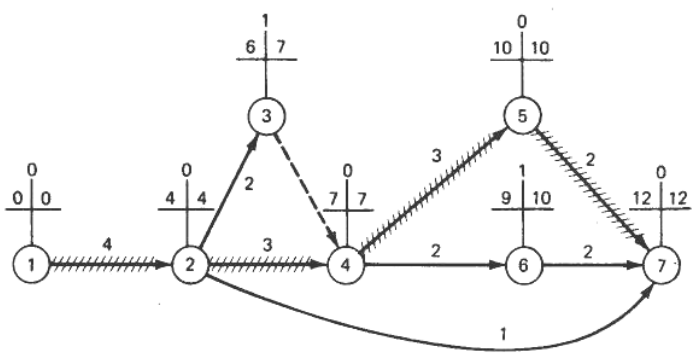
	Normal		*Intensivo*		
Actividad	*Tiempo, semanas*	*Costo, $*	*Tiempo, semanas*	*Costo, $*	*ΔC, $*
1,2	4	1 400	3	2 000	600
2,3	2	1 500	1	2 000	500
2,4	3	1 500	1	2 500	500
2,7	1	600	1	600	—
3,4 (ficticia)	0	—	0	—	—
4,5	3	1 300	2	2 000	700
4,6	2	300	1	500	200
5,7	2	800	1	1 200	400
6,7	2	600	1	1 000	400
		8 000		11 800	

El análisis comienza colocando los tiempos normales en la red, como se muestra en la figura 12-17. Éstos se usan para encontrar la EF, la LF y la holgura de cada evento y para identificar la ruta crítica. Así, se observa que el proyecto puede determinarse en 12 semanas a un costo normal de $8 000.

El siguiente paso es hacer "intensivas" las actividades de la ruta crítica, es decir, reducirlas a su tiempo mínimo. El razonamiento correspondiente es que no es posible terminar el proyecto antes que el tiempo mínimo para esta trayectoria. En la figura 12-18 se muestra el resultado. Nótese que el "intensificar" una actividad aumenta el costo. El tiempo mínimo para la ruta crítica normal es 7 semanas.

Después se deben inspeccionar las demás trayectorias para comprobar si es necesario "intensificar" algo más. La manera más segura de hacer esto es trazar todas las trayectorias a través de la red. Una forma corta es buscar subredes comparando con la ruta crítica. Por ejemplo, entre los eventos 2 y 4 hay dos trayectorias, 2-4 y 2-3-4. La primera es crítica en 1 semana. Por tanto, la otra trayectoria se debe hacer intensiva a no más de 1 semana. Existen dos actividades en la segunda trayectoria pero una es ficticia y no puede reducirse. Entonces, la actividad (2,3) se debe reducir 1 semana. En la tabla 12-8 se observa que esto puede hacerse aumentando el costo de $500.

FIGURA 12-17
Red de tiempo normal.



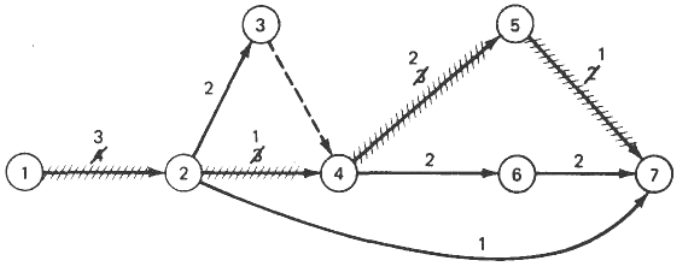


FIGURA 12-18
Intensificación de la ruta crítica.

Actividad	Acción	Costo adicional	Costo normal	Total
1-2	Intensificar 1 semana	$600		
2-3				
2-4	Intensificar 2 semanas	1000		
2-7				
3-4 (ficticia)				
4-5	Intensificar 1 semana	700		
4-6				
5-7	Intensificar 1 semana	400		
6-7				

De manera análoga, considérese la subred del evento 4 al evento 7. Hay dos actividades a lo largo de la ruta crítica (véase la figura 12-18) con un total de 3 semanas. Se sabe que una de las dos, la (4,6) o la (6,7), tendrá que reducirse 1 semana. Según la tabla 12-8, ¿cuál debe ser? El costo para reducir la actividad (4,6) una semana es $200 mientras que para la actividad (6,7) es $400. Como se quiere minimizar el costo, se reduce la actividad (4,6).

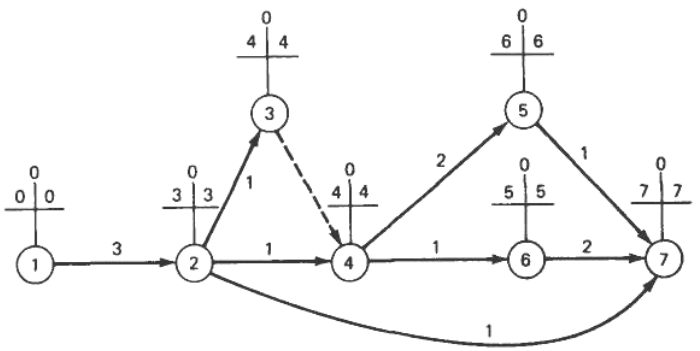


FIGURA 12-19
Red de tiempo mínimo-costo mínimo.

Actividad	Acción	Costo adicional	Costo normal	Total
1-2	Intensificar 1 semana	$ 600	$1400	$2000
2-3	Intensificar 1 semana	500	1500	2000
2-4	Intensificar 2 semanas	1000	1500	2500
2-7	–	–	600	600
3-4	–	–	–	–
4-5	Intensificar 1 semana	700	1300	2000
4-6	Intensificar 1 semana	200	300	500
5-7	Intensificar 1 semana	400	800	1200
6-7	–	–	600	600
			$8000	$11,400

En la figura 12-19 se muestra el resultado final. Por inspección, la actividad (2,7) no necesita reducirse. El proyecto puede completarse en 7 semanas a un costo de $11 400, que es $400 menos que el programa de la red de todo intensivo.

Este ejemplo fue bastante sencillo. Puede ser que redes más grandes sean mucho más difíciles de resolver. Por ejemplo, puede encontrarse que trayectorias no críticas (normales) algunas veces no pueden reducirse a igualar la ruta crítica (normal). Esto significa que la red intensiva y la red normal tienen rutas críticas diferentes y que se deben "desintensificar" algunas actividades a lo largo de la ruta crítica normal. También puede ser que algunas actividades sean comunes a varías trayectorias, haciendo que el análisis del costo incremental de los trueques sea difícil. No obstante, la paciencia y los cálculos cuidadosos pueden proporcionar información bastante útil sobre los trueques entre el tiempo y el costo.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 12-5

Ahora le toca el turno al lector. Supóngase que un proyecto de investigación tiene las siguientes estimaciones:

	Normal		*Intensivo*	
Actividad	*Tiempo meses*	*Costo, $*	*Tiempo, meses*	*Costo, $*
1,2	8	20 000	4	30 000
1,3	9	18 000	6	27 000
2,3	3	12 000	2	17 000
2,4	10	25 000	7	34 000
3,4	6	15 000	4	23 000

a Dibújese la red. Con los tiempos normales de las actividades, encuéntrense la duración total del proyecto y la ruta crítica.
b Supóngase que el proyecto se debe completar en un tiempo mínimo. ¿Cuál es el menor costo para el proyecto, es decir, cuál es la red de tiempo mínimo-costo mínimo?

Cómo encontrar la red óptima

Es práctica común incluir cláusulas de sanciones en los contratos de proyectos, en especial en la industria de la construcción. Si el proyecto lleva más tiempo que el especificado se impone un costo de penalización. Con esto, el gerente de proyecto se enfrenta a una decisión: ¿Es menos costoso pagar el costo de penalización que hacer "intensivo" el proyecto? De hecho, ¿cuál es la red (de costo mínimo total) óptima?

Considérese una vez más el proyecto de la casa. Supóngase que existe un costo penado de $450/semana por cada semana extra después de 8 semanas. ¿Cuál es la red óptima? Para responder esta pregunta, se comienza

con la red de todo normal (véase la figura 12-17) y se busca la manera más barata de reducir 1 semana el tiempo, a 11 semanas. Primero se analiza la ruta crítica, pues se sabe que debe reducirse. De la tabla 12-8, las cuatro actividades de la ruta crítica y sus costos "intensivos" son:

Actividad	*ΔC, $*
1,2	600
2,4	500
4,5	700
5,7	400

La menos costosa de éstas es (5,7) y como el costo intensivo es menor que el de penalización, la red se reduce a 11 semanas en la figura 12-20. Ahora, ¿cuál es el costo de reducir la red a 10 semanas? En la figura 12-20 se observa que hay tres maneras de hacer esto. Puede reducirse la actividad (1,2) pero cuesta $600, que es más que el costo penado. La actividad (2,4) podría reducirse, pero esto también excede el costo de penalización de $450. La tercera posibilidad es una combinación de dos actividades a lo largo de las rutas 4-5-7 y 4-6-7. Como (5,7) ya está reducida a su tiempo mínimo, se tendría que reducir la actividad (4,5) y esto también excede el costo de penalización. La conclusión entonces es hacer el proyecto intensivo hasta 11 semanas y pagar el costo penado por las semanas 9 y 10.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 12-6

Para el proyecto de investigación descrito en el ejercicio de práctica (12-5):

a ¿Cuál es el costo mínimo para completar el proyecto en 17 meses?
b El departamento de comercialización dice que cada mes que el proyecto se pase de 15 meses le cuesta a la firma $5 000. ¿Cuál es el costo y la duración óptimos para el proyecto?

NECESIDAD DE LAS COMPUTADORAS

Una regla generalizada para los proyectos de redes es que las redes con más de 100 actividades se analizan en forma más económica por medio de

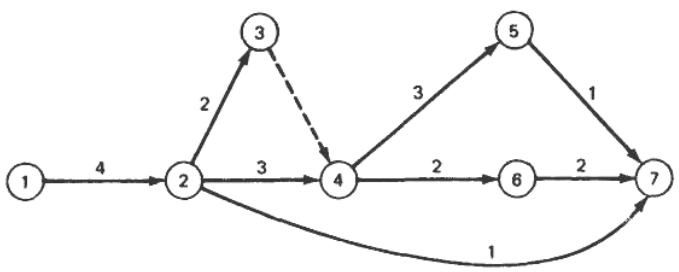


FIGURA 12-20
Proyecto de once semanas para una casa.

una computadora, que manualmente. Se han usado redes pequeñas para hacer hincapié en los conceptos y no en la aritmética. El trabajo de cálculos crece muy rápido con redes más grandes. Aunque las calculadoras programables pueden ser de gran ayuda, ninguna tiene la capacidad de memoria necesaria para un análisis completo. Entonces se vuelven necesarias las computadoras. Por fortuna, se dispone ampliamente de programas para redes. Loomba[7] proporciona una lista de 24 programas disponibles de 9 fuentes diferentes, mientras que una investigación previa mostró más de 60 programas diferentes en uso.[8]

OTRAS TÉCNICAS DE PROYECTO

Debido a la importancia y a la amplia aplicación de la administración de proyectos se han desarrollado muchas técnicas de redes. Sin duda, el campo incluye una abundancia de abreviaturas: PERT/Costo, Plannet, Vis-a-Plan, LOB, LESS, GERT, MPACS, GRASP, parece no tener fin.

La mayoría de estos métodos pertenecen a una de dos categorías: (1) modificaciones a las gráficas de Gantt o (2) modificaciones a los métodos de redes. Por ejemplo, Plannets (Planning Networks o redes de planeación) y Vis-a-Plan agregan un código especial para hacer más informativas las gráficas de Gantt. PERT y CPM son modificaciones de los métodos básicos de redes. PERT/Costo combina las tres estimaciones del PERT con las relaciones de tiempo y costo de las actividades de CPM.

Dos de los métodos citados son más o menos únicos. LOB (línea de balance) es primordialmente una herramienta de programación y control en la producción. El GERT (técnica de evaluación y revisión gráfica) es relativamente nueva y es más un lenguaje de simulación que una técnica de redes. Permite tanto eventos como actividades probabilistas y, en especial, es adecuada para el análisis de redes de simulación. (En la bibliografía pueden encontrarse más detalles sobre el LOB y el GERT.)

Desde el punto de vista del aprendizaje, se cuenta en este punto con los conceptos básicos para comprender cualquier método que se encuentre. La mayoría de las organizaciones se estandarizan en una versión particular con objeto de facilitar la comunicación. Entonces el lector no tendrá que conocer una gran cantidad de sistemas, sólo uno o dos.

EXPERIENCIAS DEL MUNDO REAL

Las investigaciones con los administradores, como las citadas en el capítulo 1 y antes en este capítulo, muestran que los métodos de redes se aplican a la administración de proyectos. ¿Qué sucede con PERT y CPM? En este caso, las encuestas pueden estar dando resultados equivocados. Muchos administradores que afirman usar PERT o CPM en realidad están aplicando las té nicas generales de redes y no PERT o CPM.

[7] N. Paul Loomba, *Management — A Quantitative Perspective* (New York: Macmillan, 1978), p. 159.

[8] J. J. Moder y C. R. Phillips, *Project Management with CPM and PERT,* 2ª edición (New York: Reinhold, 1970).

El problema es de semántica. Las técnicas de redes de proyecto descritas antes en este capítulo no tienen un nombre comúnmente aceptado. Algunos autores les llaman CPS, programación de ruta crítica, pero no existe un acuerdo sobre este nombre. La mayoría de los que trabajan en esto simplemente piensa que es parte de la técnica PERT (o CPM).

Los autores piensan que el número de aplicaciones completas de PERT o CPM es relativamente pequeño. La cantidad de esfuerzo adicional en los cálculos es bastante grande y es probable que sólo se justifique para proyectos de gran tamaño incluyendo tanto la planeación como el control.

Además, con frecuencia las estimaciones de tiempo y costo que requiere el PERT y el CPM son difíciles de obtener. Con PERT, por ejemplo, ¿qué tan pesimista se debe ser al estimar el tiempo máximo? Si *todo* sale mal, puede ser que nunca se termine la actividad. O con CPM, ¿no existen límites sobre los recursos disponibles para hacer intensivas las actividades? El hecho es que en estos métodos se necesitan datos que en realidad pueden ser bastante ambiguos.

Por estas razones, la mayoría de los usuarios emplean sólo los métodos generales de redes con una estimación de tiempo para las actividades. Weist y Levy argumentan que ésta es una tendencia desafortunada:

> A pesar de algunas dificultades conceptuales menores, PERT representa un avance al tratar con un problema particularmente complejo y sin duda es una mejora a los modelos que manejan problemas en forma determinista, como si ni hubiera incertidumbre. . . [Sobre CPM] Aun cuando no se disponga de datos exactos de tiempo y costo, la mejor suposición, a menos que sea completamente arbitraria, es información útil y ayudará al administrador del proyecto a tomar decisiones más adecuadas que si no se hiciera ninguna suposición.[9]

Las tres estimaciones de tiempo para el PERT y la suposición de que siguen una distribución beta se han discutido bastante. Sin embargo, es más el ruido hecho que los resultados obtenidos. La crítica más interesante se refiere a la necesidad de estimar tiempos mínimo y máximo, y hace hincapié en que con frecuencia esto es difícil. Por ejemplo, ¿se podría estimar con 100 % de seguridad el tiempo mínimo y máximo que se tiene que dedicar al estudio para pasar un examen dado? ¿O para construir un garage? ¿O para colgar una puerta? Se' argumenta que sería mejor buscar estimaciones con un 95% de confianza. Esto permite al estimador eliminar las causas imprevistas que puedan intervenir.[10]

[9] Jerome D. Weist y Ferdinand K. Levy, A *Management Guide to PERT/CPM,* 2a. edición (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977), pp. 172-173.

[10] Perry y Greig usaron simulación para demostrar que esto mejora significativamente la exactitud de las estimaciones. Las fórmulas para la media y la desviación estándar son un poco más complejas:

$$t = (t_{0.05} - 0.95m - t_{0.95})/2.95$$

$$\sigma = (t_{0.95} - t_{0.05})/3.2$$

Véase: C. Perry y I.D. Greig, "Estimating the Mean and Variance of Subjective Distributions in PERT and Decisión Analysis", *Management Science,* vol. 21, núm. 12 (agosto de 1975).

Las técnicas de redes de proyecto han pasado por etapas de alabanza y crítica, de altas y bajas. Cuando se hacen a un lado la niebla del debate, el administrador actual tiene a su alcance algunas herramientas significativas para mejorar su administración. "Se descartan las abreviaturas y las imágenes falsas, pero los conceptos importantes como los de eventos, actividades, secuencia tecnológica, holgura y análisis de redes se retienen y se agregan al marco de referencia pertinente y útil de conocimientos administrativos y de cómo planear, controlar y programar . . . programas."[11]

RESUMEN

Se han descrito cuatro herramientas que ayudan a planear, programar y controlar proyectos. En las gráficas de Gantt o diagramas de barras se muestra la duración de cada actividad contra una escala de tiempo. Sencillas de dibujar y fáciles de leer, pueden actualizarse para mostrar el estado de las actividades conforme avanza el proyecto. Su mayor desventaja es la dificultad para incluir las interrelaciones de las actividades.

Se ha comprobado que la segunda herramienta, las redes generales de proyecto, son útiles para planear y controlar proyectos, pero no tanto para programarlos. La red proporciona una gráfica de formato libre que muestra las interrelaciones. Ya sea que se dibuje como un diagrama de flechas o como uno de actividades en los nodos (AON), puede obtenerse mucha información útil: los tiempos de terminación próxima y lejana más la holgura de los eventos; IP, IL, TP, TL y la holgura para las actividades. Todavía más importante, puede identificarse la ruta crítica.

El PERT proporciona un mecanismo para incluir la incertidumbre, siempre presente, en la estimación de actividades futuras. Al incluir las estimaciones de tiempos pesimistas y optimistas junto con los tiempos más probables, puede encontrarse una distribución de probabilidad para el tiempo de terminación del proyecto. De esta manera, el administrador gana información útil para evaluar los trueques entre riesgo y esfuerzo.

La cuarta herramienta, el CPM, incluye en forma explícita las estimaciones para el intercambio entre el tiempo de la actividad y el costo. El tiempo y costo normales de cada actividad están basados en los niveles estándares de esfuerzo, mientras que el tiempo y costo intensivos suponen un esfuerzo máximo. Con estos datos puede encontrarse la red de tiempo mínimo-costo mínimo. Si se imponen costos de penalización, puede encontrarse una red óptima comparando el costo de penalización con el costo intensivo.

Si los administradores emplean adecuadamente estos métodos, conscientes de las limitaciones y ventajas que ofrecen, podrán mejorar en forma significativa el manejo del proyecto.

[11] A Vazsonyi, "L'histoire de la grandeur et de la décadence de la méthode PERT" (impreso en inglés), *Management Science, val.* 16, núm. 8, pp. 449-455 (abril de 1970).

EJERCICIOS

Dibujo de los diagramas de redes

12-1 La obtención de un título universitario puede considerarse como un proyecto. Los cursos que se deben tomar son las actividades primarias y algunos de ellos tienen requisitos de precedencia (o prerrequisitos). Además, quizá se tenga que realizar un proyecto de investigación o una tesis, o un examen especial. Dibújese un diagrama de red para la terminación de la carrera incluyendo los requisitos especiales.

12-2 Para cada red que se describe en seguida, dibújese el diagrama de flechas apropiado, completando con actividades ficticias cuando sea necesario.

	Actividad	*Predecesor*
a	A	ninguna
	B	ninguna
	C	A, B
b	A	ninguna
	B	ninguna
	C	ninguna
	D	A, B, C
c	A	ninguna
	B	ninguna
	C	A
	D	B, C
d	A	ninguna
	B	A
	C	A
	D	A, B, C

12-3 Para cada red del ejercicio 12-2, dibújese la red AON correspondiente.

12-4 *a* Dibújese un diagrama AON para la red que se muestra en la figura 12-11.

b ¿Está el lector de acuerdo en que el diagrama de flechas hace hincapié en los eventos, mientras que la red AON hace notar las actividades?

Cálculos básicos de redes

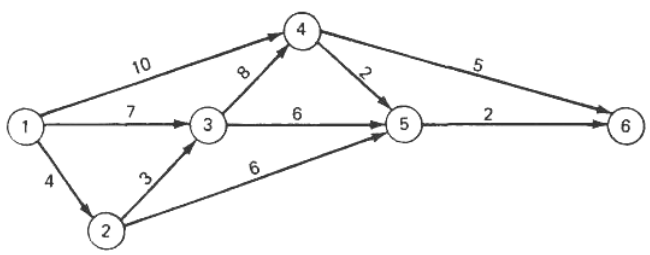
12-5 Las siguientes actividades forman un proyecto:

Actividad	*Tiempo semanas*
1,2	**4**
1,3	**8**
2,3	**6**
2,4	**7**
3,4	**5**

o Dibújese una red para este proyecto.
b Encuéntrense los tiempos de terminación próxima y lejana y la holgura de cada evento. ¿Cuánto tardará el proyecto?
c ¿Cuál es la ruta crítica?
d Dibújese una gráfica de Gantt para este proyecto.
e Compárese el diagrama de red y la gráfica de Gantt. *12-6*
Dadas las actividades siguientes:

Actividad	*Tiempo semanas*
1,2	5
1,3	4
1,4	8
2,3	2
2,4	6
2,5	9
3,4	3
4,5	4

a Dibújese la red del proyecto.
b Encuéntrense los tiempos de terminación próxima y lejana y la holgura para cada evento. ¿Cuánto tarda el proyecto?
c ¿Cuál es la ruta crítica?
d Encuéntrense los tiempos de inicio próximo y lejano, los tiempos de terminación próxima y lejana y la holgura para cada actividad.
e Dibújese la gráfica de Gantt para este proyecto. *12-7*
En seguida se presenta el diagrama de un proyecto de construcción de un jardín trasero:

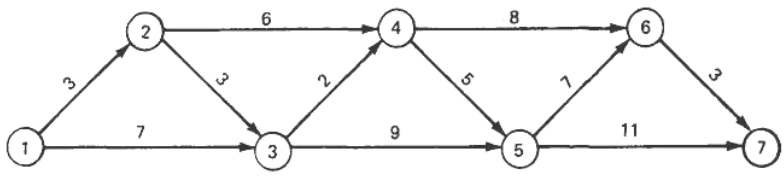


a Encuéntrense los tiempos de terminación próxima y lejana y la holgura de cada evento. ¿Cuál es la duración total del proyecto?
b ¿Cuál es la ruta crítica?
c Si los tiempos que se muestran están dados en horas de mano de obra, ¿cuántas horas de esfuerzo requiere el proyecto? Podría el lector cumplir la programación de este proyecto por sí mismo?
d Encuéntrese el ES, LS, EF, LF y la holgura de cada actividad.
12-8 La planeación de algunas modificaciones a una oficina resultó en la siguiente lista de actividades:

Actividad	*Duración*	*Predecesores requeridos*	*Actividad*	*Duración*	*Predecesores requeridos*
A	4	ninguna	F	9	B, C
B	8	ninguna	G	5	E, B, C
C	3	A	H	13	B, C
D	12	A	I	7	D, F, G
E	6	A			

a Dibújese la red y encuéntrense los tiempos de terminación próxima y lejana y la holgura para cada evento. ¿Cuál es la duración del proyecto?
b ¿Cuál es la ruta crítica?
c Encuéntrense ES, LS, EF, LF y la holgura de cada actividad.

12-9 El ingeniero en jefe de la construcción de un nuevo puente ha preparado el siguiente diagrama de proyecto (tiempo en semanas):



a Úsense 25 semanas como el tiempo más lejano de terminación del proyecto. Esto se especifica en el contrato. ¿Se terminará el puente a tiempo?
b ¿Cuál es la ruta crítica?
c Si se quiere reducir 2 semanas el tiempo de proyecto, ¿qué actividades se considerarían para reducción?

12-10 La siguiente lista de actividades es para un proyecto de investigación:

Actividad	Duración meses	Actividad	Duración meses
1,2	5	3,5	7
1,3	1	4,6	9
1,4	8	4,7	12
2,4	2	5,7	10
3,4	6	6,7	0

a Dibújese la red y encuéntrense los tiempos de terminación próxima y lejana y la holgura de cada evento.
b ¿Cuál es la ruta crítica?
c Encuéntrense ES, LS, EF, LF y la holgura de cada actividad.
d ¿Cuánta holgura se tiene en la ruta 1-2-4-6-7?

PERT

12-11 Se han hecho las siguientes estimaciones de tiempo para un proyecto:

	Tiempo, semanas		
Actividad	*Mínimo*	*Más probable*	*Maximo*
1,2	5	7	9
1,3	7	9	17
1,4	10	15	20
2,3	1	2	3
2,4	5	9	13
3,4	6	8	10

a Dibújese el diagrama de red y encuéntrense los tiempos de terminación próxima y lejana .a holgura para cada evento.
b ¿Cuál es la ruta crítica?
c ¿Cuál es la desviación estándar del tiempo de terminación del proyecto?
d ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto se termine en 16 semanas?; ¿en 18 semanas?; ¿en 20 semanas?

12-12 Dados los siguientes datos de proyecto:

	Tiempo, semanas		
Actividad	*Optimista*	*Más probable*	*Pesimista*
1,2	1	3	11
1,3	5	8	11
2,3	1	8	9
3,4	1	7	7
3,5	6	9	12
4,5	2	5	8

a Dibújese el diagrama de red y encuéntrense los tiempos de terminación próxima y lejana y la holgura de cada evento.
b ¿Cuál es la ruta crítica?
c ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto se termine en 20 semanas? ¿en 22 semanas? ¿en 25 semanas?

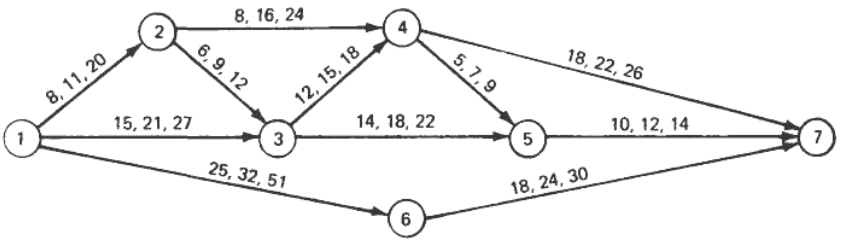
12-13 La numeración de los nodos en un diagrama de red no necesita seguir una secuencia particular. El único requisito es que al hacer referencia a ella el primer número sea el nodo en que comienza y el segundo el del nodo en el que termina. Considérese la siguiente red:

	Tiempo, semanas		
Actividad	*Optimista*	*Más probable*	*Pesimista*
5,4	5	6	13
5,2	7	10	13
4,3	4	6	8
3,2	3	5	7
3,1	6	8	10
2,1	1	2	3

a Dibújese la red y encuéntrese la ruta crítica.

b ¿Cuál es la probabilidad de terminar el proyecto en no más de dos días después de la duración media?

12-14 Se ha preparado un informe de personal recomendando un cambio en la hoja de cuentas. Se requiere la coordinación entre varios departamentos; en seguida se da la red estimada para la revisión. Los tiempos que se muestran (en días) son el optimista, el más probable y el pesimista, respectivamente.

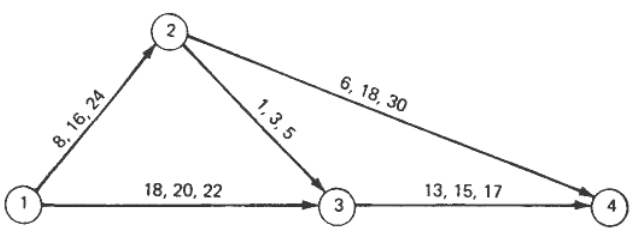


a Encuéntrese el tiempo medio de cada actividad. ¿Cuál es la ruta crítica?

b Encuéntrese la desviación estándar para el tiempo de terminación del proyecto. *(Sugerencia:* Si existe más de una ruta crítica, selecciónese la que tenga la mayor desviación estándar).

c ¿Cuánto durará el proyecto si tiene un 95% de confianza?

12-15 Una debilidad del PERT es que sólo usa la ruta crítica para determinar la desviación estándar del tiempo de terminación del proyecto. Esto puede conducir a estimaciones de probabilidad más que optimistas. Considérese la siguiente red (tiempo en semanas):



a Encuéntrese la ruta crítica

b Con la ruta crítica, encuéntrese la probabilidad de que el proyecto termine en 37 semanas.

c Encuéntrese la media y la desviación estándar de la ruta 1-2-4. A lo largo de esta ruta, ¿cuál es la probabilidad de terminar en 37 semanas?

d ¿A qué conclusión se llega partiendo de *(b)* y (c)?

CPM

12-16 La Gunderson Construction planea someterse a un concurso sobre un proyecto de construcción de una carretera en un condado. Al preparar sus estimaciones reunió los siguientes datos:

	Normal		*Intensivo*	
Actividad	*Tiempo, semanas*	*Costo, $*	*Tiempo, semanas*	*Costo, $*
1,2	5	$10 000	3	$14 000
1,3	10	18 000	7	24 000
2,5	11	15 000	8	18 000
3,4	6	5 000	5	6 500
3,5	8	3 000	4	7 000
4,6	9	12 000	8	15 000
5,6	12	6 000	8	9 000

a Con sólo tiempo normales, encuéntrese la duración y el costo del proyecto. ¿Cuál es la ruta crítica?

b ¿Cuál es el mínimo tiempo requerido para completar el proyecto? ¿Cuál es costo mínimo para este tiempo?

c El condado aconsejó a la Gunderson que se programe el proyecto para terminarlo en 25 semanas. Para cada semana de retraso después de estas 25 semanas, habrá un costo de penalización de $1 000 cargados al contratista. ¿Qué duración de proyecto debe planear la Gunderson?

12-17 Joe Thomas quiere añadir un patio interior en su casa. El hará parte del trabajo y contratará el resto. Joe ha desarrollado una lista de tareas para este proyecto, su secuencia y las estimaciones de tiempo y costo:

		Normal		*Intensivo*	
Actividad	Predecesor	Tiempo, días	Costo, $	Tiempo, días	Costo, $
A	Ninguna	9	500	8	550
B	Ninguna	10	500	8	650
C	Ninguna	20	1 000	16	1 400
D	A	18	1 000	15	1 300
E	B	7	500	5	600
F	B	8	500	5	700
G	D, F	12	800	9	1 000
H	C, F	15	900	12	1 000

a Joe quiere terminar el proyecto lo más pronto posible al menor costo. Con estos objetivos en mente, ¿cuánto durará el proyecto y cuánto costará?

b La esposa de Joe mencionó que tienen una fiesta programada dentro de 5 semanas (35 días) y le gustaría mucho usar el nuevo jardín. Si no está listo, tendrán que rentar una lona para el jardín trasero. Además, estará tan molesta, con la construcción y

todo, que será necesario contratar un mesero. Todo esto agregaría $500 al costo de la fiesta. Le pregunta a Joe que si el jardín estará listo para la fiesta. ¿Qué debe contestar Joe?

12-18 Greg Anderson es gerente de producto en una fábrica de alimentos. Al planear la introducción de un nuevo producto, ha preparado los siguientes datos sobre las tareas que deben realizarse:

		Normal		*Intensivo*	
Actividad	Predecesor	Tiempo, semanas	Costo, $	Tiempo, semanas	Costo, $
A	Ninguna	15	12 000	12	16 500
B	Ninguna	5	5 000	3	7 000
C	Ninguna	14	15 000	11	19 000
D	A	12	15 000	10	18 000
E	A	8	10 000	6	12 000
F	B	7	5 000	5	6 000
G	B	16	20 000	12	25 000
H	E, F	9	8 000	6	12 000
I	C, G	8	10 000	5	15 000

a Encuéntrese el costo mínimo para completar este proyecto en un tiempo mínimo.

b Greg sabe .que otras compañías están trabajando en un producto competidor. Estima que cada semana de retraso en sacar el nuevo producto costará a la firma $2 000 en ventas perdidas. ¿Cuál es la meta óptima de Creg en cuanto al tiempo de terminación?

12-19 La complejidad de las redes de CPM está más afectada por las interrelaciones que por el número de nodos. Por ejemplo, considérese el proyecto siguiente:

	Normal		*Intensivo*	
Actividad	*Tiempo, días*	*Costo, $*	*Tiempo, días*	*Costo, $*
1.2	6	1 000	5	1 500
1.3	15	1 200	10	2 200
1.4	14	1 600	10	1 800
2.3	8	900	7	1 300
2.5	20	1 500	18	2 300
2.6	25	2 000	20	2 500
3.4	5	600	3	1 200
3.5	12	2 000	8	4 000
4.5	6	500	5	700
4.6	18	2 500	15	3 000
5.6	18	3 000	15	4 800

a Existen 10 trayectorias en esta red. Encuéntrense todas.

b Con tiempos normales, encuéntrese la longitud de cada trayectoria. ¿Cuál es la ruta crítica?

c ¿Cuál es el costo mínimo intensivo para reducir el proyecto a 44 días? ¿a 43 días? ¿a 42 días?

d Encuéntrese la red de tiempo mínimo-costo mínimo.

12-20 La red que se describe a continuación tiene 13 actividades, 8 nodos y 7 rutas.

	Normal		*Intensivo*	
Actividad	*Tiempo, semanas*	*Costo, $*	*Tiempo, semanas*	*Costo, $*
1,2	8	10 000	7	12 000
1,3	15	12 000	10	17 000
1,4	12	13 000	6	14 000
2,3	9	7000	9	4000
2,5	11	2000	9	4000
3,6	9	5000	8	7000
4,3	9	14 000	7	16 000
4,7	13	8000	12	10 000
5,6	7	6000	5	10 000
5,8	15	9000	11	10 000
6,8	10	3000	5	8000
7,6	4	7000	3	8000
7,8	12	5000	9	6000
		101000		141000

a Identifíquese cada una de las siete trayectorias.

b Con tiempos normales encuéntrese la longitud de cada trayectoria. ¿Cuál es la ruta crítica?

c ¿Cuál es el costo mínimo para reducir la duración total del proyecto a 39 semanas? ¿a 38 semanas? ¿a 37 semanas?

d Encuéntrese el costo mínimo para completar la red en un tiempo mínimo.

ESTUDIO DE UN CASO: XYLON ELECTROFÜS

La Xylon Electronics es una empresa mediana que fabrica sistemas de seguridad para hogares y oficinas. Ha venido desarrollando una línea de sistemas de interfón que, se piensa, tienen mejor calidad y un costo más bajo que los productos competidores. La Xylon ha decidido ampliar sus instalaciones para dar lugar a la nueva línea.

Se formó un equipo de proyecto dentro de la compañía para dirigir y coordinar la expansión de la planta. Será un esfuerzo grande el duplicar el tamaño de las instalaciones y se espera que tarde 51 semanas. Antes que el proyecto, la administración desarrolló la siguiente lista de actividades requeridas:

Actividad	*Tiempo, semanas*	*Predecesor*
A Preparación del plan arquitectónico	10	–
B Construcción del edificio	35	A
C Desarrollo de las especificaciones de equipo	4	A
D Diseño y construcción del equipo	25	C
E Instalación y prueba de equipo	5	B, D
F Desarrollo de planes de personal	2	C
G Publicidad y contratación	4	F

Actividad	*Tiempo, semanas*	*Predecesor*
H Entrenamiento de personal	2	**G**
I Corrida de producción piloto	1 8	**E, H,L**
J Conclusión de la investigación de mercado	12	–
K Terminación del desarrollo del producto	4	–
L Conclusión del diseño de empaque	8	**J. K**
M Terminación del plan de comercialización		**J**

Se dieron a contrato la planeación arquitectónica y la construcción del edificio y el equipo, pero todas las demás actividades debía realizarlas la Xylon. El equipo de proyecto, formado por el jefe de proyecto y los supervisores de comercialización, construcción y equipo, se reunían semanalmente para coordinar las diferentes actividades y controlar el grado de avance del proyecto.

En la semana 30 los miembros del equipo elaboraron los informes que se muestran en seguida.

Comercialización "Todo está progresando bien en mi área. Como se sabe, ingeniería tuvo algunos problemas en el desarrollo debidos a retrasos en la obtención del equipo especial de prueba. El equipo llegó y esperan terminar en seis semanas. La semana pasada se inició la última investigación de mercado y se espera completarlas en el tiempo estimado. Con todo, parece que estamos en buena forma."

Construcción "Temo que la situación no es color de rosa para la construcción. Se ha tenido más lluvia que la anticipada y algunos retrasos en la obtención de materiales. El contratista, en un principio pensaba que estos retrasos se podían recuperar después, pero no ha sido así. Ahora el contratista nos ha dicho que la construcción se retrasará cuatro semanas, a menos que se traigan equipos y brigadas extra. Las estimaciones de costo para recuperar el tiempo son:

Reducción de	*Costo, $*
1 semana	3000
2 semanas	7000
3 semanas	14 000
4 semanas	22 000
5 semanas	30 000

Una cuestión está muy clara, debimos haber impuesto una cláusula más fuerte en el contrato para la penalización por retrasos. Como está, el contratista sólo tiene que pagar $1 000 por semana de retraso y no es práctico en este punto cambiar de contratista. Es necesario decidir pronto si el contratista debe acortar el tiempo de construcción."

Equipo "Ha habido algunos problemas con el nuevo equipo de fabricación, pero nada grave. Tenemos como dos semanas de retraso debido a algunos problemas de diseño. Éstos se han corregido y en adelante no se esperan dificultades. En lo sucesivo, nos ajustaremos al calendario."

Jefe de proyecto "Tal como va, el proyecto está retrasado. Comercialización, ¿cuáles son los efectos de nuestro retraso?

Comercialización "Bastante severo. Como se sabe, nuestra meta ha sido la temporada pico de construcción de casas. Si nos retrasamos, perderemos el pico. Estimaría que nuestras pérdidas por ingresos quedarían entre $10 000 y $20 000 por semana. Tomando un margen del 50% esto significa una pérdida de contribución de $5 000 a $10 000 por cada semana de retraso."

Jefe de proyecto "Una alternativa es llevar a cabo la prueba piloto en la planta actual. Habrá que mover algunos equipos y contratar un turno extra. Todo esto costaría alrededor de $4 000 pero salvaría una semana."

Equipo "Otra posibilidad es trabajar dos turnos para instalar el equipo. He hablado esto con las personas del contratista y estiman que se podrían recuperar dos semanas con un costo de $5 000 por cada una."

Preguntas

1 Dibújese un diagrama de redes para el proyecto original. Encuéntrese la ruta crítica y el tiempo de terminación del proyecto.
2 Dibújese una gráfica de Gantt para el proyecto, que muestre todas las actividades. Colóquese el tiempo de holgura en donde se considere más razonable dada la naturaleza de cada actividad.
3 Actualícese la gráfica de Gantt para mostrar el estado de cada actividad después de 29 semanas.
4 ¿Qué acción se recomienda que debe tomar el equipo del proyecto res pecto del retraso de tres semanas?

BIBLIOGRAFÍA

Cleland, D.I., y W.R. King: *Systems Analysis and Project Management,* 2ª ed. (New York: McGraw-Hill, 1975).

Davis, Edward W.: "CPM Use in the Top 400 Construction Firms," J. *Construction Div.,* ASCE, vol. 100 (Marzo 1974).

Ezell, D., V. Luchsinger, y B Kedia: "An Empirical Examination of PERT Utilization: What Project Managers Think and Why?" *Management in an Age of Complexity and Change* (Mississippi State, Miss.: Southern Management Association, 1977), pp. 38-40.

Loomba, N. Paul: *Management —*A *Quantitative Perpective* (New York: Macmiüan, 1978).

Martino, R. L.: *Critical Path Networks* (Wayne, Pa.: MDI Publications, 1967).

McMillan, C, y R. F. González: *Systems Analysis: A Computer Approach to Decision Models* (Homewood, 111.: Richard D. Irwin, Inc., 1973).

Moder. J. J., y C. R. Phillips: *Project Management with CPM and PERT,* 2ª ed. (New York: Van Nostrand-Reinhold, 1970).

Perry. C, e I. D. Greig: "Éstimating the Mean and Variance of Subjective Distributions in PERT and Decision Analysis,"Management *Science,* vol. 21, no. 12 (agosto 1975).

Pritsker, A.A.B., and CE. Sigal: *The GERT III Z User's Manual* (West Lafayette, Ind.: Pritsker and Associates, Inc., 1974).
Turban, E.: "The Line of Balance — A Management by Exception Tool," *The Journal of Industrial Engineering,* vol 19 (1968), pp. 440-448.
Vazsoni. A.: L'histoire de la grandeur et de la decadence de la méthode PERT," (impreso en Inglés) *Management Science,* vol. 16, no. 8 (abril 1970), pp. 449-455.
Weist, Jerome D., y Ferdinand K. Kevy: *A Management Guide to* PERT/CPM, 2ª ed. (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1977).

PARTE CUATRO

BALANCEO DE COSTO Y SERVICIO

13

SISTEMAS Y MODELOS DE INVENTARIOS

Cuando te queden sólo cuatro píldoras, ordena más.

Anónimo

Por falta de un clavo se pierde la herradura, Por falta de la herradura se pierde el caballo, Por falta del caballo se pierde el jinete.

George Herbert

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje
Clasificación de los sistemas de inventarios
Clasificación de los modelos de inventarios
Costos de inventarios
- Costo de compra
- Costo de ordenar
- Costo de conservación
- Costo de faltantes

Modelo del lote económico (EOQ)
- El modelo EOQ
- Ejemplo
- Sensibilidad
- Ejercicio de práctica (13-1)

Tres casos especiales
- EOQ con reabastecimiento uniforme
- Ejemplo
- EOQ con faltantes
- Ejemplo
- EOQ con descuentos por cantidad
- Ejemplo
- Ejercicios de práctica (13-2), (13-3), (13-4) Un modelo de periodo fijo de reorden
- Intervalo económico de reorden
- Ejemplo
- Ejercicio de práctica (13-5)

Resumen Ejercicios Bibliografía

La necesidad de los inventarios surge de las diferencias entre el tiempo y la localización de la demanda y el abastecimiento. Si hubiera un genio para producir lo que se deseara, en el momento y lugar que se deseara, no

habría inventarios. Desafortunadamente los genios están escasos, de manera que se usan los inventarios como amortiguador entre la oferta y la demanda. Esto ocurre ya sea que se piense en materia prima para un proceso de producción o en bienes terminados almacenados por el fabricante, el distribuidor o el comerciante.

Desde el punto de vista del cliente, el inventario de un artículo debe contener tantas unidades como puedan demandarse. De hecho, un artículo nunca debería quedar fuera de existencia. Generalmente, así sucede en el caso de la leche o el pan en una tienda de abarrotes o de los clavos en una tlapalería. Muy pocas veces sucede cuando se trata de automóviles nuevos y nunca ocurre en el caso de plantas generadoras nucleares. Los inventarios cuestan dinero. Representan capital inútil. Es claro que el costo de los automóviles nuevos y de las plantas nucleares es muy alto para permitir grandes inventarios. Pero aun la tienda o la tlapalería se preocupan en tener demasiado en inventario, lo que significa un desperdicio de capital. En cada uno de estos ejemplos es necesario un balance entre los costos de inventario y el servicio al cliente.

En la figura 13-1 se ilustran los conceptos de inventarios. La cantidad de inventario que se tiene se comporta de manera cíclica. Comienza en un nivel alto y la cantidad se reduce conforme se sacan las unidades. Cuando el nivel baja se coloca una orden, la cual al recibirse eleva de nuevo el nivel de inventario y el ciclo se repite. La cantidad de inventario se controla con el tiempo y la cantidad de cada orden. Así, las dos decisiones básicas en inventarios son:

Cuánto ordenar.
Cuándo ordenar.

Es conveniente dividir el estudio de los sistemas de inventarios en dos categorías: (1) demanda y tiempo de entrega deterministas y (2) demanda y/o tiempo de entrega probabilistas. En este capítulo se analiza la primera categoría en la cual tanto la demanda como el tiempo de entrega son conocidos y constantes. Los sisteman que tienen demanda o tiempo de entrega probabilistas incluyen incertidumbre y riesgo para el administrador. Estos sistemas se presentarán en el capítulo 14.

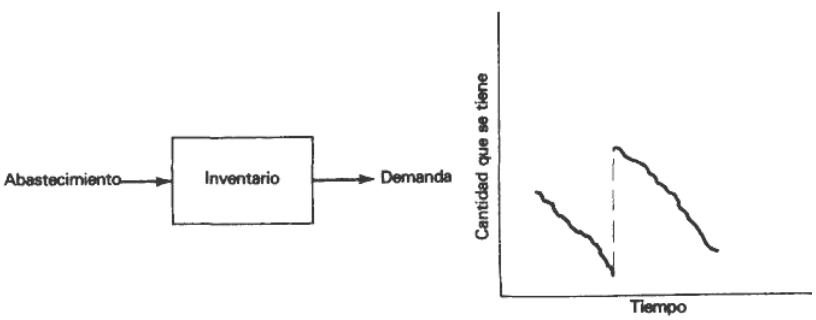


FIGURA 13-1 Conceptos de inventarios

Los sistemas de inventarios son tan variados e implican tantas consideraciones que sería imposible desarrollar modelos para todas las situaciones posibles. En este capítulo se desarrollan cinco modelos de inventarios y en el siguiente, tres más. Se han seleccionado estos modelos para ilustrar las consideraciones básicas de inventarios. Proporcionan, para cualquier aplicación específica, un punto de partida para el desarrollo de un modelo apropiado para ese caso.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Después de estudiar este capítulo debe saberse:

1 Los tres tipos principales de sistemas de inventarios.
2 Las dos clases más importantes de modelos de inventarios.
3 Cómo encontrar el lote económico (EOQ).
4 Tres modelos especiales basados en el de lote económico EOQ.
5 Un modelo de periodo fijo basado en el EOQ.
6 El significado de los siguientes términos:

Modelo de cantidad fija de reorden	Tiempo de entrega
Modelo de periodo fijo de reorden	Costo de conservación
Lote económico	Costo de faltantes
Costo de ordenar	

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE INVENTARIOS

Existen tres tipos importantes de inventarios:

a Orden repetitiva, demanda independiente
b Una sola orden, demanda independiente
c Orden repetitiva, demanda dependiente

Tanto en este capítulo como en el siguiente se analiza el primer tipo de sistemas. Ésta es la situación más común en el mundo administrativo. Los sistemas de una sola orden, como la de árboles de Navidad o de artículos de una promoción pueden analizarse con matrices de pago (véase el capítulo 4). Los sistemas con demanda dependiente surgen más bien en procesos de manufactura en donde la demanda de partes *depende* de la demanda del artículo terminado. La planeación de requerimientos de material (MRP) es el nombre que se le da a este tipo de análisis. MRP se presenta en forma breve en el siguiente capítulo.

Otra forma de clasificar los sistemas de inventarios es por su relación con la secuencia completa de operaciones de producción. Con este método pueden distinguirse cuatro tipos de inventarios:

a Abastecimientos
b Materiales
c En proceso
d Bienes terminados

Los *abastecimientos* o suministros incluyen artículos de consumo, como papel, lápices y formas de memorándum. Los *materiales* se refieren a artículos necesarios para completar algún producto terminado y casi siempre tienen una demanda dependiente. Los artículos *en proceso* son bienes parcialmente terminados y el producto final del proceso son los *bienes terminados.*

La predecibilidad de la demanda también es importante para clasificar los sistemas de inventarios. En este capítulo se presentan los sistemas que tienen demanda constante, como de artículos de consumo (pan, automóviles, lavadoras de ropa) o que incluyen un contrato de plazo largo. En el capítulo 14 se analizan los sistemas con demanda aleatoria variable en que la demanda real en algún periodo futuro no puede predecirse con certeza. Si se conoce la distribución de probabilidad, entonces puede analizarse el sistema.

El *tiempo de entrega* es la diferencia entre el momento en que se coloca una orden y el momento en que se recibe. En muchos casos esto será más o menos predecible y puede suponerse constante. Sin embargo, si varía aleatoriamente, causa las mismas dificultades analíticas que la demanda variable. Por esta razón, se supondrá en este capítulo tiempo de entrega constante y se dejarán los tiempos de entrega probabilistas para el siguiente.

CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS DE INVENTARIOS

Los modelos de inventarios pueden agruparse en dos grandes categorías:

1 Modelos de cantidad fija de reorden
2 Modelos de periodo fijo de reorden

El manejo de un modelo de cantidad fija de reorden se muestra en la figura 13-2. La demanda se satisface a partir del inventario que se tiene. Si éste no es adecuado, entonces la orden se satisface después o la venta se pierde. Cada vez que se hace un retiro, el balance del inventario se ajusta para mostrar continuamente (o perpetuamente) el estado actual. (Este tipo de sistemas también se conoce como *sistema perpetuo.)* Cuando el inventario baja a un *punto de reorden* establecido, se coloca una orden de reabastecimiento. Como las órdenes de reabastecimiento son siempre por la misma cantidad, éste se llama modelo de cantidad fija de reorden.

El modelo de periodo fijo de reorden se muestra en la figura 13-3. De nuevo la demanda del cliente se satisface con el inventario que se tiene y los faltantes traen como resultado ya sea el satisfacerlos después o la pérdida de la venta. Pero aquí no existe una actualización perpetua de los registros de inventario. En su lugar, se hacen revisiones periódicas a intervalos fijos de tiempo. Cuando se hace una revisión, la cantidad que se tiene (más la cantidad ordenada menos los faltantes) se compara con el máximo deseado y se hace un pedido por la diferencia.

Ambos modelos responden a las preguntas básicas de cuándo y cuánto ordenar. Difieren en que cada uno proporciona una respuesta fija a una pregunta y una respuesta variable a la otra.

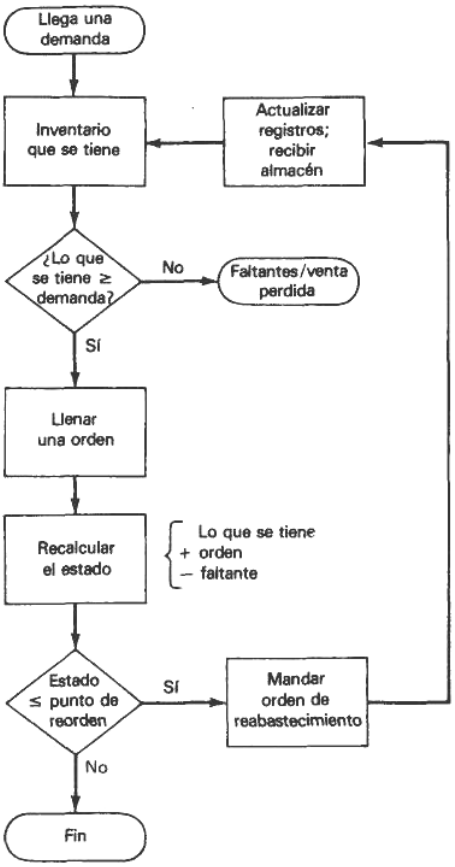


FIGURA 13-2
Modelo de cantidad fija de reorden.

COSTOS DE INVENTARIOS

Para el administrador, los inventarios son un beneficio mixto. Se incurre en costos al adquirir bienes y mantener el inventario, consumiendo recursos que pueden invertirse publicidad o investigación. Por otro lado, se mejora el servicio al cliente al tener un artículo en almacén siempre que lo demande. El reto para el administrador es alcanzar el nivel deseado de servicio al cliente a un costo mínimo. En esta sección se describen los cuatro costos diferentes asociados con un inventario.

Costo de compra

Es claro que el costo de la compra de un artículo es importante. Esto incluye el precio de un artículo más los impuestos del caso y los costos de transporte. Si la compañía produce el artículo, entonces el costo completo que debe incluirse se llama *costo de producción.* Para simplificar la terminología, se usará *precio* como sinónimo de costo de compra o costo de producción.

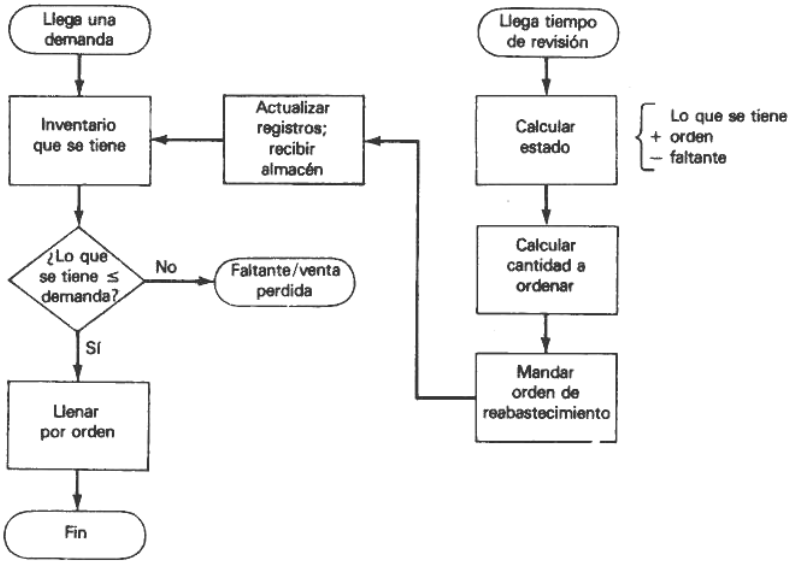


FIGURA 13-3
Modelo de periodo fijo de reorden.

Costo de ordenar

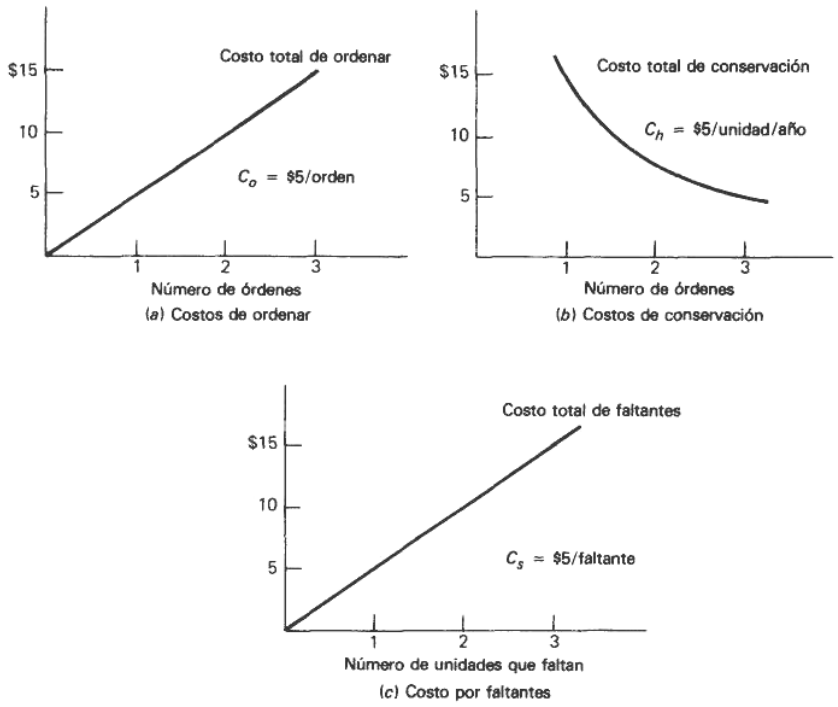
Siempre cuesta algo hacer un pedido. Si uno se queda sin pan en casa y recorre 5 millas a una tienda, el costo de ordenar es $1.50 (10 millas del viaje redondo x 15 centavos la milla). En los negocios, los costos de ordenar incluyen la mano de obra para preparar la orden, las formas usadas, timbres de correo, llamadas telefónicas y cualquier otro costo directo. Muy pocas compañías pueden preparar una orden por menos de $4. Si el artículo se hace a la medida y es caro, la preparación de las especificaciones (parte del costo de ordenar) puede costar miles de dólares. Si el artículo se produce internamente, el costo de ordenar incluirá todos los costos de preparación.

El comportamiento de los costos de ordenar se muestra en la figura 13-*4a*. El costo por orden permanece constante y los costos totales aumentan linealmente con el número de órdenes.

Costo de conservación

Esta categoría incluye varios costos. Uno es el almacenamiento físico de cada artículo. Esto puede ser bajo para partes pequeñas pero alto para artículos grandes. La refrigeración aumentaría el costo. Otro costo se debe a la calidad de perecedero. Artículos de comida pueden echarse a perder en inventario. También, la absolenscencia tecnológica puede depreciar el valor de un inventario. El clima puede causar oxidación en partes metálicas. Finalmente, se incurre en costos de conservación al tener el capital inmóvil en un inventario en lugar de otro tipo de inversión. Éste es un costo de oportunidad, pero es real. En general, los costos anuales de conservación de un inventario van del 15 al 45% del valor promedio del mismo.

FIGURA 13-4
Comportamiento del costo de inventarios.



En la figura 13-46 se muestran los costos de conservación. El costo total es el producto del costo unitario de conservación por el nivel de inventario promedio. Si el número de órdenes crece, el inventario promedio decrece, con lo cual se reducen los costos totales de conservación. Puede imaginarse que el número de órdenes se aumenta hasta que se hace un pedido por cada unidad que se demanda, en este punto no existe ningún inventario.

Costo de fallantes

Cuando no se tiene a la mano un artículo, un cliente se va insatisfecho. Se ha perdido una venta y también algo de la buena voluntad. Esto puede no causar mucho daño si se permiten faltantes, es decir, si la demanda puede satisfacerse después. Muy pocos clientes que desean un automóvil nuevo esperan encontrarlo en la distribuidora; lo que esperan es hacer un pedido. Sin embargo, éste no es el caso si se trata de abarrotes o de la mayoría de los artículos que se venden en las tiendas de departamentos. Si el artículo es una parte de fabricación, es posible que tenga que detenerse toda una línea de ensamble.

En cada uno de estos casos la falta del artículo causa un costo de oportunidad. Este costo tiende a variar linealmente con el número de unidades que faltan (véase la figura 13-4c), aunque casi siempre es difícil determinar la cantidad exacta. Nótese que no existe una relación directa entre el número de órdenes y el costo total de faltantes.

MODELO DEL LOTE ECONÓMICO (EOQ)

El primer modelo de inventarios que se considerará es un modelo de cantidad fija de reorden. Con este tipo de modelo es necesario determinar la cantidad fija que se debe ordenar cada vez y un punto de reorden que indique cuándo se debe hacer el pedido. Para simplificar el análisis se harán las siguientes suposiciones:

1 La demanda es uniforme (constante y continua)
2 El abastecimiento se recibe todo junto, no en partes (global)
3 El tiempo de entrega es constante
4 Todos los costos son constantes

Aunque estas suposiciones muy pocas veces, si es que alguna, son ciertas a la larga, con frecuencia son aproximaciones razonables a corto plazo.

El modelo del lote económico (EOQ) se desarrolló en particular para esta situación. Es un modelo muy antiguo que data de 1915, fecha en la que F. W. Harris lo desarrolló, y se aplica ampliamente.

El modelo EOQ

Un enfoque común para desarrollar los modelos de inventarios es obtener una expresión matemática para los costos totales y después buscar el mínimo. Para hacer esto es necesario conocer el abastecimiento, la demanda, el inventario promedio y los costos. Con base en las cuatro suposi-

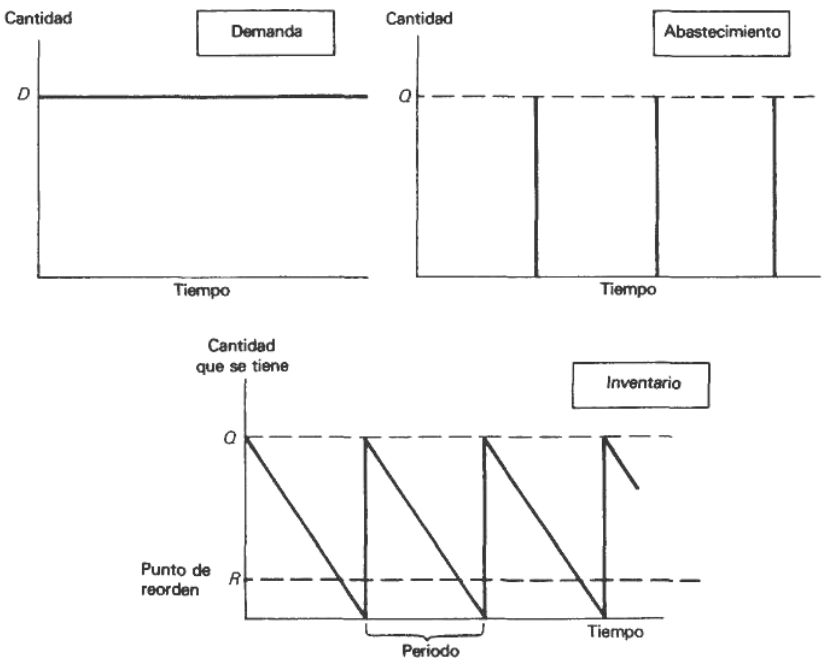


FIGURA 13-5
Abastecimiento, demanda y nivel de inventario.

ciones anteriores, en la figura 13-5 se muestran el abastecimiento, la demanda y el nivel de inventario a través del tiempo.

La demanda es uniforme con D unidades por unidad de tiempo. Se reciben Q unidades de abastecimiento global. El nivel de inventario comienza en un punto pico de Q unidades y declina en forma estable hasta un punto de reorden *(R),* en este momento se coloca una nueva orden de Q unidades. Cuando se recibe la orden, el nivel de inventario regresa a su punto pico y el ciclo se repite. Como el tiempo de entrega es constante, no hay razón para que ocurran faltantes. Puede omitirse el costo de compra, ya que también es constante (no hay descuentos por cantidades grandes).

Los únicos costos que se van a considerar son el costo de ordenar y el costo de conservación. Así:

Costo total de inventario = costo de ordenar + costo de conservación

En general se usa un año de operación como el periodo de análisis del inventario. Se pondrá todo en una base anual, aunque puede usarse cualquier periodo (semana, mes, día).

Observando primero el costo de ordenar:

Costo anual de ordenar = número de órdenes x costo de una sola orden

Si la demanda total anual es D unidades por año y se están ordenando Q unidades cada vez, entonces:

$$\text{Número de órdenes por año} = \frac{D}{Q}$$

Si C_o representa el costo de dólares de una orden:

$$\text{Costo anual de ordenar} = \frac{D}{Q}C_o$$

Ahora considérese el costo anual de conservación. Este sería:

Costo anual de mantener = inventario promedio x costo de conservación/unidad/año

Supóngase por un momento que pueden combinarse los costos de almacenamiento, obsolescencia y de capital invertido en un solo costo de conservación del inventario C_h. Queda la tarea de determinar el nivel de inventario promedio. Para cualquier patrón triangular como el del inventario de la figura 13-5, el promedio en un periodo de un año es la mitad de la altura máxima. Como esta altura es Q, el nivel de inventario promedio es $Q/2$ y:

$$\text{Costo anual de conservación} = \frac{Q}{2}C_h$$

Ahora puede expresarse el costo total como:

$$\text{Costo anual de inventario} = \frac{D}{Q} C_o + \frac{Q}{2} C_h \qquad (13\text{-}1)$$

¿Cómo se encuentra el mínimo? Para cualquier valor dado de D, C_o y C_h, puede encontrarse, por prueba y error, el valor de Q que minimice el costo total. La fórmula EOQ (13-2) se derivó por cálculo, pero no entra en el objetivo de este texto. Sin demostración, los costos totales se minimizan cuando la cantidad que se ordena cada vez es:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}} \qquad (13\text{-}2)$$

en donde D = demanda por año en unidades
C_o = costo de ordenar por orden en dólares
C_h = costo de conservación por unidad por año en dólares
Q = cantidad a ordenar en unidades

Esta fórmula da la cantidad óptima que se debe ordenar cada vez que se hace un pedido. ¿Qué pasa con el punto de reorden? Como se supuso que el tiempo de entrega es constante, sólo se tiene que igualar el punto de reorden y la demanda que ocurrirá durante el periodo de entrega. Esto se llama *demanda de tiempo de entrega.* Matemáticamente,

si L = tiempo de entrega en días
D = demanda anual
R = punto de reorden

entonces $$R = \frac{DL}{365} \text{ unidades} \qquad (13\text{-}3)$$

La única advertencia que debe hacerse es que la demanda y el tiempo de entrega tienen que estar en la misma escala de tiempo.

Ejemplo

Considérese un fabricante que necesita 2 000 partes pequeñas durante el próximo año. El costo de las unidades es $5 cada una. Se tienen disponibles en la localidad con un tiempo de entrega de 1 semana, pero el costo de ordenar para el fabricante es de $5 por orden. El costo de conservación es $1.50 al año por almacenamiento, más 10% por unidad por año por el costo de oportunidad del capital. ¿Cuántas unidades debe ordenar el fabricante con el fin de minimizar los costos totales de inventario? De los datos del problema se tiene:

D = 2 000 unidades por año
C_o = $5 por unidad
C_h = $1.50 + (10%)($5) = $2.00 por unidad por año

Aplicando la ecuación (13-2):

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}}$$
$$= \sqrt{\frac{2(2\,000)(5)}{2}}$$
$$= \sqrt{10\,000}$$
$$Q = 100 \text{ unidades}$$

El punto de reorden es:

$$R = \frac{LD}{365} = \frac{(7)(2\,000)}{365} = 38 \text{ unidades}$$

Entonces, la política será ordenar 100 unidades siempre que el inventario baje a 38. El costo total anual será:

$$\text{Costo anual de inventario} = \frac{D}{Q}C_o + \frac{Q}{2}C_h = \frac{2\,000}{100}(5) + \frac{100}{2}(2)$$

Nótese que esto no incluye el costo de compra de las unidades. ¿Cuántos pedidos se harán en un año?

$$\text{Número de órdenes} = \frac{D}{Q} = \frac{2\,000}{100} = 20 \text{ órdenes}$$

¿Cuántos días calendario habrá entre las órdenes? Si se usan 365 días por año:

$$\text{Días entre órdenes} = \frac{365}{\text{número de órdenes}} = \frac{365}{20} = 18 \text{ días}$$

Esto también se llama *días para abastecimiento* o *periodo de orden.*

Sensibilidad

El modelo EOQ es un resultado fundamental y el más importante en la teoría de inventarios. Representa las relaciones clave que son vitales para el control apropiado de inventarios. En la figura 13-6 se muestra una de estas relaciones. Con los datos del ejemplo anterior, en la figura 13-6 se muestra que el costo de inventario óptimo (mínimo) ocurre cuando el costo de ordenar anual es igual que el costo de conservación anual. Esto siempre es cierto para el modelo EOQ, pero puede no ser el caso para otros modelos. Nótese que el costo total no es muy sensible cerca del punto óptimo. Es decir, los costos totales están por debajo de $250 para cualquier número de órdenes entre 10 y 40. Esto corresponde a un intervalo para la cantidad

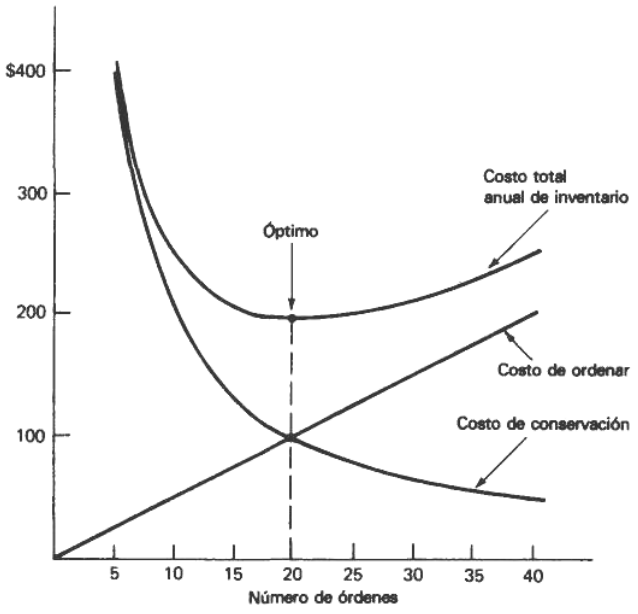


FIGURA 13-6
Costo anual de inventario

que se debe ordenar de 200 unidades hasta 50 unidades. Esto se vuelve importante al estimar los costos de conservación u ordenar. En el peor de los casos un error del 100% en cada uno de estos costos cuando mucho causaría un 25% de aumento en los costos totales de inventario.

En la figura 13-7 se muestra otra relación importante, la que media entre la cantidad que se debe ordenar y la demanda. Usando de nuevo los datos del ejemplo, la demanda se debe cuadruplicar (a 8 000), sólo para tener que duplicar la cantidad que se debe ordenar. Es decir, un 100% de aumento en la demanda causa sólo un 40 % de aumento en la cantidad que se debe ordenar. Como el nivel de inventario promedio es la mitad del EOQ, esto significa que no se tiene que duplicar el inventario para satisfacer la doble demanda; sólo se necesita un 40% de aumento. Esto muestra las

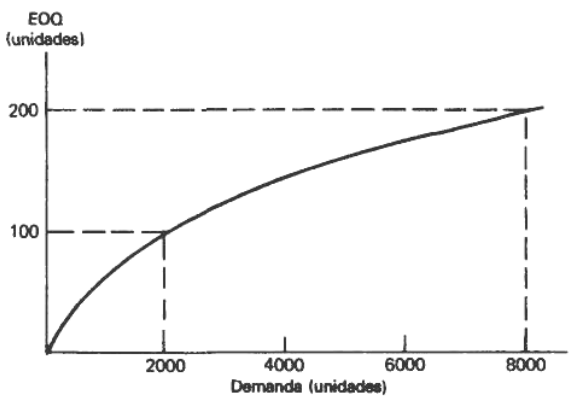


FIGURA 13-7
Demanda contra EOQ

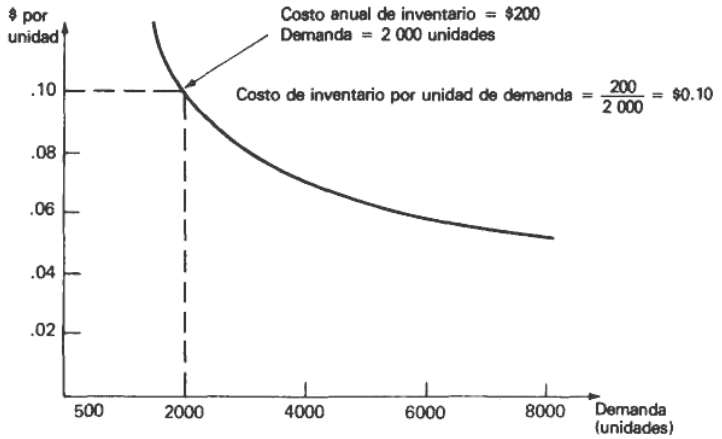


FIGURA 13-8
Costo de inventario por unidad de demanda.

ventajas del balance en los inventarios. La figura 13-8 representa este mismo efecto en términos del costo de inventario por unidad de demanda.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 13-1

Si la demanda de un artículo es uniforme de 9 000 unidades por año, el costo de ordenar es $2.50 por orden y el costo de conservación es $2 por unidad por año:

a Encuéntrese el tamaño del lote económico.
b ¿Cuántas órdenes se harán en un año?
c ¿Cuántos días de abastecimiento se ordenan cada vez?
d Si cada unidad cuesta $7, ¿cuál es el EOQ por orden?
e ¿Cuál es el costo de inventario anual?
f Si el tiempo de entrega es 3 días, ¿cuál es el punto de reorden

TRES CASOS ESPECIALES

El modelo EOQ puede ampliarse para cubrir una gran variedad de casos especiales. En esta sección se describen tres de estos casos: abastecimiento uniforme en lugar de global, cuando se admiten faltantes y con descuentos por cantidad. Como se tiene un interés primordial en los conceptos, cada caso se considera por separado. En cada uno se alteran los cálculos de la cantidad fija de reorden. Sin embargo, la suposición de tiempos de entrega constantes sigue en pie, para que el punto de reorden pueda encontrarse con la ecuación (13-3).

EOQ con reabastecimiento uniforme

El inventario de bienes terminados de un fabricante no se abastece de golpe con una cantidad global. Los bienes llegan uno a uno conforme salen

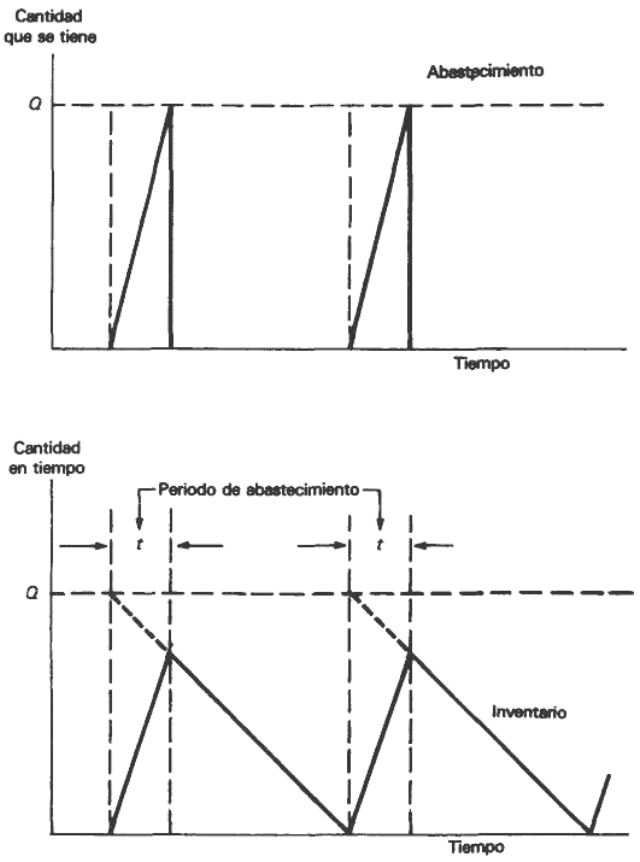


FIGURA 13-9
EOQ con abastecimiento uniforme.

de la línea de ensamble. De hecho, el reabastecimiento es uniforme como lo es la demanda supuesta por el modelo EOQ. La tasa de reabastecimiento debe ser mayor que la tasa de demanda; de otra manera, no habría inventario. En la figura 13-9 se presenta un diagrama de esta situación.

Durante el período de reabastecimiento, el inventario crece con una tasa igual que la diferencia entre las tasas de demanda y de abastecimiento. El nivel de inventario máximo se alcanza después de un tiempo *t,* es decir:

$$\text{Inventario máximo} = (S - D)t$$

en donde D = tasa de demanda (unidades/año)
S = tasa de abastecimiento (unidades/año)
t = periodo de reabastecimiento (años)

Entre los periodos de reabastecimiento, el inventario decrece con una tasa D de demanda.

Se planea desarrollar una ecuación para el costo total de inventario similar a la ecuación (13-1). Para esto es necesario expresar el nivel de inventario máximo en términos de la cantidad que se va a ordenar Q. Será

suficiente una pequeña manipulación algebraica. Sea T el periodo para ordenar; se sabe que en cada período la cantidad de reabastecimiento es igual que la cantidad que se demanda, o sea,

$$St = DT$$
$$t = \frac{DT}{S}$$

Recuérdese que

$$T = \frac{Q}{D}$$

Recuérdese que Entonces,

$$t = \frac{D}{S}\left(\frac{Q}{D}\right) = \frac{Q}{S}$$

$$\text{Nivel de inventario máximo} = (S - D)t$$
$$= (S - D)\left(\frac{Q}{S}\right)$$
$$= Q\left(1 - \frac{D}{S}\right)$$

Ahora se continuará con los costos totales.

Los costos de reordenar anuales son los mismos que en el modelo básico $\frac{D}{Q} C_0$. Los costos anuales de conservación están basados en el inventario promedio; este promedio es la mitad de la altura máxima. Entonces;

$$\text{Costo anual de conservación} = \frac{1}{2}Q\left(1 - \frac{D}{S}\right)C_h$$

Así, el costo total de inventario se convierte en:

$$\text{Costo total de inventario} = \frac{D}{Q}C_o + \frac{1}{2}Q\left(1 - \frac{D}{S}\right)C_h$$

Usando el cálculo puede demostrarse que la cantidad óptima que debe ordenarse está dada por:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h\left(1 - \frac{D}{S}\right)}} \qquad (13\text{-}4)$$

El único cambio que sufrió la ecuación básica del EOQ (13-2) es la presencia del factor $\left(1 - \frac{D}{S}\right)$ en el denominador.

Ejemplo

Recuérdese el ejemplo del EOQ con:

$$D = 2\,000 \text{ unidades por año}$$
$$C_o = \$5 \text{ por orden}$$
$$C_h = \$2 \text{ por unidad por año}$$

Supóngase que el reabastecimiento es uniforme con una tasa de 4 000 unidades por año. Entonces,

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h\left(1-\frac{D}{S}\right)}} = \sqrt{\frac{2(2\,000)(5)}{2\left(1-\frac{2\,000}{4\,000}\right)}} = \sqrt{20\,000} = 141 \text{ unidades}$$

y

$$\begin{aligned}\text{Costo anual de inventario} &= \frac{D}{Q}C_o + \frac{Q}{2}\left(1-\frac{D}{S}\right)C_h \\ &= \frac{2\,000}{141}(5) + \frac{(141)}{2}\left(1-\frac{2\,000}{4\,000}\right)(2) \\ &= 70.5 + 70.5 = \$141\end{aligned}$$

Es interesante comparar estos resultados y los obtenidos cuando el reabastecimiento es global. Con el abastecimiento uniforme, se hacen pedidos más grandes y los costos son menores, como se muestra en la tabla 13-1. La razón es que durante el periodo de reabastecimiento algunas unidades que se reciben se distribuyen de inmediato para satisfacer la demanda. Esto reduce los costos de conservación.

EOQ con faltantes

Si los clientes aceptan que haya faltantes, es decir, que su pedido se satisfaga después, cuando no se tiene un artículo en almacén, entonces la venta no se pierde. Bajo esta condición, el inventario puede reducirse. En el límite no se tendría ningún inventario. Se supondrá, entonces, que a cada unidad faltante se le asocia un costo agregado por faltantes, de manera que se desea tener algún inventario. Los costos anuales de inventario comprenderán ahora los costos de ordenar, los de conservación y los de

TABLA 13-1
Comparación de abastecimiento uniforme y global

	Abastecimiento	
	Uniforme	*Global*
Cantidad que se debe ordenar	141*	100
Costo anual de inventario	$141	$200

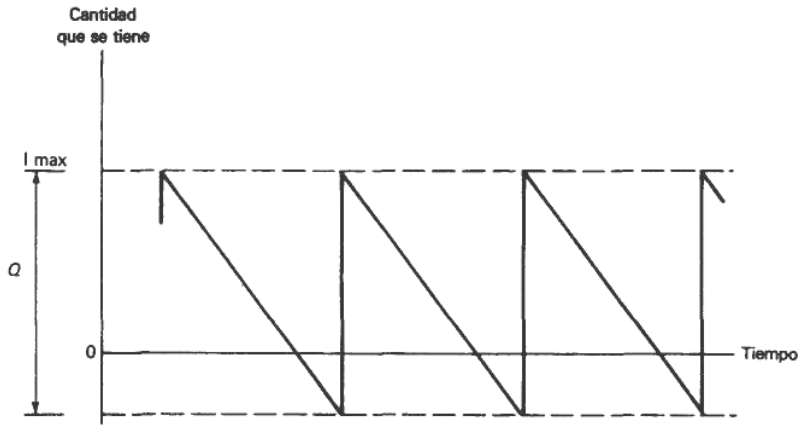


FIGURA 13-10
EOQ con faltantes

faltantes. Se supondrá también que, los reabastecimientos se reciben todos juntos (o de golpe).

Según la figura 13-10, se deben determinar dos cantidades, Q *y* el nivel, de inventario máximo, I_{max}. No se describirá cómo se derivan los resultados, pero éstos son:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h k}} \qquad (13\text{-}5)$$

$$I_{max} = kQ \qquad (13\text{-}6)$$

$$\text{Costo anual de inventario} = \frac{D}{Q}C_o + \frac{Q}{2}C_h k^2 + \frac{Q}{2}C_s(1-k)^2$$

$$\text{en donde } k = \frac{C_s}{C_h + C_s}$$

C_s = costo por faltantes (dólares por unidad) ,
I_{max} = nivel de inventarío máximo (unidades)

Según el factor *k,* puede observarse que, al tiempo que el costo por faltantes sobrepasa el costo de conservación, *k* tiende a la unidad, lo cual reduce los faltantes. Si los costos de conservación y por faltantes son iguales, entonces $k = 1/2$, y la mitad de todas las unidades se surtirán después, es decir, serán faltantes.

Ejemplo

Continuando c -m el mismo ejemplo, sea $2 el costo por faltantes por unidad. Entonces,

[1] Véase Richard E. Trueman, *An Introduction to Quantitative Methods for Decision Making* (New York: Holt, 1974), pp. 456-457.

D = 2 000 unidades por año
C_o = \$5 por orden
C_h = \$2 por unidad por año
C_s = \$2 por unidad que falta

Sustituyendo en las ecuaciones (13-5) y (13-6)

$$k = \frac{C_s}{C_h + C_s} = \frac{2}{2 + 2} = 0.5$$

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{c_h k}} = \sqrt{\frac{2(2\,000)(5)}{(2)(0.5)}} = \sqrt{20\,000} = 141 \text{ unidades}$$

$$I_{\max} = kQ = 0.5Z(1.41) = 70.5 \text{ o } 71 \text{ unidades}$$

$$\text{Costo anual de inventario} = \frac{D}{Q}C_o + \frac{Q}{2}C_h k^2 + \frac{Q}{2}C_s(1 - k)^2$$

$$= \frac{(2\,000)}{141}(5) + \frac{141}{2(2)(0.5)^2} + \frac{141}{2}(2)(1 - 0.5)^2$$

$$= 70.5 + 35.25 + 35.25$$

$$= 70.5 + 70.5 + \$141$$

EOQ con descuentos por cantidad

Otra situación típica surge cuando se tiene la oportunidad de recibir un descuento en la compra de una cantidad grande. Puede ser que el costo de tener un inventario adicional quede más que compensada reduciendo el costo de compra. La forma más directa de saber si se deben ordenar cantidades grandes es comparar el aumento en los costos de inventario con el ahorro en el costo de compra. No se necesitan fórmulas nuevas; simplemente se aplican las que ya se describieron. Esto puede hacerse de la siguiente manera:

1 Encuéntrese el EOQ con el precio base. Nótese que, si el EOQ es mayor que la cantidad mínima de descuento, el problema está resuelto. Simplemente se calcula otra vez el EOQ con el precio de descuento y se ordena esa cantidad. Suponiendo que el EOQ con el precio base es menor que el nivel de descuento, se procede al paso 2.
2 Calcúlese el costo anual de inventario y el costo anual de compra, suponiendo el precio base.
3 Calcúlese el ahorro en el costo anual de compra con el precio de descuento.
4 Suponiendo que se ordena la cantidad mínima de descuento, calcúlese el aumento en el costo anual de inventario. Compárese esto con el ahorro anterior y selecciónese la opción de menor costo.

Si resulta que la cantidad de descuento es menos costosa, se debe recalcular el EOQ, con el precio de descuento para comprobar si se debe pedir más que la cantidad mínima.

En el caso de que existan precios de descuento múltiples, el procedimiento anterior debe repetirse para cada precio de descuento con el fin de encontrar la cantidad que debe ordenarse de precio mínimo.

Ejemplo

Supóngase que el proveedor del ejemplo del modelo básico EOQ ofrece un 5 % de descuento si se ordenan 200 unidades o más. Recuérdese que el precio base unitario era $5 y que la demanda anual era 2 000 unidades. El ahorro en el costo de compra es:

Precio base: costo total de compra = $5 x 2 000 = $10 000
Precio de descuento: costo total de compra = $5(0.95)(2 000) = $9 500
Ahorro $ 500

Ahora se compara el costo anual de inventario. Primero, con el precio base, se encontró que el EOQ era

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(2\,000)(5)}{2}} = 100 \text{ unidades}$$

$$\text{Costo anual de inventario} = \frac{D}{Q}C_o + \frac{Q}{2}C_h$$

$$= \frac{2\,000}{100}(5) + \frac{100}{2}(2) = \$200$$

Si se acepta el descuento, el tamaño de la orden debe ser por lo menos 200, es decir, $Q \geq 200$. También el costo de conservación quedará afectado, ya que:

$$C_h = 1.50 + 0.1 \times \text{precio (del ejemplo de la p.)}$$
$$= 1.50 + 0.1(5)(0.95) = 1.50 + 0.475 = \$1.975$$

Con $Q = 200$,

$$\text{Costo anual de inventario} = \frac{2\,000}{200}(5) + \frac{200}{2}(1.975)$$
$$= 50 + 197.5 = \$247.50$$

Nótese que el costo de ordenar decrece, pero el costo de conservación aumenta. El aumento neto en el costo de inventario es:

$$\begin{array}{r} \$247.50 \\ -200 \\ \hline \$\ 47.50 \end{array} \quad \text{costo aumentado}$$

Como esto es mucho menos que $500 de ahorro en el costo de compra, se debe aumentar la cantidad de la orden para obtener el descuento.

Debe llevarse a cabo un paso más. Recalcúlese el EOQ con el costo de conservación menor, basado en el precio de descuento.

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(2\ 000)(5)}{1.975}} = \sqrt{10.127} = 100.6$$

Esta cantidad todavía es menor que la cantidad mínima de descuento, por tanto, no hay ahorro al ordenar más de 200.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

13-2 Resuélvase de nuevo el ejercicio de práctica (13-1) suponiendo que el abastecimiento es uniforme. Supónganse 12 000 unidades por año como la capacidad de abastecimiento.

13-3 Resuélvase de nuevo el ejercicio de práctica (13-1) suponiendo que se permiten faltantes. Supóngase $1.00 como costo de faltantes. En (a) encuéntrese I_{max} y Q.

13-4 Resuélvase de nuevo el ejercicio de práctica (13-1) suponiendo que se ofrece un 1 % de descuento en órdenes de 300 unidades o más. En (a) deberá encontrarse la cantidad de reorden de costo mínimo.

UN MODELO DE PERIODO FIJO DE REORDEN

Con los modelos de periodo fijo de reorden se determina un intervalo fijo óptimo para llevar a cabo las revisiones del inventario. Entonces, cada vez que se hace un pedido se ordena la diferencia entre algún máximo y la cantidad que se tiene. Se harán las mismas cuatro suposiciones que se hicieron para el modelo básico EOQ: demanda uniforme, abastecimiento global, tiempo de entrega constante y costos constantes. Bajo estas suposiciones se encontrará que el modelo de periodo fijo de reorden óptimo es el mismo que el modelo EOQ que se encontró antes, excepto que este recibe el nombre de *intervalo económico* de reorden (EOI).

Intervalo económico de reorden

En la figura 13-11 se muestra el inventario que se tiene. El inventario disminuye en respuesta a la demanda. Cuando se hace la revisión se coloca un pedido por la diferencia entre M (el máximo) y la cantidad que se tiene. Al recibirse, el inventario se reestablece en su máximo. La primera tarea es encontrar el intervalo óptimo de reorden (T).

El método para encontrar T es el mismo que se empleó para encontrar EOQ: se minimiza el costo total anual de inventarío. Como se tienen las mismas suposiciones, puede aplicarse la ecuación (13-1):

$$\text{Costo anual de inventario } \frac{D}{Q}C_o + \frac{Q}{2}C_h$$

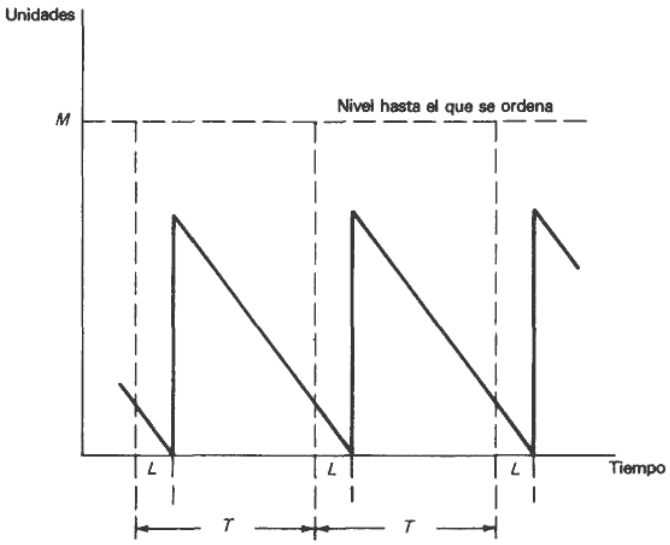


FIGURA 13-11
Intervalo económico de reorden.

Sería mejor tener T en esta ecuación en lugar de Q. Esto puede arreglarse sustituyendo:

$$T = \frac{D}{Q}$$

o,

$$Q = TD$$

Entonces,

$$\text{Costo anual de inventario} = \frac{D}{TD}C_o + \frac{TD}{2}C_h$$
$$= \frac{C_o}{T} + \frac{TD}{2}C_h$$

Este costo se minimiza cuando el periodo de reorden es:

$$T = \sqrt{\frac{2C_o}{DC_h}} \qquad (13\text{-}7)$$

en donde T = intervalo económico de reorden en años
D = demanda anual en unidades
C_o = costo de ordenar en dólares por orden
C_h = costo de conservación en dólares por unidad por año

Para completar el modelo, es necesario encontrar M, el máximo. Éste se conoce como el *punto hasta el que se ordena.* Este nivel depende del tiempo de entrega. Lógicamente, las revisiones periódicas se deben programar

con tiempo suficiente para permitir que se haga un pedido *y* que se reciba antes de quedarse sin artículos en el almacén. Esto significa que *M* debe ser igual que la cantidad que se usa a través de un periodo más una cantidad igual que la demanda del tiempo de entrega. Entonces:

$$M = TD + LD = D(T + L) \tag{13-8}$$

en donde T = intervalo económico de reorden en años
D = demanda anual en unidades
L = tiempo de entrega en años

Nótese que *T, D* y L deben tener las mismas unidades de tiempo.

Ejemplo

Se volverá al primer ejemplo de este capítulo. Recuérdese que

D = 2 000 unidades por año
C_o = \$5 por orden
C_h = \$2 por unidad por año
L = 7 días

Aplicando la ecuación (13-7):

$$T = \sqrt{\frac{2C_o}{DC_h}} = \sqrt{\frac{2(5)}{(2\,000)(2)}}$$
$$= 0.05 \text{ años}$$

Para convertir esto en días:

$$365T = 365(0.05) = 18 \text{ días}$$

El punto hasta el que se ordena es:

$$M = D(T + L)$$
$$= (2\,000)\left(0.05 + \frac{7}{365}\right)$$
$$= 138 \text{ unidades}$$

En el ejemplo anterior se encontró un EOQ de 100 unidades y un punto de reorden de 38 unidades. El punto hasta el que se ordena es el mismo que la suma de estos dos valores. Como se mencionó antes, los modelos EOQ y EOI son idénticos bajo las suposiciones hechas. Se les ha dado diferentes nombres, porque se aplican de manera distinta.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 13-5

Encuéntrese el periodo de reorden y el punto hasta el que se ordena usando los datos que se dan en el ejercicio de práctica (13-1).

RESUMEN

Los inventarios constituyen una inversión cuantiosa para muchas compañías, en especial los fabricantes, los distribuidores y las tiendas. Entonces, es importante minimizar los costos de inventario sin dejar de cumplir con los objetivos de servicio de la compañía. Los cuatro tipos de costos de inventario son costo de compra, de ordenar, de conservación y por faltantes. En este capítulo se analizan tres clases importantes de sistemas de inventarios y cinco modelos para demanda constante.

Los modelos de cantidad fija de reorden requieren un registro continuo que muestre el estado del inventarío. Cuando el saldo baja del punto de reorden, se ordena una cantidad fija. Bajo las suposiciones de demanda uniforme, abastecimiento global, tiempos de entrega constantes y costos constantes, el modelo EOQ conduce a la cantidad óptima de reorden. El punto de reorden se iguala a la demanda del tiempo de entrega. El modelo EOQ es importante porque refleja las relaciones entre la demanda, el costo de ordenar y el costo de conservación. Se usa ampliamente debido en parte a que es relativamente insensible a los errores en las estimaciones de estos datos.

También se analizan otros tres modelos de cantidad fija de reorden, todos ellos casos especiales del modelo EOQ. Las líneas de ensamble producen un artículo a la vez, lo cual causa que el abastecimiento sea uniforme y no global. En este caso se reducen los costos de inventario, ya que los artículos se mantienen en almacén por un periodo menor. Los costos también pueden reducirse, si se permiten faltantes. Finalmente, con frecuencia se dispone de descuentos por cantidad en los costos de compra y se deben considerar al formular la política de inventario.

El otro tipo general de modelo de inventario, el de periodo fijo de reorden, también se considera. Aquí, se llevan a cabo revisiones periódicas del nivel de inventario a intervalos fijos. En cada revisión se hace un pedido por una cantidad igual que la diferencia entre el punto hasta el que se ordena y el inventario que se tiene. Para esta aplicación se describe el modelo EOI que matemáticamente es el mismo que el modelo EOQ.

En el capítulo 14 se analizan los modelos que tienen demanda probabilista. Siguiendo la presentación de los tres modelos, se harán algunas consideraciones prácticas sobre la administración de inventarios. Se hablará de las experiencias del mundo real concernientes a inventarios y también se estudiará un caso en el capítulo 14.

Debe quedar claro que existen muchos modelos de inventarios. Piénsese en todas las variaciones que pueden ocurrir en la demanda, en los costos de ordenar, en los costos de conservación, en los de faltantes, en el tiempo de entrega, en la capacidad de almacenamiento, en los niveles de servicio, en los periodos de reorden y en los costos de compra. Pero aunque los mode-

los específicos pueden variar de una compañía a otra o de un artículo a otro, el objetivo sigue siendo el mismo: cumplir con los objetivos de servicio a un costo mínimo.

EJERCICIOS

13-1 Identifíquese cuál de los cinco modelos de este capítulo sería el más adecuado en cada una de las situaciones siguientes:
a Una tienda de abarrotes.
b Partes de automóvil para un nuevo distribuidor.
c Automóviles nuevos para un nuevo distribuidor.
d Inventarío de productos terminados para un fabricante de muebles.
e Inventario de productos terminados para un producto de vegetales enlatados.
f Materiales de consumo para una compañía de seguros.

Cantidad fija de reorden

13-2 Dados los siguientes datos para un producto particular, encuéntrense el número óptimo de unidades por orden y el número de órdenes por año:

Precio por unidad	$6.40
Costo de conservación por unidad por año	20%
Demanda anual (unidades)	5 000
Costo anual por orden	$2

13-3 La ABC Grocery hace un pedido por semana para proveerse de los repartos regulares. Un producto, la salsa Catsup, parece tener una demanda uniforme de 10 000 botellas cada año. La ABC estima que el costo anual de conservación es el 20 % y el costo de ordenar es $2. Los costos de la tienda son $0.80 por botella. ¿Cuál es la cantidad óptima de reorden?

13-4 Si la demanda de un artículo es uniforme de 20 000 unidades por año y los costos de ordenar son de $5 con un costo de conservación de $0.05 por unidad por año, ¿cuántas unidades se deben ordenar cada vez? ¿Cuántas órdenes se harán en un año? ¿Cuál es el costo total anual de inventario?

J3-5 Las pelotas de tenis en la Southern Sports Shop tienen una demanda estable de 80 latas por semana. La tienda paga $1.50 por cada lata y estima el costo anual de conservación en un 20 % del valor del inventario promedio. Se lleva 2 semanas recibir una orden y cuesta $4 procesarla. ¿Cuál debe ser el punto de reorden? ¿Cuántas latas se deben reordenar cada vez?

13-6 La Sharp's Lawn Mower Repair almacena un cuchilla para cortadoras de pasto que le queda a muchos modelos. La cuchilla se ven-

de por $5 y le cuesta a la Sharp $3.75. Durante la primavera y el verano el negocio es bueno con una demanda estable de 100 cuchillas al mes. La Sharp estima sus costos de reordenar en $4 por orden y sus costos de conservación en un 20% del valor del inventario promedio. El tiempo de entrega para cada orden es 1 semana.

a Formúlese una política de inventario durante la primavera y el verano para la Sharp basándose en un modelo de cantidad fija de reorden.

b ¿Cuál sería el costo de inventario total anual para la firma si la demanda permaneciera a 100 por mes todo el año?

13-7 Un fabricante utiliza 10 000 unidades al año de un artículo que cuesta $26.67 cada uno. El tiempo de entrega es 5 días y una orden cuesta $8. El costo de conservación se estima en 15 % del valor del inventario promedio. Usando un modelo de cantidad fija de reorden:

a ¿Cuántos artículos deben ordenarse cada vez?

b ¿Cuál es el punto de reorden?

c ¿Cuál es el costo anual de inventario?

13-8 Una firma compra $80 000 anuales de un artículo particular. El costo de conservación es 10 % del valor del inventario promedio y el costo de ordenar es $10 por orden. ¿Cuál es el valor en dólares que debe ordenar la firma cada vez? (Sugerencia: Q X precio = dólares/orden.)

13-9 La Ace Furniture vende 80 unidades al mes de una lámpara especial. La lámpara cuesta $20. El tiempo de entrega de las órdenes es es 2 semanas y el costo de la orden es $10. Los costos de conservación se estiman en $2 por unidad por año más el 5% del valor del inventario promedio. Se emplea un modelo de cantidad fija de reorden.

a ¿Cuál es la política de inventario que debe seguir la Ace?

b ¿Cuál es el valor del inventario promedio? c ¿Cuál es el inventario máximo?

d ¿Cuál es el costo anual de inventario?

13-10 La Ace Furniture del ejercicio 13-9 hace un estudio de sus costos de inventario y encuentra que su costo de ordenar tiene un 100 % de error; en realidad es $5 y no $10. ¿Cuál debe ser la política de inventario de la Ace con el costo de ordenar corregido? Como porcentaje, ¿cuál fue el aumento en el costo anual de inventario debido al error?

13-11 Supóngase que la demanda de un artículo es de 1 000 unidades por mes con un costo de conservación de $10 por unidad por año. El costo de ordenar es $6 por orden.

a Encuéntrese el EOQ y el número de órdenes por año.

b Encuéntrese el costo total anual de inventario.

c Encuéntrese el EOQ y el número de órdenes por año si los costos de ordenar son $2, $4, $8 y $10.

d Para comprobar qué tan sensible es el modelo EOQ a los errores en las estimaciones de costos, encuéntrese el costo total anual de

inventario para cada uno de los costos de ordenar en (c). Supóngase que cada uno de estos está equivocado y que el costo real de ordenar es $6. Grafíquense los resultados con el número de órdenes en el eje horizontal.

Abastecimiento uniforme

13-12 La Period Furniture produce una mesa de comedor en encino sólido a un costo de $1 000. La compañía vende 2 500 mesas cada año, aunque tiene capacidad para producir 5 000 anuales. Cuesta $400 $400 poner en marcha la línea de producción. Los costos de conservación de los bienes terminados son del 10% por unidad por año.
a ¿Cuántas mesas se deben hacer en cada corrida de producción?
b ¿Cuántas corridas de producción se deben realizar al año?

13-13 A partir de los siguientes datos determínese la longitud óptima de cada corrida de producción y el número de corridas por año:

Demanda anual:	12 500 unidades
Tasa de producción:	25 000 unidades/año
Costo fijo:	$100
Costo de conservación:	20%/unidad/año
Costo de producción:	$100 cada una

13-14 Un fabricante produce un artículo a una tasa de 4 000 por año. El costo fijo es $200 y se lleva 3 días poner en marcha la línea. El costo de conservación de un artículo en inventario es $30 por año. Si la firma vende 3 000 unidades por año:
a ¿Cuál es la longitud óptima de una corrida de producción?
b ¿Cuál es el punto de reorden?
c ¿Cuál es el costo anual de inventario?

13-15 Algunos artículos llegan a inventario y salen de inmediato con una tasa de producción uniforme. Esto reduce los costos de inventario. Para entender esto, úsense los siguientes datos:

Demanda:	5 000 unidades/año
Tasa de producción:	12 500 unidades/año
Costo fijo:	$100
Costo de conservación:	$10/unidad/año

a Encuéntrese la cantidad óptima de producción y el costo anual de inventario suponiendo abastecimiento uniforme.
b Repítase (a) suponiendo abastecimiento global. ¿Cómo se comparan los resultados?

Faltantes

13-16 El departamento de refacciones de una nueva distribuidora almacena en general sólo 2 o 3% de las refacciones disponibles. La

mayoría de los clientes entienden esto y no les importa esperar las partes de órdenes especiales. Supóngase que un distribuidor almacena un tipo particular de chapa de puertas. La chapa cuesta $5. El distribuidor vende 100 cada año, ya que se usan en varios modelos. El costo de ordenar normal es $4. Si un cliente pide una chapa cuando no se tiene en almacén, se incurre en un costo de faltante de $1 por unidad. Si el costo de conservación es $2 por unidad por año, ¿cuál es la cantidad óptima de reorden? ¿Cuál es el nivel máximo de inventario?

13-17 Auto Parts Inc. Fabrica una amplia variedad de refacciones de reemplazo para automóviles usados. Como produce tantas partes, prefiere esperar hasta tener suficientes órdenes antes de poner en marcha la línea de producción para cualquiera de ellas. Como los faltantes deben esperar, la Auto Parts estima que hay un costo por faltantes de $2 por unidad por llevar el registro. Por ejemplo, se lleva 30 minutos con un costo de $100 iniciar la línea para ensamblar bombas de gasolina. La firma produce 20 000 unidades cada año. Su costo de conservación del inventario es $5 por unidad por año. ¿Cuál debe ser su política de inventario?

13-18 Un fabricante de muebles produce 1 500 unidades anuales de un modelo especial de sofá. Cuesta $500 y 1 día echar a andar la línea de producción para este sofá. La firma estima su costo de conservación en $200 por unidad por año. Llevar un registro de los faltantes cuesta $10 por unidad.

a¿Cuántas unidades debe producir la firma en cada corrida?

b¿Cuál es el punto de reorden?

c¿Cuál es el costo total cada año por inventario?

13-19 ¿Cuánto ahorra al año la compañía de muebles anterior (ejercicio 13-18) al permitir faltantes? Para hacer la comparación encuéntrese el costo anual de inventario si no se permitieran faltantes.

Descuentos por cantidad

13-20 La Albatross Inc. actualmente ordena partes usando el modelo EOQ para minimizar sus costos. El proveedor ha ofrecido un 1 % de descuento si la Albatross ordenara por mes. Dados los datos siguientes, ¿debe aceptar la oferta la Albatross?

Uso anual:	62 500 unidades
Costo de ordenar:	$10 por orden
Costo de conservación:	20 % /unidad/año
Precio:	$1/unidad (sin descuento)

13-21 Pool Supplies By Aquatic almacena cloro en cartucho de 4 libras para usarse en clirinizadores automáticos. De marzo a octubre las ventas promedian 300 cartuchos al mes. La Pool Supplies paga $6 por cada uno con un tiempo de entrega de 2 semanas. Su costo de conservación se estima en el 15 % del valor del inventario promedio

anual. Estima su costo de ordenar en $5 por orden. Han ofrecido a Pool Supplies un descuento del 5% si ordena mensualmente.

a Ignorando el descuento, ¿cuál es la política de inventarios que debe seguir la compañía?

b ¿Cuánto ahorraría ordenando una cantidad suficiente para recibir el descuento?

13-22 La Fall Park Marine trabaja propelas de barcos. Cierto modelo cuesta a la compañía $100 cada uno y tiene un tiempo de entrega de 2 semanas. Las ventas son estables de una propela por semana durante todo el año. Los costos de ordenar son de $5 por orden y los costos de conservación ascienden a un 10% del valor del inventario promedio en el año. La Fall Park Marine actualmente ordena conforme a un EOQ, pero le han ofrecido un 10% de descuento si ordena por lo menos 15 unidades. ¿Cuánto ahorraría la compañía al año si ordenara lo suficiente para recibir el descuento?

13-23 Un distribuidor de artículos marinos compra tanques de gas al fabricante a $12 cada uno. El fabricante ofrece un 5% de descuento en órdenes de 50 o más y 10% de descuento en órdenes de 100 o más. El distribuidor estima sus costos de ordenar en $5 por orden y los de conservación en $10 por unidad por año. El distribuidor compra 300 tanques por año. ¿Cuántos tanques debe ordenar cada vez?

Periodo fijo de reorden

13-24 La Mailer's Hardware vende palas que tienen un precio por unidad de $10 con un 25 % de aumento. La Mailer's revisa su inventario de palas (y otros artículos) los viernes, de manera que las órdenes pueden ponerse en el correo los sábados. La orden cuesta $4 y tiene un tiempo de entrega de 2 semanas en lo que a las palas se refiere. Los costos de conservación se estiman en un 20 % del valor del inventario anualmente. La tienda vende 20 palas a la semana durante el año. Usando un modelo de periodo fijo de reorden:

a ¿Qué tan seguido debe planear la Mailer's hacer sus pedidos?

b ¿Cuál es el punto hasta el que se ordena?

c ¿Cuáles son los costos anuales de inventario de palas para la tienda?

13-25 La Jack's Grocery recibe el reparto de alimentos secos correspondientes a los pedidos que se hicieron la semana anterior. Uno de estos artículos es alimento para perros en bolsas de 25 libras, con un costo de ordenar de $2. La Jack's vende un promedio de 10 bolsas por semana durante el año. Si los costos anuales de conservación del inventario es $1.30 por bolsa:

a Formúlese una política de inventario para el alimento para perros usando un modelo de periodo fijo de reorden.

b ¿Cuál es la cantidad promedio ordenada?

c ¿Cuál es el costo anual de inventario?

BIBLIOGRAFÍA

Chase, Richard B. y Nicholas J. Aquilano: Production and Operations Research Management (Homewood, III.: Richard D. Irwin, Inc., 1973).

Hadley, G. y T. M. Whitin: Analysis of Inventory Systems(Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1963).

Starr, Martín K. y David W. Miller: Inventory Control: Theory and Practice (Englewood aiffs, N. J.: Prentíce-Hall, 1962).

Tersine, Richard J.: Materials Management and Inventory Systems (New York: North-Holland, 1976).

Trueman, Richard E.: Án Introduction to Quantitative Methods for Decision Making (New York: Holt 1974).

14

INVENTARIOS: MANEJO DE LA INCERTIDUMBRE

Es difícil evaluar las alternativas, a menos que se haya cultivado alguna tolerancia hacia la incertidumbre.

J. C. Whitehorn

. . .el valor es la virtud humana que más cuenta, valor para actuar con conocimientos limitados y evidencia insuficiente. Eso es todo lo que cualquiera de nosotros tiene.

Robert Frost

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje
Dos modelos de cantidad fija de reorden
- Cuando no se conoce el costo por faltantes
- Ejercicio de práctica (14-1)
- Cuando se conoce el costo por faltantes
- Ejercicio de práctica (14-2)

Un modelo de periodo fijo de reorden
- Cálculo del periodo de reorden
- Cálculo del punto hasta el que se ordena
- Ejemplo
- Ejercicio de práctica (14-3)

Selección del modelo de inventarios
- Modelos continuos o periódicos
- Selección del nivel de servicio
- Modelos avanzados
- Otras técnicas de análisis

Productos múltiples
- Análisis de prioridad
- Análisis del inventario ABC
- Medidas agregadas de realización

Otros sistemas de inventarios
- Sistemas de un solo pedido
- Planeación de requerimientos de materiales (MRP)

Experiencias del mundo real
Resumen
Ejercicios
Estudio de un caso: Wonderworld
Bibliografía

En este capítulo se estudian los sistemas de inventarios que tienen demanda incierta o probabilista. Se supone que se conoce la distribución de probabilidad para la demanda, pero que esa demanda es impredecible en un

día o mes dados. Con frecuencia, éste es el caso cuando se trata de ventas en una tienda, ventas industriales y la mayoría de los servicios.

La incertidumbre al predecir la demanda significa que siempre existe la posibilidad de que haya faltantes, es decir, de quedar sin artículos en almacén. El riesgo puede reducirse teniendo un inventario grande, pero nunca puede eliminarse. La tarea de administrar los inventarios es balancear el riesgo de faltantes y el costo de la existencia adicional.

En la mayoría de los sistemas de inventarios, el costo de quedar sin artículos en almacén no se conoce con exactitud. En estos casos, la administración debe tomar una decisión subjetiva en cuanto al riesgo que se correrá. En los casos en que el costo de un faltante puede determinarse, es posible obtener las políticas óptimas de inventario. En este capítulo se presentan dos modelos de cantidad fija de reorden, uno para cada una de estas situaciones. Además se describirá un modelo de periodo fijo de reorden para el caso de costos por faltantes desconocidos.

Existen muchos factores que deben considerarse al administrar cualquier sistema de inventarios: riesgo de faltantes, costos, registros, almacenamiento físico, demanda y el número de artículos que se van a manejar. Se examinan algunos de estos factores y cómo influyen en la selección del modelo de inventarios. Por último, se revisan brevemente los sistemas de una sola orden y la planeación de requerimientos de materiales (MRP).

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Después de estudiar este capítulo el lector deberá poder:

1 Aplicar los modelos de cantidad fija de reorden cuando los costos por faltantes sean conocidos o desconocidos.
2 Aplicar el modelo de periodo fijo de reorden cuando se conocen los costos por faltantes.
3 Comparar los sistemas periódicos y continuos.
4 Aplicar los análisis de prioridad y ABC para conjuntos de productos múltiples.
5 Describir cuatro medidas agregadas de realización de control de inventarios.
6 Definir los siguientes términos:

Concepto de inventario ABC	Sistema de dos secciones
Análisis de prioridad	Cambio de inventario
Inventario de seguridad	Nivel de servicio

DOS MODELOS DE CANTIDAD FIJA DE REORDEN

La operación de un modelo de cantidad fija de reorden se muestra en la figura 14-1. Se permite que la demanda y el tiempo de entrega varíen aleatoriamente y se supone que el abastecimiento es global (todo junto). Cuando el inventario decrece hasta el punto de reorden *(R),* se coloca un pedido por una cantidad fija *(Q).* Como el tiempo de entrega y la demanda varían, la cantidad que se tiene en el momento en que se recibe la or-

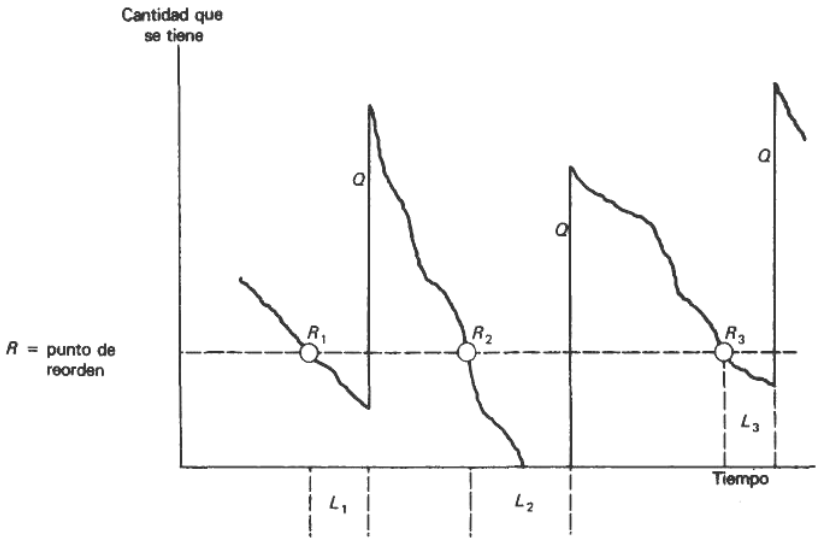


FIGURA 14-1
Sistema general de cantidad fija de reorden.

den también varía. Sin duda, pueden ocurrir faltantes, como se muestra durante el periodo L_2. Si se aumenta el punto de reorden, se reduce la posibilidad de faltantes pero el costo de conservación aumenta.

El reto es encontrar el mejor intercambio entre el riesgo de faltantes y el aumento en el costo de conservación. Lograr esto depende de que se conozcan o no los costos de faltantes. El caso en que no se conocen es más sencillo y se considerará primero.

Cuando no se conoce el costo por faltantes

Es necesario calcular tanto la cantidad fija de reorden como el punto de reorden. Para encontrar la cantidad de reorden, se usa el modelo básico EOQ desarrollado en el capítulo anterior. Los faltantes se ignoran y se supone que la incertidumbre en la demanda es despreciable. Con la demanda *promedio:*

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}}$$

en donde Q = tamaño del lote económico en unidades
D = demanda promedio en unidades por año
C_o = costo de ordenar en dólares por orden
C_h = costo de conservación en dólares por unidad por año

Éste puede parecer un procedimiento extraño, pero considérese la situación en el momento de hacer el pedido. El inventario que se tiene es igual que el punto de reorden. El punto de reorden se ha escogido (como se verá en un momento) de manera que puedan pasar con seguridad el tiempo de entrega y el inventario promedio en el momento de recibir la

orden sea cero. Otra manera de pensar en esto es que, como los cálculos del punto de reorden toman en cuenta el tiempo de entrega, se está a salvo al ignorar el tiempo de entrega para encontrar la cantidad de reorden.

Una vez que se hace a un lado el tiempo de entrega, el problema se parece mucho al del modelo básico EOQ; minimizar la suma de los costos de ordenar y de conservación. La variación en la demanda causa que varíe el tiempo que transcurre entre las órdenes; cuando la demanda es alta, los costos de ordenar son altos y los costos de conservación bajos. Cuando la demanda es baja, se cumple lo contrario. Sin embargo, a la larga, estas variaciones se promedian. Así, puede aplicarse el concepto de valor esperado y seleccionar la mejor cantidad *en promedio* que debe ordenarse. Esto se hace encontrando el EOQ con la demanda *promedio.*

Cómo encontrar el punto de reorden No existe una manera de encontrar el punto de reorden *óptimo* cuando no se conocen los costos de faltantes. En su lugar se usan los conceptos de *inventario de seguridad* y *nivel de servicio* para hacer un juicio sobre un riesgo de faltantes aceptable. También se toma en cuenta el hecho de que la posibilidad de quedar sin artículos en almacén existe sólo durante el tiempo de entrega. Para entender esto considérese la figura 14-1. Cuando el nivel de inventario está arriba del punto de reorden, como antes de colocar el pedido R_u no hay posibilidad de quedar sin existencias. Cuando el nivel baja al punto de reorden, se coloca un pedido y comienza el periodo de entrega. Solamente durante estos periodos (L_1, L_2, L_3) existen posibilidades de faltantes. Entonces, para determinar el punto de reorden sólo es necesario conocer la distribución de la demanda durante el periodo de entrega. Esto se llama *demanda del tiempo de entrega.*

En la figura 14-2 se muestra un ejemplo de demanda del tiempo de entrega. Aquí se muestra una distribución normal centrada en la demanda promedio del tiempo de entrega D_dL, en donde D_d es la demanda diaria promedio. Si el punto de reorden se iguala a la demanda diaria del tiempo de entrega, el inventario que se tiene en el momento de recibir una orden será cero, en promedio. Pero la mitad de las veces será más que cero

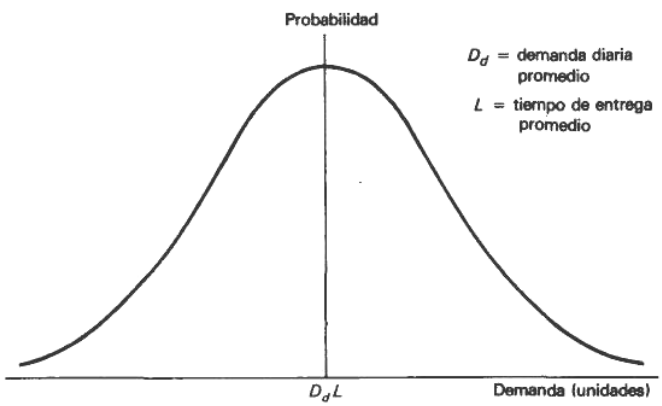


FIGURA 14-2
Distribución de la demanda del tiempo de entrega.

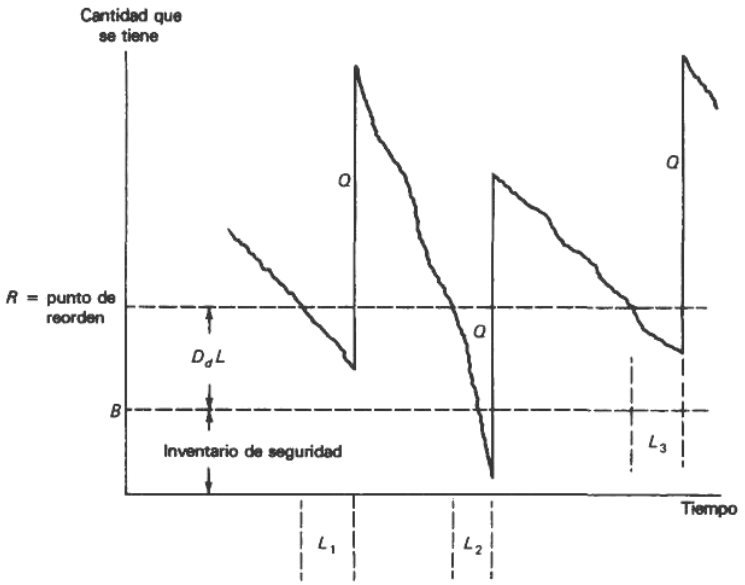


FIGURA 14-3
Efecto del inventario de seguridad.

y la mitad de las veces será menos que cero, es decir, habrá faltantes. Como casi siempre una posibilidad del 50 % de quedar sin existencias es muy alto, se debe agregar un inventarío de seguridad.

El efecto del inventario de seguridad se muestra en la figura 14-3. El punto de reorden se incrementa para proporcionar mayor protección contra los faltantes durante el periodo de entrega. La fórmula para el punto de reorden se convierte en:

$$R = D_dL + B$$

en donde R = punto de reorden
D_d = demanda diaria promedio en unidades
L = tiempo de entrega promedio en días
B = inventario de seguridad en unidades

La cantidad de inventario de seguridad está basada en la decisión administrativa sobre el nivel de servicio. El *nivel de servicio* es la probabilidad de tener un artículo *en almacén* cuando se necesite. La administración debe hacer un juicio intuitivo de cuál debe ser esta probabilidad; no puede derivarse matemáticamente. Los niveles de servicio en general varían del 80 al 99%. Esto significa que la posibilidad de quedar sin artículos en el almacén varía entre un 20 y un 1 %. Una vez que se escoge el nivel de servicio, la cantidad de inventario de seguridad que se necesita se encuentra como se muestra en la figura 14-4.

Con una tabla para la distribución normal, se encuentra el valor de Z que corresponde al nivel de servicio deseado. Para un nivel de servicio del 95%, Z = 1.64. El inventario de seguridad está dado, entonces, por:

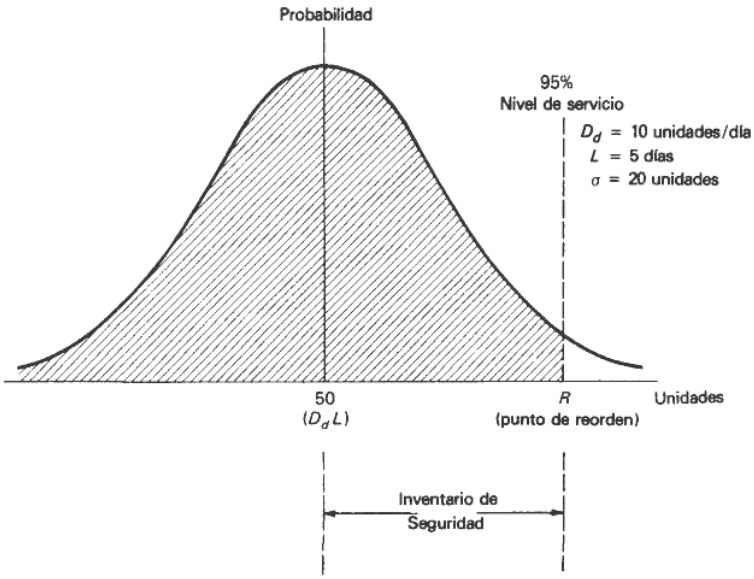


FIGURA 14-4
Cálculo del punto de reorden.

$$B = Z\sigma$$

en donde B = inventario de seguridad en unidades y σ desviación estándar de la demanda del tiempo de entrega.

Por ejemplo, en la figura 14-4:

$$B = (1.64)(20) = 32.8 \text{ o } 33 \text{ unidades}$$

El punto de reorden es:

$$R = D_d L + B$$
$$= (10)(5) + 33 = 83 \text{ unidades}$$

Para resumir el procedimiento para este modelo:

1 Encuéntrese la cantidad que debe ordenarse con el modelo EOQ basándose en la demanda promedio.
2 Determínese el inventario de seguridad con base en la distribución de la demanda del tiempo de entrega y la selección intuitiva del nivel de ser vicio.
3 Iguálese el punto de reorden a la demanda promedio del tiempo de entrega más e! inventario de seguridad.

Ejemplo El proveedor de la tienda de un gran comerciante es un almacén lejano. Con pocas excepciones, el almacén puede abastecer cualquier artículo que se le pida en cualquier cantidad. Uno de los artículos que se vende es aceite de motor para automóviles. La demanda del aceite tiende a un promedio de cinco cajas por día y se distribuye normalmente. El

tiempo de entrega varía un poco, con un promedio de 3 días. La desviación estándar para la demanda del tiempo de entrega es 3.9. Los costos de ordenar se estiman en $1.50 por orden. El costo de conservación es $1 por caja por año. El comerciante quiere un 98 % de nivel de servicio en el aceite de motor.

Para encontrar la cantidad de reorden se necesita conocer la demanda *anual* promedio. Si la tienda abre 6 días a la semana durante 50 semanas, entonces,

$$D = (5)\ (6)\ (50) = 1\ 500 \text{ unidades/año}$$

También

$$C_o = \$1.50 \text{ por orden}$$
$$C_h = \$1 \text{ por caja por año}$$

Entonces

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(1\ 500)(1.50)}{1}}$$
$$= \sqrt{4\ 500} = 67 \text{ cajas}$$

A continuación se encuentra el inventario de seguridad. Para un nivel de servicio del 98%, el apéndice B da Z = 2.08. Entonces, el inventario de seguridad es:

$$B = Z\sigma$$
$$= (2.05)(3.9) = 7.9 \text{ u } 8 \text{ unidades}$$

Por último, el punto de reorden es:

$$R = D_d L + B$$
$$= (5)\ (3) + 8 = 23 \text{ unidades}$$

En cuanto al aceite de motor, el comerciante debe usar la siguiente política: cuando el aceite baja a 23 cajas, deben ordenarse 67 más.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 14-1

Un productor de microcomputadoras compra una unidad de procesamiento central de un solo *chip* por $5 cada uno. Según los planes de producción, se necesitarán 10 000 unidades durante el próximo año, pero esto dependerá de las ventas. En realidad, la firma piensa que la demanda estará distribuida normalmente con un promedio de 10 000 unidades.

El gerente de abastecimientos hace planes basándose en un tiempo de entrega promedio de 9 días, una demanda diaria promedio de 10 000 +

300 días hábiles, o 33.3 unidades por día y un nivel de servicio del 99%. Los costos de ordenar son de $10 por orden, mientras que los costos de conservación son de $1 por unidad por año. La demanda del tiempo de entrega tiene una desviación estándar de 17.3.

Encuéntrese el punto de reorden del inventario y la cantidad que debe ordenarse.

Cuando se conoce el costo por faltantes

Cuando los costos por faltantes se conocen, es posible optimizar tanto la cantidad de reorden como el punto de reorden. El razonamiento básico que respalda el procedimiento es el mismo que el que se usó en el capítulo 13 para desarrollar el modelo EOQ. Todos los costos de inventario se expresan en términos de la cantidad que debe ordenarse y del punto de reorden y después se minimiza su suma. Esto incluye un procedimiento iterativo que no se describirá aquí.[1] No obstante, puede hacerse una excelente aproximación bastante sencilla.

La cantidad que debe ordenarse se calcula con el modelo básico EOQ con la demanda promedio, como se describió antes. En realidad, esto da una cantidad que debe ordenrase un poco menor que la óptima. La razón es que los costos por faltantes tienden a aumentar el tamaño de la orden para reducir el número de órdenes. Recuérdese que la posibilidad de faltantes surge sólo cuando se hacen los pedidos (en el periodo de entrega); así las probabilidades totales disminuyen si hay menos órdenes. Pero es obvio que los costos de conservación se elevan si hay menos órdenes. El efecto neto es que el valor óptimo es muy poco diferente del valor aproximado del EOQ.

Para encontrar el punto de reorden se aplica el concepto de costo marginal. Cada vez que el punto de reorden se incrementa en 1 unidad, el costo de conservación aumenta y el costo por faltantes disminuye. Debe haber un punto de cruce entre estos dos costos que proporcione el mejor punto de reorden. Esto ocurre cuando los dos costos marginales son iguales.

Costo marginal de mantener = costo marginal por faltantes

El costo esperado de aumentar el punto de reorden en 1 unidad (costo marginal de conservación) es igual que el costo de conservación (C_h) multiplicado por la probabilidad de que no haya faltantes. (Cuando ocurre un faltante no hay costo de conservación.) Si P representa la probabilidad de que la demanda sea menor que el punto de reorden, es decir, de que no ocurran faltantes, para ser precisos:

D_dL = demanda promedio del tiempo de entrega
R = punto de reorden
P = probabilidad $[D_dL \leq R]$

[1] Véase Richard E. Trueman, *An Introduction to Quantitative Methods for Decision Making* (New York: Holt, 1974), pp. 444-449, para más detalles.

Entonces el costo marginal de conservación = C_hPT.

El costo marginal de faltantes durante cada periodo de entrega es igual que el costo del número de unidades que faltan multiplicado por la probabilidad de un faltante, o sea:

$$(1-P)C_s$$

en donde C_s = costo unitario por faltante.

Como puede ocurrir un faltante cada vez que se hace un pedido, el costo *anual* por faltantes depende del número de órdenes. Con una demanda anual de D y una cantidad que debe ordenarse Q, el número promedio de órdenes es D/Q, es decir,

$$\text{Número promedio de órdenes por año} = \frac{D}{Q}$$

Así,

$$\text{Costo marginal por faltantes} = (1 - P)\, C_s \, \frac{D}{Q}$$

Igualando los dos costos marginales y resolviendo para P:

$$C_hP = (1 - P)C_s \frac{D}{Q}$$

$$C_hP + P\frac{D}{Q}C_s = \frac{D}{Q}C_s$$

$$P = \frac{\frac{D}{Q}C_s}{C_h + \frac{D}{Q}C_s}$$

Esto da una probabilidad crítica. Entonces, el punto de reorden se selecciona como se muestra en la figura 14-5. Con la distribución de probabilidad de la demanda del tiempo de entrega, se escoge A tal que:

$$\text{Probabilidad}\,[D_dL \le R] = P = \frac{\frac{D}{Q}C_s}{C_h + \frac{D}{Q}C_s}$$

Ejemplo Cierto artículo de inventario tiene una demanda anual promedio de 5 000 unidades. Con base en 250 días hábiles por año, la demanda diaria tiene un promedio de 5 000/250, o 20 unidades al día. El tiempo de entrega varía, con un promedio de 2 días. Se supondrá que la demanda del tiempo de entrega tiene una distribución normal, con una desviación estándar de 6.3 unidades. Los costos de ordenar son de $2 por orden, los

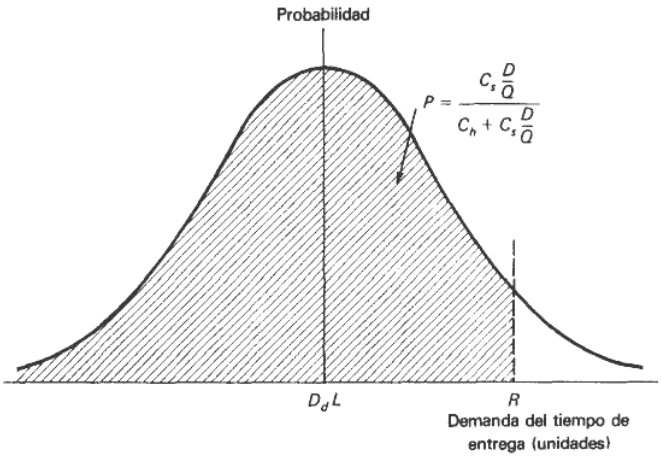


FIGURA 14-5
Punto de reorden con costos por faltantes conocidos.

costos de conservación $2.50 por unidad por año y el costo por faltantes es $1 por unidad. Entonces:

D = 5 000 unidades por año
D_d = 20 unidades por día
L = 2 días
C_o = $2 por orden
C_h = $2.50 por unidad por año
C_s = $1 por unidad

Para encontrar el tamaño de la orden, se ignoran los faltantes y se usa el modelo básico EOQ:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(5\,000)(2)}{2.50}} = \sqrt{8\,000}$$

$$Q = 89 \text{ unidades}$$

Después, se encuentra la probabilidad crítica:

$$P = \frac{\frac{D}{Q}C_s}{C_h + \frac{D}{Q}C_s} = \frac{\frac{5\,000}{89}(1)}{2.50 + \frac{5\,000}{89}(1)} = \frac{56.2}{2.5 + 56.2}$$

$$P = 0.96$$

Como la distribución es normal, se sabe que:

$$R = D_d L + Z\sigma$$

De la tabla normal (apéndice B),

$$Z[P = 0.96] = 1.75$$

Por último,

$$R = D_d L + Z\sigma = (20)(2) + (1.75)(6.3) = 40 + 11$$
$$R = 51 \text{ unidades}$$

Así, cuando el inventario baja a 51 unidades, se debe hacer un pedido de 89 unidades.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 14-2

Encuéntrese la cantidad que se debe ordenar y el punto de reorden para un artículo que tiene una demanda anual promedio de 1 000 unidades, una demanda diaria promedio de 4 unidades por día y un tiempo de entrega promedio de 4 días (supóngase que la demanda del tiempo de entrega tiene una distribución normal con desviación estándar de 4). Los costos de ordenar son $10 por orden, el costo de conservación es $2 por unidad por año y el costo por faltante es $1 por unidad.

UN MODELO DE PERIODO FIJO DE REORDEN

Con un modelo de periodo fijo de reorden se verifica el balance de inventario a intervalos fijos de tiempo y se coloca una orden por la diferencia entre el balance que se tiene y el punto hasta el que se ordena. Como el periodo de revisión es fijo, puede ocurrir un faltante en cualquier momento durante el periodo de revisión, como se muestra en la figura 14-6. Esto es

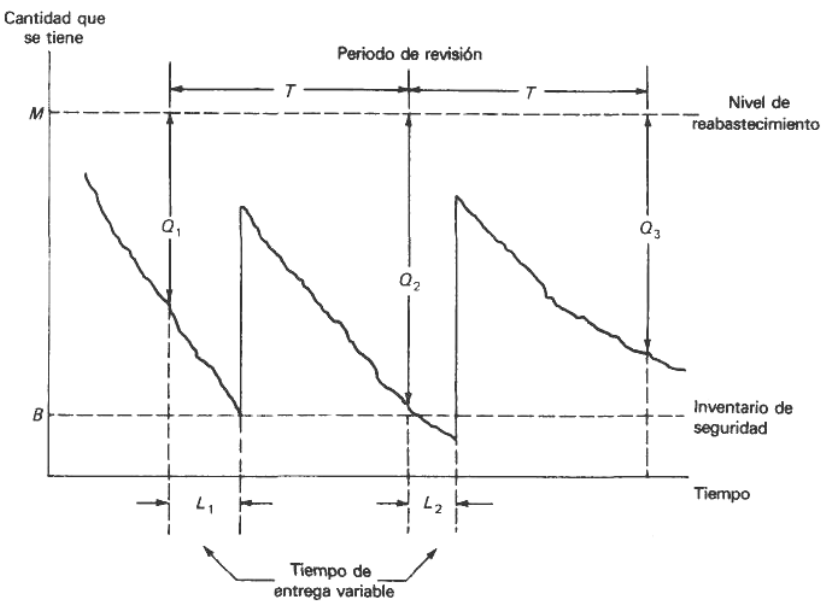


FIGURA 14-6
Modelo de periodo fijo de reorden.

bastante diferente de los dos modelos anteriores, en los que los faltantes podían ocurrir sólo durante el periodo de entrega. Como resultado, el inventario de seguridad debe ser mayor, si se quiere proporcionar el mismo nivel de servicio.

En el modelo que se presenta se supone que la demanda tiene distribución normal, la demanda del tiempo de entrega se distribuye normalmente y los costos de faltantes no se conocen. Para encontrar el periodo óptimo para ordenar, se ignora toda incertidumbre y se aplica el modelo del intervalo económico de reorden (EOI) del capítulo 13. Después se aplica el concepto de nivel de servicio determinado administrativamente para encontrar el punto hasta el que se ordena.

Cálculo del periodo de reorden

Ignorando la incertidumbre, puede aplicarse la ecuación (13-7) para encontrar el intervalo económico de reorden:

$$T = \sqrt{\frac{2C_o}{DC_h}}$$

en donde T = periodo de reorden (años)
D = demanda promedio (unidades /año)
C_o = costo de ordenar (dólares/orden)
C_h = costo de conservación (dólares/unidad/año)

Recuérdese que el modelo EOI se deriva del modelo EOQ. Como antes, se usará el concepto de valor esperado y se basará el periodo de reorden en el promedio a la larga.

Cálculo del punto hasta el que se ordena

Pueden usarse aquí otros resultados del capítulo 13. Cuando se estudió el modelo de periodo fijo de reorden con demanda y tiempo de entrega constantes, se encontró que el nivel hasta el que se ordena es igual que la demanda durante el periodo para ordenar más la demanda del tiempo de entrega. Reescribiendo la ecuación (13-8) para convertir todo en días:

$$M = D_d(T = L)$$

en donde M = punto hasta el que se ordena (unidades)
D_d = demanada promedio diaria (unidades/día)
L = tiempo de entrega promedio (días)
T = periodo de reorden (días)

Esta ecuación se aplica al caso de demanda y tiempo de entrega inciertos. Lo único que se debe agregar es el inventario de seguridad para reducir el riesgo de faltantes (véase la figura 14-7). Con la misma lógica que se presentó antes, se escoge un nivel de servicio *6* o probabilidad de tener

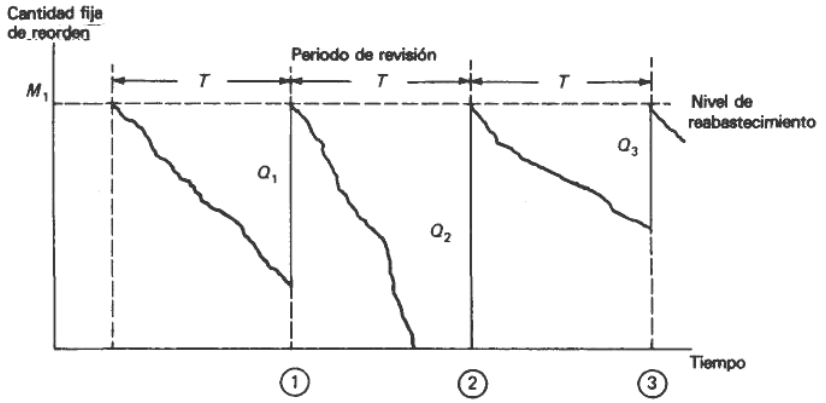


FIGURA 14-7
Un sistema sin inventario de seguridad y tiempo de entrega cero.

existencias. Esta probabilidad se usa, entonces, con la distribución de la demanda para encontrar la cantidad de inventario de seguridad. Pero, ¿qué distribución de demanda se usa? Con el modelo de cantidad fija de reorden se usó la demanda del tiempo de entrega. Sin embargo, ahora pueden ocurrir faltantes en cualquier momento del periodo. Entonces, se necesita la distribución de la demanda del periodo de *revisión,* como se muestra en la figura 14-8.

Suponiendo que la demanda del periodo de revisión se distribuye normalmente, se usa el nivel de servicio para leer la tabla normal estándar (apéndice B) y encontrar el valor correspondiente de Z. Entonces:

$$B \text{ - inventario de seguridad} = Z\sigma$$

en donde σ = desviación estándar de la demanda del periodo de reorden.

Así, el punto hasta el que se ordena está dado por:

$$M = D_d(T + L) + B$$
$$= D_d(T + L) + Z\sigma$$

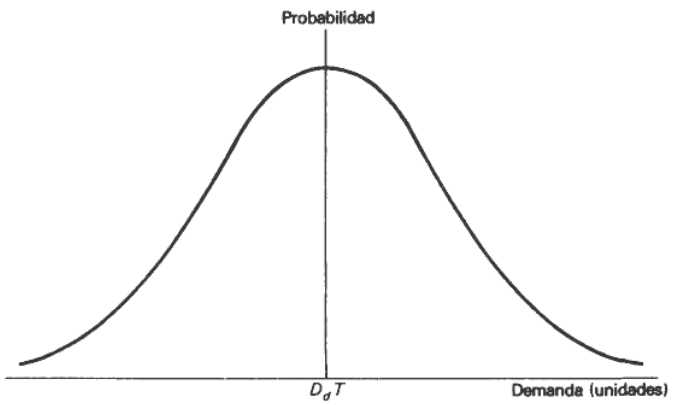


FIGURA 14-8
Demanda del período de revisión.

En la figura 14-9 se muestra esto en un diagrama. Por conveniencia, la distribución está centrada en $D_d(T + L)$ y no en la demanda promedio del periodo de revisión.

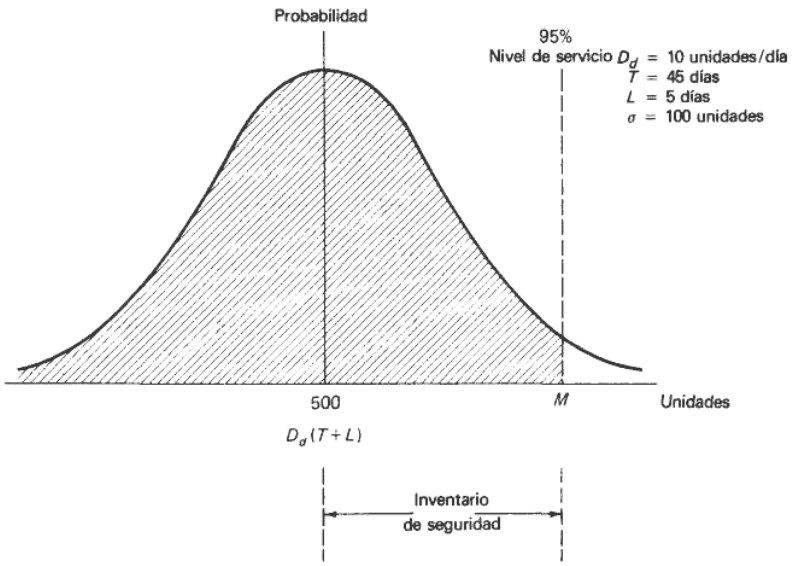


FIGURA 14-9
Cálculo del punto hasta el que se ordena.

Con los números que se muestran en el apéndice B, para un nivel de servicio de 95%:

$$
\begin{aligned}
Z &= 1.64 \\
M &= D_d(T + L) + Z\sigma \\
&= (10)(45 + 5) + (1.64)(100) \\
&= 500 + 164 \\
M &= 664 \text{ unidades}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Se analizará el primer ejemplo de este capítulo para poder comparar los resultados de los dos modelos. El ejemplo incluía aceite de motor con una demanda promedio de 5 cajas por día, distribuida normalmente. El tiempo de entrega temía un promedio de 3 días. El costo de ordenar era de $1.50 por orden y el costo de conservación de $1 por caja por año. El vendedor deseaba un nivel de servicio del 98 %.

Para encontrar el periodo de reorden, se basa la demanda anual en un año de 300 días hábiles:

$$\text{Demanda anual} = D = 300(5) = 1\ 500$$

Con la fórmula para el EOI:

$$T = \sqrt{\frac{2C_o}{DC_h}}$$

$$= \frac{2(1.5)}{(1\ 500)(1)}$$

$$T = 0.045 \text{ años}$$

En días hábiles:

$$T = 300(0.045) = 13 \text{ días}$$

Entonces, el período de revisión debe ser, más o menos, 13 días hábiles. Después, para encontrar el punto hasta el que se ordena, se encontrará primero el inventario de seguridad. Para esto se necesita la desviación estándar de la demanda del periodo de revisión, que no era un dato del primer ejemplo. Se supondrá que ésta es 9 unidades con base en los datos históricos. Para un nivel de servicio del 98%, el apéndice B da Z = 2.08. Entonces:

$$B = Z\sigma$$
$$= (2.08)(9) = 18.7 \text{ o } 19 \text{ unidades}$$

El punto hasta el que se ordena es:

$$M = D_d(T + L) + B$$
$$= (5)\ (13 + 3) + 19$$
$$M = 99 \text{ unidades}$$

La política de inventario es revisar el balance cada 13 días hábiles. Se debe hacer un pedido por la diferencia entre 99 unidades y el balance en el momento de la revisión.

El inventario de seguridad que se necesitó aquí fue de 19 unidades, mientras que sólo se requirieron 8 unidades para el modelo de cantidad fija de reorden. Esto muestra que el modelo de periodo fijo de reorden requiere un inventario de seguridad extra para dar la misma protección contra faltantes.

EJERCICIO DE PRÁCTICA 14-3

Un distribuidor de llantas para automóvil hace pedidos trimestrales. El tiempo de entrega varía, pero el promedio tiende a 1 mes. El promedio de la demanda de llantas es 600 trimestrales, con una distribución normal y una desviación estándar de 100. Como muy pocos clientes hacen un pedido si no se tiene la llanta en almacén, el distribuidor quiere 98 % de nivel de servicio. Encuéntrese el inventario de seguridad y el punto hasta el que debe ordenar el distribuidor.

SELECCIÓN DEL MODELO DE INVENTARIOS

Cuando no se tienen restricciones externas en cuanto a cuándo se debe hacer un pedido o en cuanto a un inventario de seguridad, el modelo puede seleccionarse libremente. En estos casos se deben considerar otros factores además de las matemáticas del modelo. En esta sección se consideran algunos de estos factores importantes.

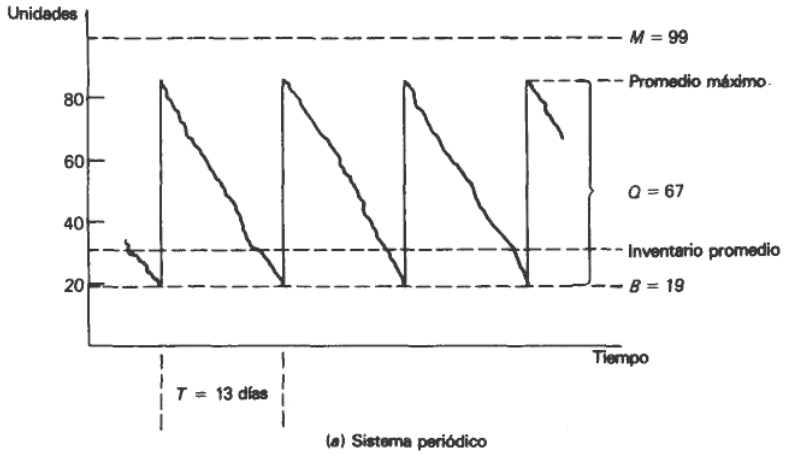
Modelos continuos o periódicos

Se deben tomar en cuenta dos aspectos importantes al escoger entre un modelo continuo (es decir, de cantidad fija de reorden) y un modelo periódico: (1) la diferencia en los inventarios de seguridad y (2) cómo se llevan los registros. Como se vio en el último ejemplo, el modelo periódico requiere un inventario de seguridad mayor que el modelo continuo. En la figura 14-10 se presenta un diagrama de estos casos. Los dos modelos pueden compararse directamente, ya que se usaron los mismos datos. Nótese que el modelo de periodo fijo de reorden (figura 14- 10*a*) "llega" más alto. En promedio, este modelo decrece hasta 19 unidades en el momento de recibir la orden, que es la cantidad de inventario de seguridad. El modelo de cantidad fija de reorden baja más, hasta 8 unidades. Esta diferencia de 11 unidades en el inventario de seguridad significa que el costo de mantener en el sistema periódico será más alto. En el ejemplo, esta diferencia asciende a 11 x $1 = $11 por año. El nivel máximo de inventario también es más alto, el cual necesita más capacidad de almacenamiento.

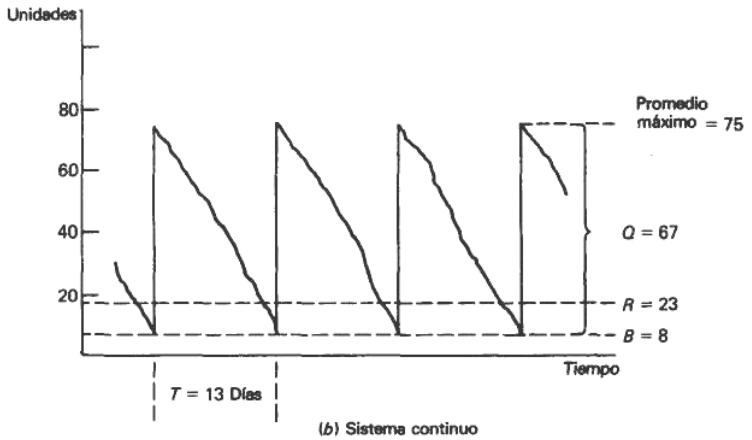
El modelo periódico tiene la ventaja de registros más reducidos. El único momento en que se necesita saber el nivel de inventario real es en el momento de reorden. Quizá sea posible determinar el nivel con una revisión visual. En contraste, el sistema continuo requiere que se conozca con precisión cuándo baja el inventario hasta el punto de reorden. Esto significa que normalmente se tiene que llevar un balance continuo de inventario. Es decir, cada vez que se saca un artículo del almacén, se tiene que registrar. Estos registros continuos pueden resultar muy caros.

Existe una técnica de almacenamiento llamada sistema de *dos secciones,* que evita la necesitad del sistema continuo de llevar registros. En la figura 14-11 se muestra un ejemplo. El espacio de almacenamiento (sección) se divide en dos compartimientos. En el compartimiento trasero se almacena la cantidad de nivel de reorden. El exceso se coloca en el compartimiento de enfrente. Todos los artículos se sacan del compartimiento de enfrente. Cuando se vacía, se hace un pedido y se mueven todos los artículos para enfrente. Cuando se recibe la orden, se reabastece el compartimeinto de nivel de reorden, el exceso se pone enfrente y se repite el proceso.

Independientemente del sistema de inventarios que se seleccione, el problema de los registros continuos se debe resolver. Aun con sistemas periódicos, los registros continuos son deseables, ya que proporcionan información administrativa. El que sean o no prácticos depende de la frecuencia con que se sacan artículos en el tiempo que pasa entre órdenes y del número total de artículos en el control del inventario. Cuando se sacan



(a) Sistema periódico



(b) Sistema continuo

FIGURA 14-10
Comparación de los sistemas periódico y continuo.

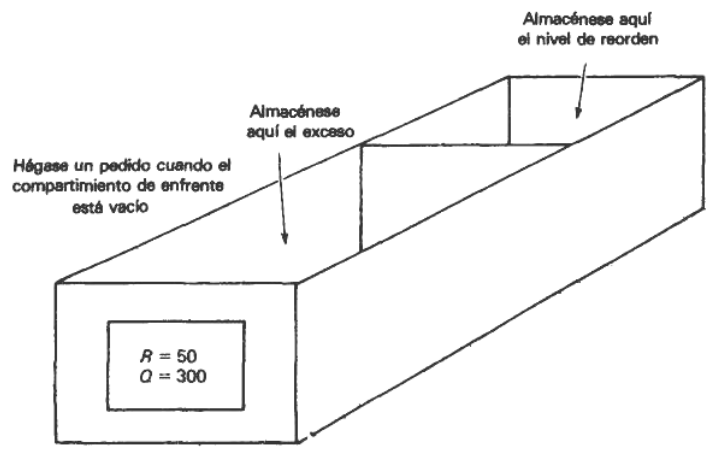


FIGURA 14-11
Un sistema de dos secciones.

pocos artículos, se necesitan pocos datos en el registro (aun cuando la cantidad que se saque cada vez sea grande). Sin embargo, si se saca muchas veces en pequeñas cantidades, debe haber muchos datos.

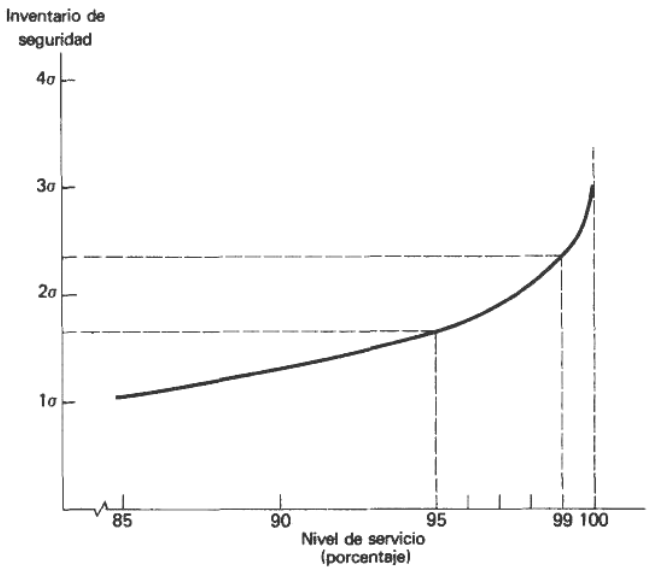
El número de artículos en el control de inventario afecta el uso de las computadoras. El control de inventarios computarizado requiere una inversión inicial grande, que sólo se justifica por un alto volumen de uso, es decir, un número grande de artículos. De otra manera, los registros manuales son más económicos.

Otros dos factores importantes que se deben considerar al seleccionar un sistema de inventarios son la necesidad de seguridad física y la, necesidad de recuentos periódicos de inventario. A los artículos que tienen un alto valor monetario, como los automóviles, se les dan números de serie y se llevan registros individuales. Es claro que se necesitan registros continuos. También son necesarios, para cualquier tipo de artículo, los recuentos periódicos de inventario. No importa cuán exactos sean los registros, pueden ocurrir diferencias entre el registro y el inventario real debidas a pérdidas, robos y roturas.

Selección del nivel de servicio

Se mencionó antes que los niveles de servicio superiores al 99 % son poco usuales. La razón es que el inventario de seguridad crece rápidamente cuando se eleva el nivel de servicio. Esto puede observarse en la figura 14-12. Por ejemplo, para cambiar de un nivel de servicio de 95% a un 99%, se requiere casi un 40 % de aumento en el inventario de seguridad. Sin embargo, el aumento en la protección es sustancial, ya que la probabilidad de que ocurra un faltante se reduce de 1/12 a 1/100.

FIGURA 14-12
Inventario de seguridad contra nivel de servicio.



Modelos avanzados

Ciertamente existen muchos modelos de inventarios que los 8 que se describieron en este texto y se desarrollarán muchos más en el futuro. En el capítulo 16 se describe la aplicación de simulación al análisis de inventarios. La simulación es una aplicación de la capacidad de formular buenas políticas de inventarios cuando los sistemas son complejos.

Otras técnicas de análisis

El lector ya debe estar consciente de la importancia que tiene pronosticar la demanda para el control de inventarios. En este capítulo se supuso que la demanda sería estable a través del tiempo y que se conocía. Esta suposición permitió hacer hincapié en el sistema de inventario. No obstante, como es de esperarse, la demanda de un artículo muy pocas veces se comporta en forma estable. Por tanto, es bastante común usar una o más de las técnicas de pronósticos del capítulo 6 para predecir la demanda y después calcular las cantidades y puntos de reorden. Siempre que haya un cambio significativo en la demanda, se deben volver a hacer los cálculos del inventario. Con las computadoras modernas, ésta no es una tarea difícil.

Hay ocasiones en que la demanda es predecible, pero varía mucho de un periodo a otro. Por ejemplo, 20 unidades en el primer periodo, 80 en el segundo, 5 en el tercero y después 60, 100 y 20. Para estas situaciones es posible usar programación lineal o programación dinámica para hacer el análisis del inventario. Si no puede aplicarse ningún método analítico, entonces puede construirse un modelo de simulación para permitir la experimentación con las diferentes políticas.

PRODUCTOS MÚLTIPLES

Todas las técnicas descritas se deben aplicar individualmente a cada artículo que se está controlando. Si hay 1 000 artículos en inventario, esto significa 1 000 cantidades de reorden y 1 000 puntos de reorden o periodos para ordenar. ¿Vale la pena todo este esfuerzo? Y si se aplica el control en forma individual, ¿cómo se mide la realización en conjunto? Se tratará de responder a estas dos preguntas.

Análisis de prioridad

Por ahora puede tenerse la idea de que el control de inventarios es mucho trabajo. Pueden conocerse pequeños negocios que parecen operar bastante bien sin usar EOQ o puntos de reorden. Sin duda, puede darse el caso de que el costo de controlar un artículo exceda los ahorros que se han de lograr. La intuición, la experiencia y el sentido común pueden ser el método más económico. Aún más, tal vez no sea posible el modelado si se trata de un artículo nuevo o de aquellos que tienen una demanda altamente variable (impredecible). ¿Cómo puede tomarse la decisión de controlar o no un artículo?

Se proponen dos pruebas, el análisis de prioridad y el análisis ABC. Con el análisis de prioridad se clasifica cada artículo del inventario de acuerdo con su importancia para la actividad de la organización. Un sistema de tres niveles tal vez tenga artículos críticos, artículos importantes y artículos útiles. El control de inventarios será más importante para los artículos de prioridad alta para reducir el riesgo de los faltantes. Este tipo de análisis también ayuda a establecer los niveles de servicio deseados.

Análisis de inventario ABC

La idea básica que respalda el análisis de inventario ABC es que se debe controlar en dónde se localiza el dinero. Tal como sucede, muchas compañías tienen el volumen más alto de negocios en dólares en una pequeña proporción de artículos. Por ejemplo, 75% de las ventas podría corresponder a sólo el 10% de los artículos del inventario. Esto se ilustra en la tabla 14-1 y en la figura 14-13. Tan sorprendente como pueda parecer, las excepciones son raras. La prescripción para el control se resume en seguida:

Artículos A: Control máximo
Artículos B: Control intermedio
Artículos C: Control mínimo

Para los artículos del tipo A se recomienda el máximo control. Esto significa que se deben desarrollar modelos de inventarios para determinar cuándo y cuánto se debe ordenar. Sería bueno considerar algún medio de protección contra robo o pérdida, posiblemente basado en números de serie. La seguridad depende de cómo se genera el volumen monetario, ya que los artículos de tipo A pueden tener un alto valor y bajas ventas o un valor menor y ventas altas.

Los artículos de tipo B son una categoría intermedia. Pueden emplearse modelos de inventarios si es conveniente y no muy costoso. Las medidas de seguridad serían moderada. Los artículos de tipo C forman la proporción más grande de artículos, pero representan el menor valor monetario. Éstos en general son artículos de consumo que debe trabajar la compañía pero que tienen una demanda poco frecuente o un costo unitario bajo. No se justifica económicamente el llevar registros detallados ni calcular el EOQ para estos artículos. Simplemente se debe usar la experiencia y el sentido común para ordenar siempre que parezca necesario u oportuno.

Medidas agregadas de realización

Todos los modelos de inventario y las técnicas de análisis que se han presentado se aplican con base en artículo por artículo. Cuando se han hecho todos los análisis / cálculos, todavía quedan cuestiones que debe resolver el administrador del inventario: "¿Cómo va el funcionamiento global? En lo agregado, ¿cuán bien está funcionando el control de inventrios?" En teoría, la respuesta es que si cada artículo tiene un control óptimo, enton-

TABLA 14-1
Análisis ABC de inventarios

a Agrupamiento típico

Tipo de artículo	*% de artículos*	*% de volumen en dólares*
A	10	75
B	15	15
C	75	10

b Ejemplo

Artículo	*Ventas, $/año*	*Ventas, %*	*Clase*
1	*150 000*	*75*	*A*
2	*30 000*	*15*	*B*
3	4 000	2	C
4	3 000	1.5	C
5	3 000	1.5	C
6	2 400	1.2	C
7	2 200	1.1	C
8	2 000	1	C
9	1 800	0.9	C
10	1 600	0.8	C

ees el total está optimizado. Pero esto pocas veces satisface a los administradores.

Idealmente, el administrador de inventarios busca satisfacer todas las demandas con un mínimo costo. Dos indicadores de qué tan bien se está llevando a cabo son los faltantes y la inversión en inventario.

La incidencia de faltantes es una medida agregada útil respecto del nivel de servicio que se está alcanzando. Dentro de cualquier periodo, puede calcularse el número y el porcentaje de artículos que faltan. Como ya se hizo notar, una política de no faltantes requiere una inversión alta.

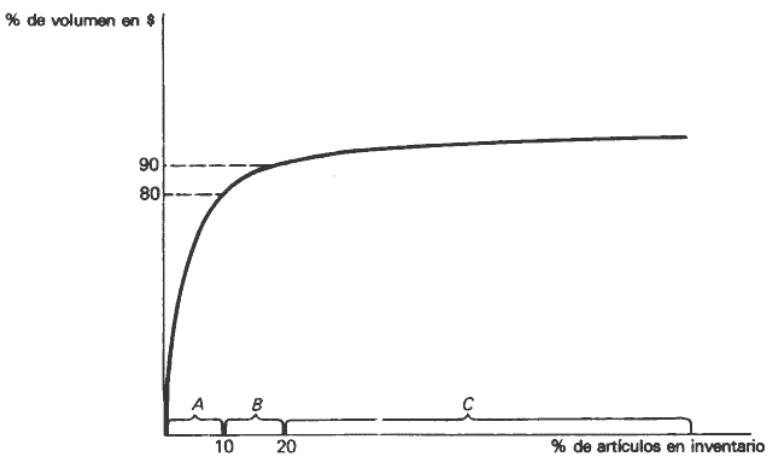


FIGURA 14-13
Volumen en dólares contra artículos de inventario.

Sin embargo, la incidencia de faltantes puede dar una indicación del funcionamiento del sistema de control a través del tiempo.

La inversión en inventario depende de la naturaleza del negocio. Los fabricantes, los distribuidores y los comerciantes pueden requerir altas inversiones en inventario, mientras que las compañías de servicio o las casas que trabajan con órdenes por correo necesitan un inventario pequeño. Para una compañía dada, la inversión es una medida agregada del crecimiento o disminución del inventario. Partiendo del análisis EOQ, se esperaría que la inversión en inventario debe crecer conforme crecen las ventas, pero sólo en proporción a la raíz cuadrada de las ventas. El *cambio de inventario,* la razón de las ventas y la inversión en inventario, deben crecer conforme lo hacen las ventas. El cambio es una medida popular y se dispone de los valores típicos para varios tipos de industrias, para su comparación.

OTROS SISTEMAS DE INVENTARIOS

Se ha hecho hincapié en los sistemas de inventarios para los que se hacen pedidos repetitivos y la demanda es independiente. No obstante, existen otros dos tipos de sistemas que surgen en los negocios: los sistemas de un solo pedido y los sistemas de demanda dependiente.

Sistemas de un solo pedido

Algunos problemas de inventarios sólo incluyen un pedido en lugar de las órdenes múltiples que se han tratado hasta aquí. El ejemplo clásico es el de los árboles de Navidad. Sólo se coloca un pedido de árboles. Los que no se vendan después de Navidad se queman. Esto es típico para la mayoría de los productos perecederos. Una panadería tiene muy poca demanda por el pan del día anterior y son muy pocos los artículos que duran de una semana a otra en el departamento de abarrotes de una tienda. En cada una de estas situaciones el administrador de inventarios tiene la oportunidad de hacer un pedido; no es posible reordenar durante el periodo. Aún más, los artículos que quedan se deben desechar, no pueden guardarse para el siguiente periodo. La pregunta clave es cuántos artículos se deben ordenar.

Los inventarios de una sola orden se analizan usando los modelos de decisión de valor esperado del capítulo 4. En efecto, se debe ordenar la cantidad que tiene el mayor valor esperado de la ganancia (o el mínimo valor esperado, si se están considerando los costos). Como los costos de ordenar y de mantener un inventario en general son pequeños, comparados con el costo de compra, pueden ignorarse.

Planeación de requerimientos de materiales (MPR)

Planeación de requerimientos de materiales (MRP) es el nombre que se da al análisis de los artículos que tienen una demanda dependiente o derivada. Un ejemplo sería una parte que se usa en el ensamble de algún produc-

to final, como un transistor para un aparato de televisión. La demanda del transistor depende de la demanda de los televisores.

Ha sido una práctica común administrar el inventario de materiales como si la demanda *no* fuera dependiente. La demanda futura se estima a partir de los pronósticos de ventas y de los programas de producción estimados. Después se aplican los modelos de inventarios estándares. Los niveles de servicio se establecen altos para evitar interrupciones en la producción debidas a falta de materiales. Los resultados típicos de este enfoque son altos niveles de inventario.

Con las computadoras modernas, ahora es posible ligar directamente los inventarios de materiales y la demanda del producto final. La lista de materiales para cada producto final se incluye en el archivo de lista de materiales y éste muestra todas las partes que se necesiten. Si el programa de producción se introduce en la computadora y se conjuga con el archivo de materiales y el programa maestro de inventarios, la computadora puede predecir con precisión la demanda futura de cada parte. Después pueden hacerse los pedidos para cumplir con esta demanda y no con un promedio anual. Con la MRP, los resultados son inventarios menores y menos faltantes.

Intuitivamente, la MRP es tan lógica, que uno se pregunta por qué se desarrollo hace relativamente poco. Parte se debe a que muchas compañías, hasta hace muy poco, no tenían acceso a computadoras de buen tamaño y el software necesario. Todavía más importante es el hecho de que la MRP requiere gran cantidad de trabajo de escritorio y la aceptación de fechas límite, si se dispone de suficiente tiempo de entrega para ordenar. El departamento de ingeniería debe congelar sus diseños, el departamento de ingeniería debe congelar sus diseños, el departamento de ventas debe proporcionar pronósticos de la demanda y el departamento de producción debe desarrollar su programa. Todo esto debe introducirse en la computadora a tiempo. Un cambio tardío en ingeniería, por ejemplo, el de agregar un transistor más, puede satisfacerse con el "exceso" de inventario de los métodos antiguos, pero sería difícil con la MRP. En otras palabras, debido al factor humano, ha sido más difícil llevar a la práctica la MRP de lo que era de esperarse.

EXPERIENCIAS DEL MUNDO REAL

Las empresas tienen tanto dinero invertido en inventarios que no puede ignorarse un control apropiado. Sin control, parece haber una tendencia humana a tener más bien inventarios grandes que pequeños. El exceso de inventario reduce el capital de trabajo y en el caso extremo puede causar tan serios déficit en el flujo de caja, que puede causar la bancarrota, aun cuando las ventas estén creciendo.

Pero esto no significa que se debe controlar cada artículo con un modelo matemático. Ya se habló de los registros necesarios tanto para los modelos periódicos como para los continuos. En algunos casos existen otras dificultades. La demanda puede variar mucho debido a variaciones en la moda o a cambios en los esfuerzos de promoción. Puede ser difícil estimar los costos de ordenar y de mantener un artículo. O puede ser que la inversión en

un artículo dado sea muy pequeña para garantizar un enfoque de modelado. Por ejemplo, la ferretería local puede tener menos de $100 invertidos en cualquiera de los artículos.

Si no se usan los modelos formales, entonces lo mejor guía es desarrollar una "tendencia" hacia el inventario. Del modelo EOQ se sabe que el inventario debe crecer más lentamente que la demanda. Si los clientes aceptan faltantes, entonces se reducen los costos de inventario. El concepto de costos por faltantes puede guiar la estimación de qué tan significativo puede ser quedar sin existencias. Los inventarios de seguridad serán necesarios para manejar las incertidumbres durante los tiempos de entrega o en la demanda. Aun cuando se haga intuitivamente, las decisiones de cuándo y cuánto se ha ordenar se deben tomar dentro del contexto de una cantidad fija de reorden o de un modelo de periodo fijo.

La disponibilidad de las computadoras ha reducido el costo de los registros de inventario. Por supuesto se dispone de sistemas para llevar registros continuos, hacer cálculos y, aun, imprimir órdenes de compra. Los sistemas bien diseñados incluyen modelos de pronósticos para hacer ajustes de pequeños cambios en la demanda. Los cambios grandes, como la eliminación de un artículo o los resultados de promociones especiales se deben introducir por separado.

Algunos expertos argumentan que el modelo EOQ se usa más de lo necesario, aplicándose en muchas situaciones para las que existen modelos mejores. No se dirá nada en contra de esto, pero los autores piensan que es necesario que más administradores conozcan los métodos de control de inventarios apropiados. En el grado en que el modelo EOQ ayude en este proceso de aprendizaje, seguirá siendo útil.

RESUMEN

En este capítulo se considera el problema del manejo de incertidumbre en la demanda o en el tiempo de entrega. Se describen los modelos de cantidad fija de reorden para costos por faltantes conocidos o desconocidos, así como un modelo de periodo fijo de reorden para costos por faltantes desconocidos. El problema básico que trata cada uno de estos modelos es el mejor balance entre el riesgo de un faltante y el aumento en el costo de conservación. El inventario de seguridad se incrementa o se disminuye para aumentar o reducir la protección contra faltantes.

Cuando no se conocen los costos por faltantes, se usa el concepto de nivel de servicio para determinar el inventario de seguridad. El nivel de servicio es la probabilidad de que se tenga un artículo en inventario; tal nivel lo selecciona intuitivamente la administración. Los niveles de servicio típicos van de 80 a 99%; niveles más altos son muy raros, debido a los cambios rápidos en los costos de los inventarios de seguridad. Si pueden determinarse los costos por faltantes, entonces el inventario de seguridad puede determinarse igualando el costo marginal de mantener con el costo marginal por faltantes.

Los modelos de periodo fijo de reorden requieren inventarios de seguridad más grandes, pero tienen costos de registro menores que los modelos

de cantidad fija de reorden. En cualquier caso, deben hacerse recuentos físicos periódicos del inventario para verificar los registros y siempre son necesarias las medidas de seguridad para controlar el robo.

Cuando son muchos los artículos que requieren control de inventarios, pueden aplicarse el análisis de prioridad y el análisis ABC para identificar los que son más críticos. En muchos negocios sólo una pequeña proporción de artículos justifica un control por medio de un modelo de inventarios. La mayoría puede controlarse en forma adecuada con un sistema de dos secciones u otro método informal.

La amplia variedad en las situaciones de inventario ha evitado el desarrollo de un modelo universalmente óptimo. Sin embargo, se han desarrollado muchos modelos y en muchos otros casos puede aplicarse simulación. Lo más importante es que la meta siempre es la misma: determinar cuándo y cuánto se debe ordenar, de manera que se cumplan los objetivos de servicio al cliente con un costo mínimo.

EJERCICIOS

Cantidad fija de reorden con costos por faltantes desconocidos

14-1 Encuéntrese el punto de reorden para un artículo que tiene una demanda de tiempo de entrega distribuida normalmente con media de 70 y desviación estándar de 8, cuando se desea un nivel de servicio del 90%.

14-2 Un artículo tiene una demanda promedio de tiempo de entrega de 40 unidades (con distribución normal) con una desviación estándar de 7. Se desea un nivel de servicio del 95 %. Encuéntrese el punto de reorden.

14-3 Dado que un artículo tiene una demanda de tiempo de entrega de 100 unidades con una desviación estándar de 10 (distribuida normalmente), calcúlese el punto de reorden para niveles de servicio de 80, 85, 90, 95, 99 y 99.5%. Grafíquense los resultados.

14-4 La demanda de tiempo de entrega para un artículo tiene un promedio de 65 con desviación estándar de 8 (y distribución normal). ¿Cuál es el inventario de seguridad necesario para proporcionar sólo un 5% de posibilidades de quedar sin existencias?

14-5 Estímese el nivel de servicio apropiado para los siguientes artículos en una tienda de departamentos grande:
a Ropa interior para caballero
b Refrigeradores
c Radios de mesa de menos de $50,
d Focos
e Sobrecamas

14-6 La Extron Corporation produce un compuesto químico de limpieza en tres localidades, después lo manda a uno de sus ocho almacenes regionales. El compuesto se envía en envases de 50 kilogramos. Cada almacén espera mantener un nivel de servicio a sus clientes del 95 %.

El almacén de Midwest estima sus costos de ordenar en $5 y sus costos de conservación en $4 por envase por año. La demanda de este almacén tiene un promedio de 1 000 envases por año. La demanda de tiempo de entrega se distribuye normalmente, con media de 20 y desviación estándar de 5. Formúlese una política de inventario para este artículo.

14-7 Una tienda de artículos marinos almacena propelas para motores fuera de borda. Una propela de un modelo de mucha aceptación tiene ventas promedio de 500 unidades por año. La propela cuesta $25 y se vende por $35. La tienda trata de mantener un nivel de servicio del 95 %. Los costos de conservación promedian anualmente el 20 % del valor del inventario, mientras que cada orden cuesta $5. La demanda del tiempo de entrega tiene distribución normal con media de 10 propelas y desviación estándar de 3. Con un modelo de cantidad fija de reorden, formúlese la política de inventario que se debe usar.

14-8 La Dunder's Deli importa sardinas enlatadas desde el norte de Europa, junto con muchos otros artículos. Las sardinas se compran en cajas de 24 latas y se venden bastante bien, con un promedio de 15 cajas por año. El gerente hace pedidos de cinco caja? cada vez, debido a que el tiempo de entrega es largo (casi siempre dos meses). El pedido se hace cuando se abre la última caja. Si la demanda del tiempo de entrega tiene un promedio de tres cajas con una desviación estándar de dos cajas, ¿cuál es el nivel de servicio que proporciona la Dunder's?

Costos por faltantes conocidos

14-9 Encuéntrese la cantidad de reorden y el punto de reorden con un modelo de cantidad fija de reorden para el artículo que se describe en seguida:

Demanda anual:	2 000 unidades
Demanda promedio de tiempo de entrega	50 unidades
Desviación estándar de la demanda del tiempo de entrega	8 unidades
Costo de ordenar	$6 por orden
Costo de conservación	$8 por unidad por año
Costo por faltantes	$10 por unidad

14-10 Dados los datos siguientes, encuéntrese la cantidad de reorden y el punto de reorden:

Demanda anual	100 000 unidades
Costo de ordenar	$12 por orden
Costo de conservación	$60 por unidad por año
Costo por faltante	$10 por unidad
Tiempo de entrega promedio	3 días
Demanda diaria promedio	400 unidades

(Supóngase que la demanda del tiempo de entrega está distribuida normalmente con una desviación estándar de 35 unidades).

14-11 Si el costo anual de mantener una unidad y el costo por faltante por unidad son iguales, entonces el nivel de servicio óptimo depende sólo del número de órdenes que se hacen cada año. Verifíquese esta afirmación matemáticamente.

14-12 La Helen's Auto Parts es una refaccionaria con una estación de servicio y clientes por toda la ciudad. La firma hace entregas regulares y especiales a domicilio sin cargo, cuando es necesario. Un artículo que se trabaja es marchas de encendido para autos. Un modelo que sirve para muchos modelos de la General Motors tiene un promedio de ventas de 500 unidades por año. El costo de conservación de este modelo se estima en $3.50 por unidad por año. Si en algún momento no se tiene la parte y un cliente la necesita, la venta se pierde porque el cliente llamará a otro distribuidor. Helen estima que este costo por faltantes es de $8 por unidad. Helen ordena las marchas de un productor local. El tiempo de entrega es de 1 semana, como promedio. De los registros pasados se sabe que la demanda del tiempo de entrega tiene distribución normal con media de 10 y desviación estándar de 4. Su costo de ordenar es de $5 por orden. ¿Cuál es la política de inventario que se recomienda para Helen?

14-13 La Tripleday Book Store vende una amplia variedad de libros de pastas duras sobre muchos temas. La tienda está devidida en áreas por materia, de manera que pueden agruparse los libros similares. Considérese, por ejemplo, el área de viajes. La tienda tiene 15 pies de espacio en las repisas en que pueden colocarse hasta 200 libros sobre viajes. La Tripleday piensa que los libros sobre viajes, con algunas excepciones, se compran por impulso y que las ventas se pierden si se dispone de muy pocos libros. La tienda estima este costo por faltantes en $3 por cliente de libros de viajes, siempre que tiene menos de 10 libros. En promedio, vende 400 de estos libros al año. Los costos de ordenar son altos, ya que debe hacerse una selección de títulos, promediando $15 por orden. El costo de conservación es de $1.20 por libro por año. De la experiencia pasada se sabe que la demanda del tiempo de entrega es de 40 libros en promedio con una desviación estándar de 10, normalmente distribuida.

a ¿Cuántos libros de viaje se deben ordenar cada vez?

b ¿Cuál debe ser el punto de reorden?

c ¿Cuál es el nivel de servicio que se proporciona?

d ¿Qué suposiciones se hicieron sobre los libros de viajes?

14-14 Reliable Office Supplies vende un modelo de engrapadora de trabajo pesado, un producto de buena marca y calidad. La engrapadora es un artículo básico de equipo de oficina y la Reliable considera que es un artículo esencial en el almacén. Si la tienda se queda sin él, no sólo pierde la venta, sino que da la impresión al cliente de estar mal surtida, desanimándolo en sus compras futuras. De acuerdo con esto, estima que el costo por faltantes es $100 por uni-

dad. Como la Reliable es una tienda grande de mucho movimiento, tiene un promedio de ventas de 5 engrapadoras por día durante 300 días de operación. Las engrapadoras se ordenan a un proveedor con un costo de $4 por orden. El tiempo de entrega casi siempre es de 10 días. Se ha encontrado que la demanda del tiempo de entrega tiene distribución normal con una desviación estándar de 9. Los costos de conservación se estiman en $1 por unidad por año.

a Formúlese una política de inventario para las engrapadoras.

b ¿Cuál es la probabilidad de que se queden sin engrapadoras?

Periodo fijo de reorden con costos por faltantes desconocidos

14-15 La Randy's Gallery vende un artículo de consumo que tiene un promedio de ventas de 10 unidades por día. Los pedidos sólo pueden hacerse cada tercer día y se reciben tres días después. La Randy's quiere mantener un nivel de servicio del 99%. Si la desviación estándar de la demanda del periodo de reorden es 15, ¿cuál debe ser el punto hasta el que se ordena?

14-16 La Gwen's Gift Shop trabaja diferentes floreros de cristal. Las órdenes se hacen cada mes, con un promedio de tiempo de entrega de dos meses. Si la demanda del periodo de reorden tiene desviación estándar de 4:

a ¿Qué punto hasta el que se ordena dará un nivel de servicio de 98%?

b Establézcase la política de inventario, considerando el hecho de que el periodo de reorden es menor que el tiempo de entrega.

14-17 Greg's TV está tratando de establecer una política de inventario para un nuevo modelo de televisión que saldrá pronto al mercado. La fábrica informa que se venderá bien, debido a las reducciones en el precio y algunas mejoras. Siendo cautelosamente optimista, Greg estima que las ventas llegarán a 200 por año. Greg puede hacer un pedido en cualquier momento y espera un tiempo de entrega de 30 días. Sus costos de ordenar son de $10 y los costos totales de conservación de $50 por televisor por año. El año pasado, Greg ordenaba cada dos semanas y encontró que la demanda del periodo de reorden tenía distribución normal con una desviación estándar de 3. No quiere arriesgarse a tener faltantes más de una vez al año.

a ¿Qué tan seguido debe Greg hacer un pedido?

b ¿Cuánto debe ordenar cada vez, basándose en un modelo de periodo fijo de reorden?

14-18 Electro Labs diseña instrumentos electrónicos que incluyen galletas de semiconducción para realizar operaciones numéricas. El laboratorio de diseño de Electro almacena estas galletas para disponibilidad de sus ingenieros. Las galletas cuestan $10 cada una y tienen un tiempo de entrega promedio de $30 días. El costo de ordenar es de $6 por orden y el de conservación es el 20% del valor

del inventario anual. Como las galletas son importantes para el trabajo de diseño, el laboratorio quiere un nivel de servicio del 99.5%. Si usa un promedio de 400 galletas por año y la demanda del periodo de reorden tiene una desviación estándar de 6 (con distribución normal), formúlese el modelo de período fijo de reorden para estas galletas.

Análisis ABC

14-19 Se seleccionaron al azar los siguientes artículos de un almacén grande. Clasifíquese cada uno como un artículo A, B o C.

Artículo	*Costo, $*	*Ventas anuales, unidades*
1	0.50	1 000
2	9	1 000
3	5	1 200
4	75	400
5	6	500
6	100	20
7	4	500
8	15	3 000
9	40	250
10	50	30

14-20 Los siguientes artículos son una muestra representativa de un inventario grande. Clasifíquese cada artículo como A, B o C.

Artículo	*Costo, $*	*Ventas anuales, unidades*
1	9	1 000
2	400	100
3	1	7 500
4	150	100
5	25	15 000
6	10	1 250
7	2	250
8	5	500
9	35	1 000
10	0.30	10 000

ESTUDIO DE UN CASO: WONDERWORLD

Wonderworld es un gran parque de diversiones con una extensión de más de 40 acres. El parque opera todos los días del año e incluye juegos, restaurantes, tiendas y varias atracciones especiales. Como parte de su programa de mantenimiento almacena más de 1 000 artículos, que van desde focos hasta motores síncronos especiales. Por motivos de control, este inventario está centralizado y manejado por el gerente de materiales y suministros, Joan Bilko.

Ha sugerido una preocupación sobre el hecho de que el cambio de inventario ha declinado y la inversión en el mismo se ha elevado. El parque se está ampliando, lo cual causa una demanda creciente y una necesidad de almacenar nuevos artículos. No obstante, este crecimiento ha sido moderado y no se cree que esto sea la causa del problema.

Actualmente el inventario se administra con base en prioridades. Los artículos de clase I son aquellos que, si faltan, causarían que se cerrara algún juego u otra atracción. Estos artículos están marcados con una etiqueta roja en su área de almacenamiento y el punto de reorden se estableció en dos meses de uso normal. Los artículos de clase II son aquellos que no tienen sustitutos, como tubos fluorescentes de tamaños especiales. Estos artículos llevan una etiqueta amarilla y se reordenan cuando el nivel de inventario baja a un mes. Los artículos de clase III tienen una etiqueta azul. Estos son los artículos comunes más algunos especiales pero no críticos. Se reordenan cuando bajan hasta dos semanas de uso promedio. Los costos anuales de conservación para todos los artículos están basados en el 25% del valor del inventario promedio. Los costos de ordenar de cada artículo se estiman que son $5 por orden.

Joan ha escogido 20 artículos al azar para investigar la posibilidad de mejorar el control de inventarios. En la tabla 14-2 se da una lista de estos artículos. Ella desea saber las recomendaciones que haya sobre cómo administrar estos artículos.

Preguntas

1 Realícese un análisis ABC de los artículos muestra. ¿Qué artículos se recomienda que sean totalmente controlados?

TABLA 14-2
Artículos de Wonderworld

Artículo	*Costo, $*	*Uso anual, unidades*	*Tiempo de entrega, días*	*Prioridad*	*Cantidad de reorden*
1	0.50	2 200	1	III	500
2	1	120	1	III	25
3	10	18	5	I	5
4	2	700	2	III	100
5	4	2 000	1	I	400
6	4	50	2	III	10
7	0.50	140	1	III	50
8	0.10	6 000	1	III	1 000
9	1	7 000	1	III	500
10	1	450	1	III	50
11	2	1 500	1	III	300
12	8	6 250	1	II	600
13	2	40	1	II	40
14	1	100	1	III	100
15	0.25	200	1	III	100
16	6	250	5	III	100
17	3	50	1	III	25
18	10	2 500	2	II	500
19	1	500	2	III	100
20	2	250	1	III	50

2 Desarróllese una política de inventarios para los artículos de clase A y B, basada en un modelo de cantidad de reorden. Para propósito de cálculos numéricos, supóngase que la demanda en el tiempo de entrega se distribuye normalmente. La desviación estándar puede aproximarse por la raíz cuadrada del tiempo de entrega. Úsense niveles de servicio de 99.5, 95 y 90% para los artículos de prioridad I, II y III, respectivamente.

3 Estímese la mejora en el cambio del inventario, si se adoptan las nuevas políticas para los artículos que se acaban de modelar.

4 ¿Existe algún artículo C que tenga una prioridad de clase I? Si lo hay, ¿cómo debe administrarse?

5 Si se adoptan las políticas que se desarrollaron en (2), ¿habrá más o me nos riesgo de faltantes comparado con las políticas actuales?

BIBLIOGRAFÍA

Buchan, Joseph y Ernest Koenigsberg: *Scientific Inventory Management* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1963).

Chase, Richard B. y Nicholas J. Aquilano: *Production and Operations Management* (Homewood, 111.: Richard D. Irwin, 1973).

Starr, Martin K. y David W. Miller: *Inventory Control: Theory and Practice* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1962).

Tersine, Richard J.: *Materials Management and Inventory Systems* (New York: North-Halland, 1976).

Veinott, A. F., Jr.: "The Status of Economical Inventory theory", *Management Science,* vol. 12, núm. 11 (julio 1966) pp. 745-777.

15

LÍNEAS DE ESPERA: TEORÍA DE COLAS

Todo el bien permanece con aquél que esperó sabiamente.

Thoreau

Ellos sirven sólo al que se detiene y espera.

Milton

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje
Costos de los sistemas de colas
  Costo de espera
  Costo de servicio
  Sistema de costo mínimo
Estructuras típicas
Modelo de un servidor y una cola
  Llegadas
  Cola
  Instalación de servicio
  Salidas
  Características de operación
  Ejemplo: un supermercado
  Algunas peculiaridades de las colas
  Ejercicio de práctica (15-1)
Evaluación del sistema cuando se conoce el costo de espera
  Ejemplo: tamaño de una brigada
Evaluación del sistema con costos de espera desconocidos
  Ejemplo: restaurante de comida rápida
Modelo de un servidor con tiempos de servicio constantes
  Ejemplo: lavado automático de autos
  Ejercicio de práctica (15-2)
Comparación de tiempos de servicio exponenciales y constantes
Modelo con servidores múltiples
  Un ejemplo con costo de espera desconocido
  Ejercicio de práctica (15-3)
Comparación de un servidor rápido con dos servidores lentos
Distribuciones Poisson y exponencial
  La distribución exponencial
Solución por simulación
Experiencias del mundo real
Resumen
Ejercicios
Estudio de un caso: cajeros de autobanco
Bibliografía

El tener que esperar en una cola es una experiencia cotidiana que normalmente se considera desagradable. Esperar un elevador, ser servido en un restaurante o en la cola de un banco es una confrontación con la pérdida de tiempo. No es fácil "esperar sabiamente" en la cola de un supermercado. Si la espera es demasiado larga, las personas se vuelven irritables e inquietas; los temperamentos se ofuscan. Por supuesto, "demasiado larga" es relativo. Por ejemplo, la espera puede ser más larga si se está sentado (como en un restaurante) que si se está parado (como en una tienda de abarrotes o supermercado). Aun así, la paciencia tiene un límite. Finalmente, la gente se va a otra parte.

Aunque sea desagradable esperar, es fácil observar que el proporcionar suficiente capacidad de servicio para eliminar la espera sería muy costoso. Piénsese en cuántas cajeras serían necesarias en un banco o cuántas cajas en una tienda para eliminar todas las colas. (Aun si esto fuera posible, todavía se tendría que esperar mientras se proporciona el servicio.) Es claro que se necesita algún tipo de balance o compromiso para que el tiempo de espera no sea muy largo y el costo de servicio no sea muy alto.

El problema del administrador es determinar qué capacidad o tasa de servicio proporciona el balance apropiado. Este sería un problema sencillo, si cada cliente llegara de acuerdo a un horario fijo y si el tiempo de servicio también fuera fijo. Como en una línea de ensamble, se podría balancear con exactitud la capacidad de servicio con las llegadas. Cualquier capacidad extra sería un desperdicio, menos capacidad significaría que algunas llegadas no se atenderían. Sin embargo, en muchas situaciones ni el tiempo de llegada ni el tiempo de servicio son predecibles. El administrador de un restaurante McDonald sabrá que la mayoría de los clientes llegan alrededor de las horas de comida, pero no sabe con exactitud en qué momento llegarán. De igual manera, el tiempo para servir una orden variará. Los sistemas de líneas de espera son sistemas probabilistas o aleatorios.

Con experiencia y sentido común, muchos administradores encuentran un balance aproximado entre los costos de espera y de servicio sin elaborar ningún cálculo. Por ejemplo, el administrador de un supermercado actúa intuitivamente para agregar personal en las cajas cuando las colas se hacen muy largas. El administrador de un restaurante planea tener más meseros alrededor de las horas de comidas, guiándose por la experiencia. No obstante, hay ocasiones en las que la intuición necesita ayuda, como cuando va de por medio una inversión sustancial de capital o cuando el balance apropiado no es evidente. El análisis cuantitativo con frecuencia es útil en estas situaciones.

En el análisis de líneas de espera en este capítulo se aplica la teoría de colas. Una *cola* es una línea de espera y la *teoría de colas* es una colección de modelos matemáticos que describen sistemas de líneas de espera particulares o *sistemas de colas.* Los modelos sirven para encontrar el comportamiento de estado estable, como la longitud promedio de la línea y el tiempo de espera promedio para un sistema dado. Esta información, junto con los costos pertinentes, se usa, entonces, para determinar la capacidad de servicio apropiada.

Igual que en los sistemas de inventarios, el número de sistemas de colas diferentes es virtualmente ilimitado. Algunos sistemas son tan especiales que no existe ningún modelo general para su comportamiento de estado estable. En tales casos, es posible usar simulación, esto se presenta en el siguiente capítulo.

En este capítulo se examinan los costos asociados con los sistemas de colas, su estructura general y tres modelos específicos para llegadas aleatorias. Los modelos se escogieron debido a que es relativamente fácil usarlos manualmente o con una calculadora y tienen una amplia aplicación.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Después de estudiar este capítulo, el lector debe saber:

1 Los dos tipos de costos asociados con los sistemas de colas y cómo se calculan.
2 Ejemplos típicos de las diferentes estructuras de los sistemas de colas.
3 Las suposiciones y las ecuaciones para los tres modelos de sistemas de colas.
4 Dos formas de aplicar los modelos de sistemas de colas para encontrar la capacidad de servicio (*a*) cuando se conoce el costo de espera y *(b)* cuando no se conoce el costo de espera.
5 Cómo identificar un comportamiento transitorio, de estado estable o explosivo en las colas.
6 El significado de los siguientes términos:

Sistema de colas	Capacidad de servicio
Teoría de colas	Salidas
Llegadas	Características de operación
Cola	Distribución Poisson
Disciplina de la cola	Distribución exponencial

COSTOS DE LOS SISTEMAS DE COLAS

Un sistema de colas puede dividirse en sus dos componentes de mayor importancia, la cola y la instalación de servicio (véase la figura 15-1). Las *llegadas* son las unidades que entran en el sistema para recibir el servicio. Siempre se unen primero a la cola; si no hay línea de espera se dice que la cola está vacía. De la cola, las llegadas van a la instalación de servicio de acuerdo con la *disciplina de la cola,* es decir, de acuerdo con la regla para

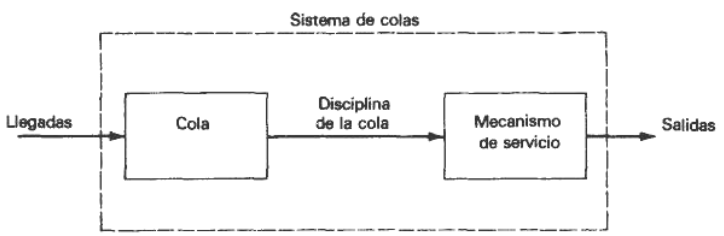


FIGURA 15-1
Sistema de colas general.

decidir cuál de las llegadas se sirve después. El primero en llegar primero en ser servido es una regla común, pero se podría servir con prioridades o siguiendo alguna otra regla. Una vez que se completa el servicio, las llegadas se convierten en *salidas.*

Ambas componentes del sistema tienen costos asociados que deben considerarse.

Costo de espera

Esperar es estar inútil. Es desperdicio. Significa que algún recurso está inactivo cuando podría usarse en forma más productiva (o agradable) en otra parte. De hecho, representa un costo de *oportunidad.* Cuando los camiones están esperando inútiles en una línea de un muelle de carga y descarga, se pierde su productividad; es dinero "que se va por el caño" y que no puede recuperarse.

Cuando los clientes esperan en una línea en un banco, el costo de espera es indirecto. Es cierto que no se hace ningún pago cuando un cliente disgustado se va porque la cola es demasiado larga. Pero el banco "paga" esta espera de otra manera. Los clientes se quejan quitando tiempo a los empleados. Dejan de venir, causando que se pierdan oportunidades de ganancias. Si el problema continúa, podrían hacer que el banco quebrara. Este costo intangible es tan real como cualquier dinero que "se saca del bolsillo".

El servir con prontitud puede proporcionar una forma de competencia en los negocios. McDonald's ha construido una exitosa cadena de restaurantes en parte gracias al servicio rápido. Servir al cliente con prontitud ha sido un factor importante en el crecimiento de las tiendas K-Mart. La sociedad de hoy está muy consciente del tiempo, esto hace que la evaluación apropiada del tiempo de espera sea más importante.

Cuando el costo unitario de espera es medible, como en el caso de los camiones en el muelle de carga y descarga, los cálculos son directos. Partiendo de la nómina y de otros datos contables puede encontrarse el costo por hora. Como el costo de espera casi siempre es proporcional al tiempo de espera, el costo total de espera puede expresarse como el costo de espera por hora multiplicado por la longitud promedio de la línea:

$$\text{Costo total de espera} = C_W L$$

en donde C_w = costo de espera en dólares por llegada por unidad de tiempo y L = longitud promedio de la línea.

Si, por ejemplo, el costo de un camión que espera en la línea es de $20 por hora (incluso el operador) y en promedio hay cuatro camiones esperando, entonces el costo de espera total es $80 por hora.

Con frecuencia es difícil dar una cantidad en dólares para el costo de espera de los clientes que están en una línea. Ciertamente el comportamiento humano tiene muchas variaciones. Para comenzar, las personas difieren, algunas son más pacientes que otras. Después, aun la misma persona es diferente en una situación que en otra. Al tiempo que es posible esperar una

hora para comer en un restaurante, se puede ser muy impaciente por 60 segundos de espera ante un elevador o en un semáforo. Matemáticamente es aún más complicado: ¿es lineal el costo de espera? ¿Cuesta lo mismo el primer minuto que el segundo? ¿O el tercero? ¿O se incrementa el costo por minuto conforme aumenta la espera?

Existen dos formas de manejar el costo intangible del tiempo de espera de los clientes. Una es pedir a las personas con conocimientos que estimen el valor promedio del tiempo de un cliente, tomando en cuenta los factores psicológicos y competitivos de la situación. Después casi siempre se supone linealidad (es más fácil) y se usa la fórmula anterior para encontrar el costo de espera total. El segundo método tiene un enfoque indirecto que establece un tiempo máximo de espera para el cliente promedio, éste se usa después para determinar la capacidad de servicio. Con este punto de vista, por supuesto, todavía existe el costo de espera pero no se usa en forma explícita. Ambos enfoques se presentan en este capítulo.

Costo de servicio

Determinar el costo de servicio es más sencillo, en concepto, que determinar el costo de espera. En la mayoría de las aplicaciones se tratará de comparar varias instalaciones de servicio: dos cajeras en un banco contra tres; una brigada de cuatro contra una de cinco; una caja en una tienda contra dos. En estos casos, sólo se necesitan los costos comparativos o diferenciales. Por ejemplo, si se quiere saber cuántas cajas de autobanco deben tener personal, sólo se necesitan los costos de personal. Por otra parte, si la pregunta es cuántas de estas cajas se deben construir, entonces se necesitan los costos de construcción y los de operación de cada ventanilla. Casi siempre los datos necesarios son evidentes para una situación dada.

Sistema de costo mínimo

Tan indeseable como pueda ser la espera, puede ser menos costoso que proporcionar un servicio más rápido. Desde un punto de vista global, se quiere el sistema que comparado con los demás, tiene el costo total más pequeño, incluyendo el costo de servicio y el costo de espera. Esto se muestra en la figura 15-2. Para tasas bajas de servicio, se experimentan largas colas y costos de espera muy altos. Conforme aumenta el servicio, hay un ahorro sustancial en el costo de espera, aunque los costos de servicio aumenten, ya que el costo total del sistema disminuye. Sin embargo, finalmente se llega a un punto de disminución en el rendimiento. Más allá del punto de costo mínimo, el aumento en el servicio cuesta más que los ahorros consecuentes en el costo de espera. Entonces, el objetivo es encontrar el *sistema de costo mínimo.*

ESTRUCTURAS TÍPICAS

Todos los ejemplos de líneas de espera que se han presentado hasta aquí incluyen personas, pero éste no siempre es el caso. Las llegadas pueden ser

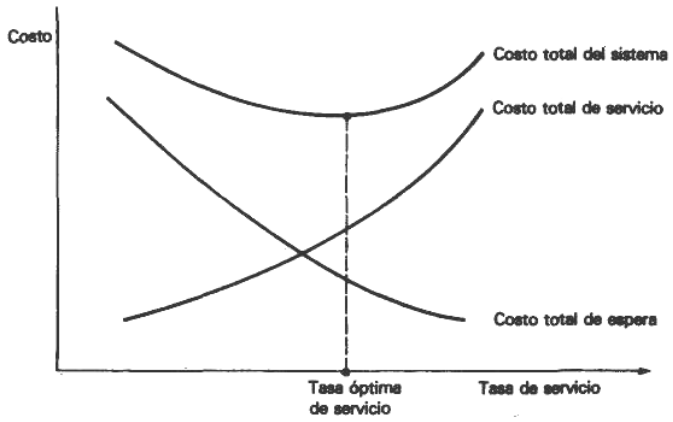


FIGURA 15-2
Combinación de los costos de servicio y de espera.

cartas, carros, incendios, ensambles intermedios en una fábrica, etc. En la tabla 15-1 se muestran ejemplos de varios sistemas de colas.

Nótese que en cada situación sólo fluye un tipo de artículo a través del sistema. Dicho de otra manera, las llegadas son homogéneas o vienen de la misma población. Ésta es una limitación importante de la teoría de colas. Cuando una instalación de servicio, como un aeropuerto, maneja diferentes tipos de llegadas, éstas se deben tratar por separado. Por ejemplo, en la tabla 15-1 se muestra un sistema para los pasajeros en el aeropuerto y otro para los aviones. Por supuesto, los dos se relacionan, pero la teoría de colas sólo los puede tratar por separado y en forma independiente. Si se quisiera analizarlos juntos, se tendría que usar simulación.

¿Puede el lector reconocer diferencias en las estructuras de los sistemas que se observan en la tabla 15-1? Por ejemplo, los bancos casi siempre

TABLA 15-1

Ejemplo de Sistemas de Colas

Situación	*Llegadas*	*Cola*	*Mecanismo de servicio*
Aeropuerto	Aviones	Aviones en carreteo	Pista
Aeropuerto	Pasajeros	Sala de espera	Avión
Departamento de bomberos	Alarmas de incendio	Incendios	Departamento de bomberos
Compañía	Números marcados	Llamadas	Conmutador
Lavado de carros	Autos	Autos sucios	Mecanismo de lavado
La corte	Casos	Casos atrasados	Juez
Panadería	Clientes	Clientes con números	Vendedor
Carga de camiones	Camiones	Camiones en espera	Muelle de carga
Oficina de correos	Cartas	Buzón	Empleados por correos
Crucero	Autos	Autos en línea	Crucero
Fábrica	Subensamble	Inventario en proceso	Estación de trabajo
Cartas de negocios	Notas de dictado	Cartas para mecanografiar	Secretaria
Reproducción	Pedidos de copias	Trabajos	Copiadoras
Hospital	Pacientes	Personas enfermas	Hospital

tienen más de un cajero, cada uno con una línea de espera separada. Con frecuencia los aeropuertos tienen más de una pista de aterrizaje. La oficina postal maneja el correo con base en prioridades: primera clase, tercera clase, etc. Las fábricas generalmente tienen una serie de estaciones de trabajo, no sólo una.

Permitiendo que varíen el número de colas y el número de servidores, pueden hacerse los diagramas de los cuatro tipos de sistemas de la figura 15-3. Cada línea de espera individual y cada servidor individual se muestra por separado. Esto ayuda a esclarecer la estructura del sistema.

El primer sistema que se muestra en la figura 15-3 se llama un sistema de un servidor y una cola o puede describir un lavado de carros automático o un muelle de descarga de un solo lugar. El segundo, una línea con múltiples servidores, es típico de una peluquería o una panadería en donde los clientes toman un número al entrar y se les sirve cuando les llega el turno. El tercer sistema, aquél en que cada servidor tiene una línea separada, es característico de los bancos y las tiendas de autoservicio. Para este

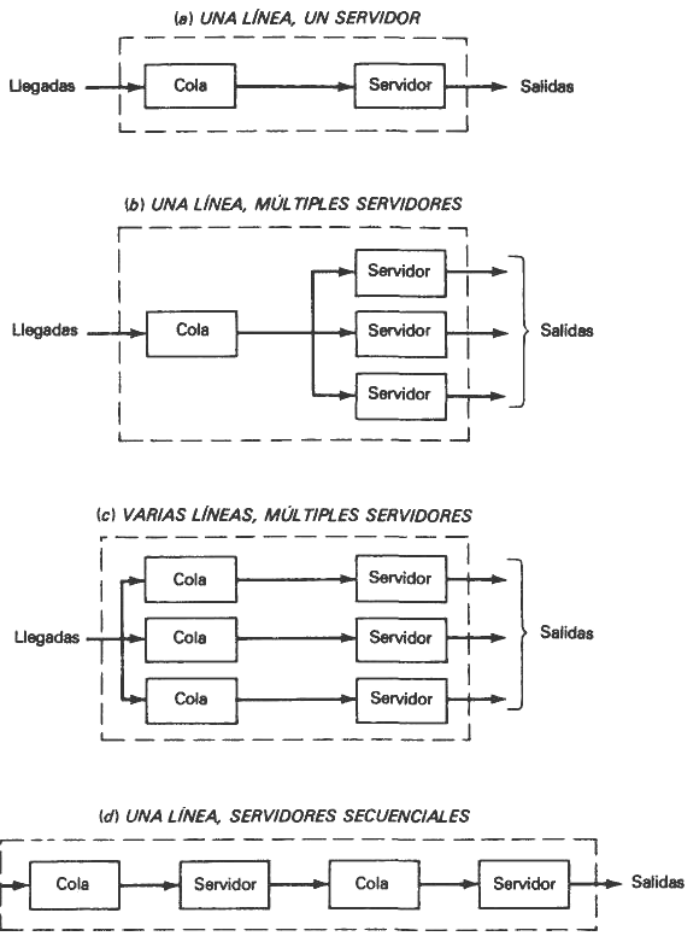


FIGURA 15-3
Cuatro estructuras de colas diferentes.

tipo de servicio pueden separarse los servidores y tratarlos como sistemas independientes de un servidor y una cola. Esto sería válido sólo si hubiera muy pocos intercambios entre las colas, como en las ventanillas de autobanco. Cuando el intercambio es sencillo y ocurre con frecuencia, como dentro del banco, la separación no sería válida. El cuarto sistema de la figura 15-3, una línea con servidores en serie, puede describir una fábrica. De nuevo, para propósitos de análisis, es posible separar los subsistemas y usar el modelo de un servidor y una cola. ¿Puede el lector pensar en otras estructuras que no se hayan mostrado?

Cuando se agregan variaciones en los patrones de llegadas, de las colas y de los tiempos de servicio, el número de combinaciones rebasa la imaginación. Por fortuna, unos cuantos modelos sencillos pueden proporcionar una visión considerable en los problemas de líneas de espera. Se comenzará por un modelo básico.

MODELO DE UN SERVIDOR Y UNA COLA

Este modelo puede aplicarse a personas esperando en una línea para comprar boletos para el cine, a mecánicos que esperan obtener herramientas de un expendio o a trabajos de computadora que esperan tiempo de procesador. Es uno de los modelos más antiguos, más sencillos y más comunes de la teoría de colas. Se analizarán las suposiciones necesarias para este modelo.

Llegadas

Se supone que las llegadas entran al sistema *de manera completamente aleatoria.* No tienen horario, es impredecible en qué momento llegarán. De una manera más formal, esto significa que la probabilidad de una llegada en cualquier instante de tiempo es la misma que en cualquier otro momento. Como se verá después, esto equivale a afirmar que *el número de llegadas por unidad de tiempo* tiene una distribución *Poisson.* La suposición de llegadas aleatorias es válida para una infinidad de sistemas reales (por supuesto, sólo durante las horas de operación).

El modelo también supone que las llegadas vienen de una población infinita y llegan una a la vez. Siempre que no falten las llegadas, es decir, se acaben, puede considerarse que su fuente es infinita. No se permiten llegadas simultáneas, ya que causarían múltiples líneas y este es un modelo de una sola línea.

Cola

En este modelo se considera que el tamaño de la cola es infinito. Es cierto que todas las colas tienen límites en el tamaño, pero si este límite no desanima o evita las llegadas, puede ignorarse. La disciplina de la cola es primero en llegar, primero en ser servido sin prioridades especiales. También se supone que las llegadas no pueden cambiar lugares en la línea o dejar la cola antes de ser servidas.

Instalación de servicio

Se supone que un solo servidor proporciona el servicio que varía aleatoriamente. En particular, el *tiempo de servicio sigue una distribución exponencial* (que se describirá más tarde). De hecho, esto se deriva de la suposición de que las salidas son completamente aleatorias, la misma suposición que se usó para las llegadas.

Salidas

No se permite que las unidades que salen vuelvan a entrar de inmediato al sistema. Si bien esto sucede en ocasiones en los sistemas reales, es muy raro. Si sucediera con frecuencia, afectaría la distribución de las llegadas. Resumiendo, este modelo es para:

Un servidor y una cola
Llegadas Poisson
Cola infinita, primero en llegar primero en ser servido
Tiempos de servicio exponenciales

Características de operación

Las características de operación son medidas de lo bien que funciona el sistema. En la mayoría de las aplicaciones de líneas de espera, el estado estable es de primera importancia. Los estados transitorios, como el de echar a andar y apagar el sistema, no se analizan. De las suposiciones anteriores, las características de operación de estado estable pueden derivarse aplicando el concepto de valor esperado. En realidad, las longitudes de la línea y los tiempos de espera se calculan *en promedio.* La derivación llega a los resultados siguientes.[1]

Cola

Longitud promedio de la línea: $L_q = \frac{A^2}{S(S - A)}$ (15-1)

Tiempo de espera promedio: $W_q = \frac{L_q}{A} = \frac{A}{S(S - A)}$ (15-2)

Sistema

Longitud promedio de la línea: $L_s = L_q + \frac{A}{S} = \frac{A}{S - A}$ (15-3)

Tiempo de espera promedio: $W_s = \frac{L_s}{A} = \frac{1}{S - A}$ (15-4)

Utilización de la instalación $U = \frac{A}{S}$ (15-5)

Probabilidad de que la línea exceda a n: $P(L_s > n) = \left(\frac{A}{S}\right)^{n+1}$ (15-6)

[1] Para la derivación de estas ecuaciones véase Frederick S. Hillier y Gerald J. Lieberman, *Introduction to Operations Research,* la edición (San Francisco: Holden-Day, 1967), pp. 299-300.

en donde A - tasa promedio de llegadas (llegadas por unidad de tiempo) y S = tasa promedio de servicio (llegadas por unidad de tiempo).

Observando las ecuaciones puede observarse que no son del todo independientes. Dado L_q, pueden encontrarse W_q, L_s y W_s. La utilización de la instalación de servicio es independiente. Para entender cómo se usan estas fórmulas, considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo: un supermercado

Imagínese un supermercado grande con muchas cajas de salida. Supóngase que los clientes llegan para que les marquen su cuenta con una tasa de 90 por hora y que hay 10 cajas en operación. (Nótese que una familia junta de compras se trata como un cliente.) Si hay poco intercambio entre las líneas, puede tratarse este problema como 10 sistemas separados de una sola línea, cada uno con una llegada de 9 clientes por hora. Para una tasa de servicio de 12 por hora:

Dados: A **= 9 clientes por hora**
S = 12 clientes por hora

Entonces:

$$L_q = \frac{A^2}{S(S-A)} = \frac{(9)^2}{12\,(12-9)} = 2.25 \text{ clientes}$$

$$W_q = \frac{A}{S(S-A)} = \frac{9}{12(12-9)} = 0.25 \text{ horas o } 15 \text{ minutos}$$

$$L_s = \frac{A}{S-A} = \frac{9}{12-9} = 3 \text{ clientes}$$

$$W_s = \frac{1}{S-A} = \frac{1}{12-9} = 0.33 \text{ horas o } 20 \text{ minutos}$$

$$U = \frac{A}{S} = \frac{9}{12} = 0.75 \text{ o } 75\%$$

$$P(L_s > 3) = \left(\frac{A}{S}\right)^{n+1} = \left(\frac{9}{12}\right)^{3+1} = 0.32$$

Entonces, para este ejemplo, el cliente promedio espera 15 minutos antes de ser servido (algunos esperan más, otros menos). En promedio, hay un poco más de dos clientes en la línea o tres en el sistema. El proceso completo lleva un promedio de 20 minutos. La caja está ocupada el 75% del tiempo (así, estará desocupada o inútil el 25% del tiempo). Y finalmente, el 32% del tiempo habrá cuatro personas o más en el sistema (o tres o más esperando en la cola).

Algunas peculiaridades de las colas

Las características de operación de una tienda de abarrotes o supermercado hacen que surjan algunas preguntas. Primero, si hay una línea de espe-

ra de más de dos en promedio, ¿por qué la instalación de servicio se utiliza sólo el 75 % del tiempo y no el 100 % ? la respuesta está en la aleatoriedad del sistema. Se dice que los clientes llegan con una tasa de nueve por hora *en promedio,* pero no están espaciados uniformemente en el tiempo. Habrá períodos de llegadas rápidas así como periodos de muy pocas llegadas. De manera análoga, el tiempo de servicio varía: es corto para las órdenes pequeñas y largo para las grandes. En periodos de holgura, la caja está desocupada, mientras que los periodos activos pueden producir una línea de espera de más de dos clientes (como ya se calculó el 32 % del tiempo, la línea de espera excede a tres). Siempre que la capacidad de servicio exceda la tasa de llegadas, habrá tiempo inútil. Demasiado tiempo inútil es indeseable, y a veces irremediable (por ejemplo, en una estación de bomberos). Cuando sea posible, el tiempo inútil debe usarse productivamente en otras actividades.

¿Qué pasa cuando la tasa de servicio es igual a la tasa de llegadas? Todas las fórmulas tienen S - *A* en el denominador. Si son iguales, la cola *explota,* es decir, crece indefinidamente, por tanto se debe tener *S>A.* La razón, otra vez, es la aleatoriedad. La instalación de servicio no puede "almacenar" servicio durante los periodos de holgura para usarlo después en los periodos activos. Cuando ocurren estos últimos no existe un margen extra de velocidad para compensar las llegadas. Por supuesto, esto podría funcionar temporalmente como una manera de manejar periodos cortos máximos en los patrones de llegadas: se hace en las taquillas de los teatros y cines. Pero no funcionará para periodos largos de actividad.

Una última peculiaridad: si existe un promedio de 2.25 clientes esperando más 1 siendo servido, ¿por qué la longitud promedio del sistema es 3 y no 3.25? El lector puede comprobar que, restando L_q de $L_\$$, se obtiene *A/S,* lo cual siempre es menor que 1. Básicamente esto sucede debido a la aleatoriedad y al hecho de que se están manejando promedios. Si hay clientes esperando, debe haber otro que está en la caja, esto hace que la diferencia entre las longitudes de la cola y el sistema sea 1. Pero como ya se dijo, habrá otros momentos en que el sistema esté vacío y la diferencia sea cero. Al promediar estas diferencias siempre se obtendrá algo menor que 1.

Como era de esperarse, el tiempo promedio de espera en la cola más el tiempo promedio de servicio sí es igual que el tiempo promedio en el sistema (15 + 5 = 20 minutos).

EJERCICIO DE PRÁCTICA 15-1

Encuéntrese las características de operación *(L_a, W_a, L_s, W_s y U)* para los siguientes sistemas:

a A = 5 unidades por hora; S = 10 por hora, Calcúlese $P(L_S>1)$.
b A = 10 unidades por hora; el tiempo de servicio promedio es 3 minutos por cliente. Calcúlese $P(L_s > 1)$.

EVALUACIÓN DEL SISTEMA CUANDO SE CONOCE EL COSTO DE ESPERA

La naturaleza de los costos de servicio influye en el método para encontrar el sistema de menor costo. Si el costo de servicio es una función lineal de la tasa de servicio, puede encontrarse una solución general para la tasa óptima de servicio.2

Para aplicar una solución general, se necesita una tasa de servicio que pueda variar de manera continua, lo cual muy pocas veces se cumple en la práctica. Por ejemplo, en un supermercado no tiene sentido hablar de partes fraccionarías de una caja, las cajas se deben agregar en unidades completas, de una en una. Similarmente, un departamento de reproducción puede tener la opción de escoger entre varias copiadoras con capacidades distintas. Pero no dispone de capacidades intermedias.

Cuando los costos de servicio cambian en forma escalonada, se usa la técnica de prueba y error para encontrar el sistema de menor costo. Se calcula el costo total para una tasa de servicio, después para la siguiente y así sucesivamente. Esto se continúa hasta que se encuentra un límite inferior o un mínimo tal, que el aumentar o el disminuir las tasas de servicio da costos totales más altos. Este procedimiento puede parecer laborioso, pero casi nunca lo es. Con una buena selección de las tasas que se van a examinar, casi siempre puede encontrarse el mínimo en tres o cuatro pruebas.

Para los sistemas con servidores múltiples, en general lo que se desea saber es cuántos servidores se debe tener. Pero para los sistemas de un solo servidor, ¿cómo puede variarse la tasa de servicio? En algunos casos, no puede alterarse significativamente. Esto hace que el problema sea meramente el de encontrar el número de servidores más económico. Sin embargo, en otros casos, las tasas de servicio pueden variarse con equipo o personal adicional. Por ejemplo, con frecuencia en los supermercados se agiliza el servicio poniendo un empacador en cada caja.

Ejemplo: tamaño de una brigada

Se está estudiando un muelle de carga y descarga de camiones para aprender cómo debe formarse una brigada. El muelle tiene espacio sólo para un camión, así es un sistema de un servidor. Pero el tiempo de carga o descarga puede reducirse aumentando el tamaño de la brigada.

Supóngase que puede aplicarse el modelo de un servidor y una cola (llegadas Poisson, tiempos de servicio exponenciales) y que la tasa promedio de servicio es un camión por hora para un cargador. Los cargadores adicionales aumentan la tasa de servicio proporcionalmente. Además, supóngase que los camiones llegan con un tasa de dos por hora en promedio y que el costo de espera es de $20 por hora por camión. Si se le paga $5 por hora a cada miembro de la brigada, ¿cuál es el mejor tamaño de esta?

[2] **Usando cálculo, es fácil demostrar que la tasa de servicio óptima está dada por:**

$$S = A + \frac{AC_w}{C_s}$$

en donde C_w = costo unitario de espera y C_s = costo unitario de servicio.

En resumen se tiene:

A = 2 camiones por hora
S = 1 camión por persona por hora
C_w = costo de espera = \$20 por hora por camión
C_s = costo de servicio = \$5 por hora por persona

Ahora sea k = número de personas en la brigada. Se busca k tal que la suma de los costos de espera y servicio se minimicen:

$$\text{Costo total} = C_W L_s + kC_s$$

Nótese que se usa la longitud de la línea del *sistema,* porque el camión está inútil tanto si espera como si está siendo servido.

Las pruebas se deben iniciar con tres miembros en la brigada, ya que uno o dos no podrían compensar la tasa de llegadas de dos camiones por hora. Para una brigada de tres, la tasa de servicio es de tres camiones por hora y puede encontrarse L, con la ecuación (15-3).

$$L_s = \frac{A}{S - A} = \frac{2}{3 - 2} = 2.0 \text{ camiones}$$

y

$$\begin{aligned}\text{Costo total (3)} &= C_w L_s + kC_s \\ &= (20)\,(2.0) + (3)\,(5) \\ &= \$55\end{aligned}$$

De la misma manera, para una brigada de cuatro:

$$L_s = \frac{A}{S - A} = \frac{2}{4 - 2} = 1.0 \text{ camiones}$$

y

$$\begin{aligned}\text{Costo total (4)} &= C_w L_s + kC_s \\ &= (20)(1.0) + (4)(5) \\ &= \$40\end{aligned}$$

El costo es menor, por tanto, se sigue adelante.

Para una brigada de cinco:

$$L_s = \frac{A}{S - A} = \frac{2}{5\text{-}2} = 0.67 \text{ camiones}$$

$$\begin{aligned}\text{Costo total (5)} &= C_w L_s + kC_s \\ &= (20)(0.67) + (5)(5) \\ &= \$38.33\end{aligned}$$

Éste todavía es menor; tratando una brigada de seis:

$$L_s = \frac{A}{S - A} = \frac{2}{6 - 2} = 0.5 \text{ camiones}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Costo total (6)} &= C_w L_s + kC_s \\ &= (20)(0.5) + (6)(5) \\ &= \$40 \end{aligned}$$

Como este costo es mayor que el de la brigada de cinco, se rebasó el límite inferior de la curva de costo; el tamaño óptimo de la brigada es cinco personas. Los resultados se muestran en la figura 15-4.

EVALUACIÓN DEL SISTEMA CON COSTOS DE ESPERA DESCONOCIDOS

Existen muchas situaciones en que el administrador prefiere no dar un valor en dólares al costo de espera por una sencilla razón: no tienen una forma razonable de estimar el costo. ¿Cuál es el costo de espera en un banco? ¿En una tienda de abarrotes o supermercado? ¿En un restaurante? Por otro lado, ¿es realmente lineal el costo de espera, como se supuso antes? ¿Se incrementa conforme el tiempo de espera aumenta? Éstas son cuestiones difíciles de resolver. Por fortuna existe otro método que no requiere los datos explícitos de este costo.

En lugar de estimar el costo de espera, el administrador puede especificar un *promedio mínimo de tiempo de espera o de longitud de línea.* Esto establece un límite superior para Wq, el tiempo de espera en la cola (o para L_q, la longitud de línea en la cola). Con este límite superior puede encontrarse

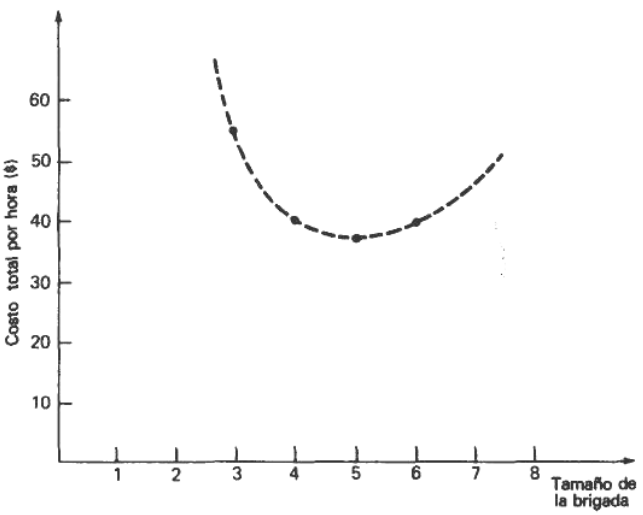


FIGURA 15-4
Gráfica del ejemplo del tamaño de la brigada.

la tasa de servicio necesaria para cualquier tasa de llegadas dada. Aunque este método no proporciona un sistema óptimo, sí da un diseño que está de acuerdo con las especificaciones de la administración. Se ilustrará todo esto con un ejemplo.

Ejemplo: restaurante de comida rápida

Considérese un restaurante de comida rápida con un menú limitado. El restaurante se está diseñando para que todos los clientes se unan a una sola línea para ser servidos. (Igual que en el supermercado, una *orden* es una llegada sin importar cuántas personas comparten esa orden.) Una persona tomará la orden y la servirá. Con sus limitaciones, la tasa de servicio puede aumentarse agregando más personal para preparar la comida y servir las órdenes.

Esto constituye un sistema de un servidor y una línea. Si las llegadas y las salidas son aleatorias, puede aplicarse el modelo de una cola. Supóngase que la administración quiere que el cliente promedio no espere más de dos minutos antes que se tome su orden. Esto se expresa como:

$$W_q = 2 \text{ minutos}$$

Supóngase también que la tasa máxima de llegadas es 30 órdenes por hora.

De la ecuación (15-2) se tiene:

$$W_q = \frac{A}{S(S-A)}$$

Rearreglando términos,

$$S(S-A)\frac{A}{W_q}$$

$$S^2 - AS - \frac{A}{W_q} = 0$$

Ésta es una ecuación cuadrática. La solución es:[3]

$$S = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + \frac{4A}{W_q}}}{2}$$

$$S = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{A}{W_q}}$$

Como la tasa de servicio debe ser mayor que la tasa de llegadas, puede descartarse la solución negativa. Entonces:

$$S = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{A}{W_q}}$$

[3] Recuérdese que para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c son constantes, la solución general es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para este ejemplo, se supuso:

$$A = 30 \text{ órdenes por hora b}$$
$$W_q = 2 \text{ minutos o } 0.033 \text{ horas}$$

entonces:

$$S = \frac{30}{2} + \sqrt{\frac{(30)^2}{4} + \frac{30}{0.033}}$$
$$= 15 + 33.5 = 48.5 \text{ órdenes por hora}$$

Para cumplir los requerimientos, se necesita una tasa de servicio de casi 50 órdenes por hora. Si, por ejemplo, una brigada de cinco puede manejar 45 órdenes por hora y una de seis puede procesar 50 por hora, entonces sería necesario tener la brigada de seis.

MODELO DE UN SERVIDOR CON TIEMPOS DE SERVICIO CONSTANTES

Este modelo es el mismo que el primero, excepto que se supone que el tiempo de servicio es exactamente el mismo para cada llegada en lugar de ser aleatorio. Todavía se tiene una sola línea, tamaño de la cola infinito, disciplina de la cola como primero en llegar primero en ser servido y llegadas Poisson.

Las aplicaciones típicas de este modelo pueden incluir un autolavado automático, una estación de trabajo en una pequeña fábrica o una estación de diagnóstico de mantenimiento preventivo. En general, el servicio lo proporciona una máquina.

Las características de operación están dadas por 4:

$$L_q = \frac{A^2}{2S(S - A)} \tag{15-7}$$

$$W_q = \frac{A}{2S(S - A)} = \frac{L_q}{A} \tag{15-8}$$

$$L_s = \frac{A(2S - A)}{2S(S - A)} = L_q + \frac{A}{S} \tag{15-9}$$

$$W_s = \frac{2S - A}{2S(S - A)} = \frac{L_s}{A} \tag{15-10}$$

$$U = \frac{A}{S} \tag{15-11}$$

en donde A = tasa promedio de llegadas (llegadas por unidad de tiempo) y S = tasa constante de servicio (llegadas por unidad de tiempo).

Ejemplo: lavado automático de autos

Imagínese un lavado automático de autos con una línea de remolque, de manera que los autos se mueven a través de la instalación de lavado como en una línea de ensamble. Una instalación de este tipo tiene dos tiempos de servicio diferentes: el tiempo entre autos y el tiempo para completar un auto. Desde el

[4] **Hillier y Lieberman, op. cit., pp. 301-302.**

punto de vista de teoría de colas, el tiempo entre autos establece el tiempo de servicio del sistema. Un auto cada cinco minutos da una tasa de 12 autos por hora. Sin embargo, el tiempo para procesar un auto es el tiempo que se debe esperar para entregar un auto limpio. La teoría de colas no considera este tiempo.

Supóngase que el lavado de autos puede aceptar un auto cada cinco minutos y que la tasa promedio de llegadas es de nueve autos por hora (con distribución Poisson). Sustituyendo en las ecuaciones:

Para:

$$A = 9 \text{ autos por hora}$$
$$1/S = 5 \text{ minutos o } S = 12 \text{ autos por hora}$$

$$L_q = \frac{A^2}{2S(S - A)} = \frac{(9)^2}{2(12)(12\text{-}9)} = 1.125 \text{ autos}$$

$$W_q = \frac{A}{2S(S - A)} = \frac{9}{2(12)(12\text{-}9)} = 0.125 \text{ horas o } 7.5 \text{ minutos}$$

$$L_s = \frac{A(2S - A)}{2S(S - A)} = \frac{9[2(12) - 9]}{2(12)(12 - 9)} = 1.875 \text{ autos}$$

$$W_s = \frac{2S - A}{2S(S - A)} = \frac{2(12) - 9}{2(12)(12 - 9)} = 0.21 \text{ horas o } 12.5 \text{ minutos}$$

$$U = \frac{A}{S} = \frac{9}{12} = 0.75 \text{ o } 75\%$$

EJERCICIO DE PRÁCTICA 15-2

Encuéntrense las características de operación para el modelo de tiempos de servicio constantes cuando:

a $A = 5$ unidades por hora; $S = 10$ unidades por hora
b $A = 9$ unidades por hora; $S = 10$ unidades por hora

COMPARACIÓN DE TIEMPOS DE SERVICIO EXPONENCIALES Y CONSTANTES

Las tasas de llegadas y de servicio que se usaron para el ejemplo del lavado de autos son las mismas que se usaron antes en el ejemplo del supermercado. Esto permitirá una comparación directa de los dos modelos de un servidor. Los resultados se resumen en la tabla 15-2. Nótese que el sistema de tiempos de servicio constantes tiene sólo la mitad de la longitud de cola y del tiempo de espera de lo que tiene el sistema de tiempos de servicio variables. La longitud de la línea y el tiempo de espera para todo el sistema también son menores; sólo la utilización es la misma para ambos.

¿Por qué un sistema con tiempos de servicio constantes da mucho mejores resultados que el de tiempos de servicio variables? Porque se ha eliminado parte de la aleatoriedad del sistema y con ella la posibilidad de tiempos de servicio muy largos.

TABLA 15-2
Resultados para A = 9, S = 12

	Tiempos de servicio exponenciales	*Tiempos de servicio constantes*
Cola		
Longitud promedio de la línea	2.25	1.125
Tiempo promedio de espera	15 min	7.5 min
Sistema		
Longitud promedio de la línea	3	1.875
Tiempo promedio de espera	20 min	12.5 min
Utilización	75%	75%

Con frecuencia los negocios eliminan los tiempos de servicio muy largos con un procesamiento previo. Por ejemplo, las tiendas de descuento requieren aprobación previa de los cheques, lo que reduce el tiempo en la caja. El tener líneas separadas es otra estrategia que se usa con frecuencia. Por ejemplo, en los bancos las cuentas de valores pueden manejarse aparte y no en las ventanillas. Además, las ventanillas no procesan las solicitudes de crédito o la apertura de nuevas cuentas. Cada uno de estos métodos hace más rápido el servicio eliminando los tiempos largos.

MODELO CON SERVIDORES MÚLTIPLES

En muchas situaciones reales habrá más de un servidor disponible para atender las llegadas. Esto es típico de los supermercados y los bancos. En estos ejemplos, existen líneas separadas para cada servidor formando un sistema de líneas múltiples y servidores múltiples, como el que se muestra en la figura 15-3c. Si hay poco intercambio, como en el supermercado, el sistema puede analizarse como un grupo de sistemas de un servidor y una cola. Sin embargo, si hay intercambios entre líneas significativos (como dentro de un banco), la descomposición no funcionará. Para esta situación no se tiene una solución general. Pero es posible determinar las características de operación para cualquier sistema particular, en forma experimental usando simulación.

Existe una solución general para un sistema de múltiples servidores que tiene una sola línea. Esta situación se muestra en la figura 15-3*b*, y, aunque es poco usual, puede ocurrir, por ejemplo en una pastelería en que los clientes toman un número al entrar, en un departamento de reproducción que cuenta con varias copiadoras o en una peluquería. Este será el tercer modelo que se presente.

De nuevo supóngase que las llegadas son Poisson, los tiempos de servicio son exponenciales, hay una sola línea, varios servidores y una cola infinita que opera con la disciplina de primero en llegar primero en ser servido. Las ecuaciones para las características de operación se vuelven un poco más complicadas. Sea[5]

[5] **Hillier y Ljeberman, op. cit., pp. 307-309**

N = número de servidores
A = tasa promedio de llegadas (llegadas por unidad de tiempo)
S = tasa promedio de servicio por cada servidor (llegadas por unidad de tiempo)

entonces

$$L_q = \frac{(A/S)^{N+1} P_o}{(N-1)! \left(N - \frac{A}{S}\right)^2} \tag{15-12}$$

$$W_q = \frac{L_q}{A} \tag{15-13}$$

$$L_s = L_q + \frac{A}{S} \tag{15-14}$$

$$W_s = \frac{L_s}{A} \tag{15-15}$$

$$U = \frac{A}{NS} \tag{15-16}$$

$$P_o = \frac{1}{\frac{1}{N!}\left(\frac{A}{S}\right)^N \left(\frac{NS}{NS - A}\right) + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{A}{S}\right)^i} \tag{15-17}$$

La cantidad P_o es la probabilidad de que no haya llegadas en una unidad de tiempo, lo cual no lo hace más fácil de calcular. En realidad para dos o tres servidores pueden combinarse y simplificar las dos ecuaciones para obtener, para $N - 2$,

$$L_q = \frac{(A/S)^3}{4 - (A/S)^2} \tag{15-18}$$

Para $N = 3$,

$$L_q = \frac{(A/S)^4}{\left(3 - \frac{A}{S}\right)\left[6 + \frac{4A}{S} + \left(\frac{A}{S}\right)^2\right]} \tag{15-19}$$

Nótese que para $N = 1$ este modelo se reduce al modelo de un servidor.

Un ejemplo con costos de espera desconocidos

Considérese la biblioteca de una universidad cuyo personal está tratando de decidir cuántas copiadoras debe instalar para uso de los estudiantes. Se ha escogido un equipo particular que puede hacer hasta 10 copias por minuto. No se sabe cuál es el costo de espera para un estudiante, pero se piensa que no deben tener que esperar más de dos minutos en promedio. Si el número promedio de copias que se hacen por usuario es cinco, ¿cuántas copiadoras se deben instalar?

Se usa prueba y error para resolver este tipo de problemas, no se encuentra una solución general como se hizo para el modelo de un servidor. La ecuación (15-12) no lleva en sí a una solución general. Se tratará primero con dos co-

piadoras, después con tres, y así hasta que se satisfaga el criterio del tiempo de espera.

¿Cuál es la tasa de servido? Si el número promedio de copias es cinco y la copiadora puede hacer hasta 10 copias por minuto, entonces pueden servirse en promedio hasta dos estudiantes por minuto. Pero en esto no se toma en cuenta el tiempo para insertar la moneda, cambiar originales, para que un estudiante desocupe y otro comience a copiar. Supóngase que se permite un 70% del tiempo para estas actividades. Entonces la tasa de servicio neta baja a 0.6 estudiantes por minuto. Además se supone que los periodos pico de copiado tienen una tasa de llegadas de 60 estudiantes por hora, o 1 por minuto.

Se comenzará con dos copiadoras, ya que una no sería suficiente (la tasa de servicio debe ser mayor que la tasa de llegadas). De la ecuación (15-18),

$$A = 1 \text{ por minuto}$$
$$S = 0.6 \text{ por minuto}$$
$$N = 2$$
$$L_q = \frac{(A/S)^3}{4 - (A/S)^2} = \frac{(1/0.6)^3}{4 - (1/0.6)^2} = 3.8 \text{ estudiantes}$$

Insertando esto en la ecuación (15-13):

$$W_q = \frac{L_q}{A} = \frac{3.8}{1} = 3.8 \text{ minutos por llegada}$$

Esto excede el criterio del máximo de 2 minutos de espera para el estudiante promedio. Se tratarán tres copiadoras. Con las ecuaciones (15-19) y (15-13):

$$L_q = \frac{(A/S)^4}{\left(3 - \frac{A}{S}\right)\left[6 + \frac{4A}{S} + \left(\frac{A}{S}\right)^2\right]} = \frac{(1/0.6)^4}{\left(3 - \frac{1}{0.6}\right)\left[6 + \frac{4(1)}{0.6} + \left(\frac{1}{0.6}\right)^2\right]} = 0.31$$

y

$$W_q = \frac{L_q}{A} = \frac{0.37}{1} = 0.37 \text{ minutos por llegada}$$

Se necesitan tres copiadoras. La utilización de cada una será:

$$U = \frac{A}{NS} = \frac{1}{3(0.6)} = 0.56 \text{ o } 56\%$$

EJERCICIO DE PRÁCTICA 15-3

Aplíquese el modelo de servidores múltiples para encontrar h_q, W_q, L_s, W_s y U para:

a Dos servidores, cada uno con S = 4 unidades por hora y una tasa de llegadas de seis unidades por hora.

b Tres servidores, en donde cada servidor promedia 6 minutos por llegada y las llegadas entran en un promedio de uno cada 3 minutos.

c ¿Se cumple todavía que el tiempo promedio de espera en el sistema es igual que el tiempo promedio en la cola más el tiempo promedio de servicio?

COMPARACIÓN DE UN SERVIDOR RÁPIDO CON DOS SERVIDORES LENTOS

Considérese un pequeño expendio de helados en que sirven en el automóvil con una ventanilla y dos meseras. Éstas pueden trabajar juntas en cada orden o pueden procesar las órdenes por separado. Cuando trabajan juntas forman un sistema de un servidor y una cola y pueden atender a 60 clientes en una hora. Cuando trabajan separadas forman un sistema de dos servidores y una cola en que cada servidor puede atender a 30 clientes por hora. Supóngase que las llegadas son Poisson y los tiempos de servicio son exponenciales.

Aplicando las ecuaciones que se dieron antes, se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 15-3. Se supuso una tasa promedio de llegadas de 40 por hora.

Como era de esperarse, los dos servidores tienen cantidades menores para la cola.

Reducen la línea, pero de ninguna manera a la mitad. Además, el tiempo total en el sistema en realidad aumenta. Los dos servidores lentos de hecho se llevan más tiempo que un servidor rápido; las meseras deben trabajar juntas en cada orden.

Este resultado puede generalizarse para llegar a algunas conclusiones curiosas: el Pentágono debe tener sólo un baño muy grande; los edificios altos deben tener sólo un elevador muy rápido; las tiendas de departamentos deben tener sólo una puerta muy grande. Para llegar a estas conclusiones, se ha ignorado el tiempo para llegar a ese baño, el hecho de que un elevador no puede ser dos veces más rápido que otro debido a los tiempos de constante carga y descarga y los

TABLA 15-3
Comparación de dos servidores lentos con uno **rápido**

	Dos servidores lentos	*Un servidor rápido*
Cola		
Longitud promedio de la línea	**1.07**	**1.33**
Tiempo promedio de espera	**1.6 min**	**2 min**
Sistema		
Longitud promedio de la línea	**2.4**	**2**
Tiempo promedio de espera	**3.6**	**3**
Utilización	**67%**	**67%**

patrones de circulación para las tiendas de departamentos. Aun así, las conclusiones dramatizan un importante resultado de la teoría de colas.

DISTRIBUCIONES POISSON Y EXPONENCIAL

Los modelos en este capítulo suponen que las llegadas son completamente aleatorias. Para explorar esto un poco más, imagínese un pequeño intervalo de tiempo, Δt. Si las llegadas son completamente aleatorias, entonces la probabilidad de una llegada en cualquier intervalo pequeño (Δt_1) es la misma que para cualquier otro intervalo (Δt_2). Esta suposición es válida en una cantidad sorprendente de situaciones reales. Aun en donde las llegadas en grupos son frecuentes, cómo los clientes de una pastelería, esta suposición sigue siendo viable.

Es necesario conocer más sobre el patrón de llegada que sólo su aleatoriedad, para poder obtener las características de operación de un sistema. Específicamente, ¿cuál es el número promedio de llegadas en alguna unidad de tiempo, como 1 hora? También, ¿cuál es la probabilidad de cero llegadas, de 5 o de 10 en 1 hora? En otras palabras, se necesita conocer la distribución de probabilidad de las llegadas por unidad de tiempo.

Aun cuando la derivación no se da aquí, puede demostrarse[6] que la distribución de probabilidad de las llegadas es Poisson cuando:

$$P(\text{una llegada en } \Delta t_1) = \frac{A}{n} \text{ para todo } i \text{ y n grande}$$

en donde A = número promedio de llegadas por unidad de tiempo y n = número de intervalos (Δt) por unidad de tiempo. Así, la suposición de llegadas completamente aleatorias conduce a la suposición equivalente de distribución Poisson para la tasa de llegadas.

La distribución Poisson es discreta, como se ilustra en la figura *15-5a*. Para tasa promedio de llegadas pequeñas es asimétrica. Para tasas altas de llegadas se vuelve más simétrica y, de hecho, se aproxima a una distribución binomial.[7]

La distribución exponencial

Una suposición más que se usa en este capítulo es que las salidas también son completamente aleatorias. Las salidas están relacionadas con los tiempos de servicio, porque ocurren cuando termina el servicio. Entonces,

[6] Para una buena descripción de la derivación, véase Richard E. Treuman, *An Introduction to Quantitative Methods for Decision Making* (New York: Holt, 1974), pp. 470-473.

[7] La ecuación para la distribución Poisson es:

$$P(k) = \frac{A^k e^{-A}}{k!}$$

en donde $P(k)$ = probabilidad de exactamente k llegadas por unidad de tiempo
k = número de llegadas por unidad de tiempo
A = número promedio de llegadas por unidad de tiempo
e = 2.71828 (base de logaritmos naturales)

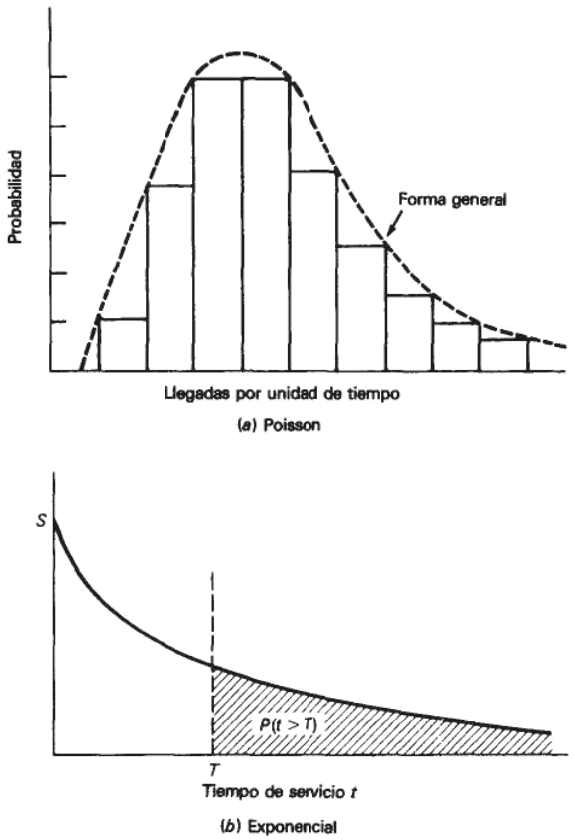


FIGURA 15-5
Distribuciones Poisson y exponencial.

representan los tiempos de terminación del servicio. Estudiante éstos, pueden deducirse los tiempos de servicio, suponiendo que el servidor está siempre ocupado. De una manera exactamente igual que para las llegadas, puede decirse:

$$P(\text{terminar un servicio en } \Delta t_i) = \frac{S}{n} \text{ para todo i y n grande}$$

en donde S = número promedio de servicios por unidad de tiempo y n = número de intervalos (A_T) por unidad de tiempo.

¿Significa esto que el número de clientes servidos por unidad de tiempo tiene una distribución Poisson? Sí. Sin embargo, casi siempre es más conveniente hablar del servicio en términos de los tiempos de servicio, de cuanto lleva servir a un cliente. Para esto se necesita la distribución del tiempo de servicio. Nótese que el tiempo de servicio promedio está dado por:

$$\text{Tiempo promedio de servicio} = \frac{1}{S} = \frac{1}{\text{tasa promedio de servicio}}$$

De nuevo, sin derivación, puede demostrarse[8] que la suposición conduce a una distribución *exponencial negativa* para los tiempos de servicio. Ésta es una distribución continua y se ilustra en la figura 15-56.[9]

Las distribuciones Poisson y exponencial están relacionadas en forma interesante. Cuando se habla sobre *tasas* de llegadas o *tasas* de servicio, puede aplicarse la distribución Poisson. Por otro lado, cuando se está considerando el *tiempo entre* llegadas o el *tiempo* de servicio se aplica la distribución exponencial. Si bien son equivalentes, es importante distinguirlas claramente y no confundirlas.

SOLUCIÓN POR SIMULACIÓN

Las características de operación para los tres modelos que se presentaron en este capítulo se pudieron encontrar matemáticamente. Para muchos otros sistemas esto no es posible. Es decir, no habrá una forma matemática par encontrar las características de operación de estado estable. En tales casos, una alternativa es usar simulación. Se construye el sistema en forma de modelo y se opera durante un periodo razonable. Al correr el modelo, se registran las características de operación (longitud de la línea y tiempo de espera) para cada llegada. Estos datos se usan después para calcular promedios.

Tratando diferentes sistemas y comparando los resultados, puede obtenerse información sobre cuál de ellos debe trabajar mejor. Con las computadoras modernas este procedimiento no es tan laborioso. En el siguiente capítulo se muestra un ejemplo.

EXPERIENCIAS DEL MUNDO REAL

Se cuenta una historia clásica sobre un moderno edificio de oficinas que se enfrentaba a un problema de colas. Todo el personal de oficina comenzó a quejarse del servicio de elevador. En las horas de descanso y el almuerzo bajaban al primer piso en donde se encuentran todas las tiendas. Se quejaban de que perdían mucho tiempo esperando un elevador. En respuesta, la administración reunió un equipo de expertos para analizar la situación. El equipo incluía expertos en sistemas de colas, un psicólogo, matemáticos e ingenieros de los fabricantes del elevador.

Se consideraron varias soluciones. Podrían instalarse elevadores adicionales, pero esto sería muy costoso. La velocidad del elevador podría aumentarse un poco, pero no tanto que provocara accidentes. Algunos elevadores podrían designarse "expresos" para servir sólo a unos pisos, pero el personal de oficina venía de todos los pisos. Fue el psicólogo quien sugirió la respuesta definitiva: instálense espejos a los lados de cada elevador.

[8] Trueman, op. cit., pp. 472-473.

[9] La ecuación para la distribución exponencial negativa es:

$$P\ (t > T) = e^{-ST} \text{ para } t \geq 0$$

en donde $P(t > T)$ = probabilidad de que un servicio sea mayor que T unidades de tiempo
S = número promedio de servicios por unidad de tiempo
t = tiempo de servicio

Cuando esto se hizo cesaron las quejas. La anécdota sugiere la importancia de la Psicología en el diseño de sistemas de colas. El objetivo es balancear el costo de espera y el costo de servicio para alcanzar un costo total mínimo. Pero el costo de espera está afectado por las actividades de las personas durante esa espera al igual que por la duración. El costo disminuirá en el grado en que la espera pueda "parecer" más corta.

Se introdujeron sólo tres modelos básicos en este capítulo. Existen otros modelos disponibles para diferentes patrones de llegadas y de tasas de servicio, para disciplinas de colas distintas, para colas finitas y fuentes de llegadas limitadas. Sin embargo, aun con todos los modelos incluidos, la teoría de colas analítica no se aplica con tanta frecuencia por varias razones. Las suposiciones del modelo pueden cumplirse razonablemente. Los modelos tienden a ignorar la psicología. Más importante aún, los modelos sólo se aplican una vez, en la etapa de planeación del diseño del sistema. Una vez diseñado el problema, suponiendo que el sistema opera en forma apropiada, ya no hay razón para la teoría de colas. Por último, muchos problemas de colas pueden resolverse de manera aceptable con la intuición basada en la experiencia.

Aun así, las colas son un fenómeno común en todas las fases de los negocios. El administrador que ejerce se beneficia con el conocimiento general del comportamiento de los sistemas de colas y de los resultados analíticos para los modelos específicos. En el siguiente capítulo, "Simulación" se desglosarán significativamente las bases para analizar los sistemas de colas.

RESUMEN

En un sistema de líneas de espera, las llegadas se unen a una cola en donde esperan servicio, avanzan hacia las instalaciones de servicio en donde se les atiende y salen cuando terminan. La administración apropiada de este tipo de sistemas requiere un diseño que balancee el costo de espera y el costo de servicio. Los sistemas de colas se diseñan en dos pasos. Primero, por medio de teoría de colas (o simulación) se encuentran las características de operación. Después, utilizando los costos o los tiempos promedio máximos de espera, se evalúa el sistema. Por prueba y error se encuentra el mejor sistema.

Se analizan tres sistemas específicos para los que las características de operación de estado estable pueden encontrarse matemáticamente: el modelo de un servidor con tiempos de servicio exponenciales, el modelo de un servidor con tiempos de servicio constantes y el modelo de varios servidores con tiempos de servicio exponenciales. Todos suponen llegadas Poisson. Aunque existen otros modelos, podría ser necesario usar simulación cuando no pueda encontrarse un modelo apropiado.

EJERCICIOS

15-1 Estímese el costo unitario del tiempo de espera de los clientes en cada una de las siguientes situaciones; justifíquese la estimación.

a Un puesto de helados con servicio en su coche localizado en un pequeño pueblo; es el único que hay.
b El único restaurante gastronómico en el pueblo.
c Una gasolinera con competencia en las otras tres esquinas.
d La sala de emergencia de un hospital.

15-2 Dibújese un diagrama que muestre la estructura de los sistemas de colas siguientes:
a Una cafetería que tiene una sola línea y cinco estaciones de servicio.
b Una cafetería como en (*a*) pero que usa un sistema combinado de manera que los clientes pueden ir a las estaciones de servicio en el orden que quieran. Hay sólo una caja.
c Pedidos de libros de una biblioteca que están prestados.
d Tres estaciones de bomberos, cada una con su propio número telefónico.
e Los casos criminales en una corte que atienden cinco jueces.

Un servidor, tiempos de servicio exponenciales

15-3 *a* Para el modelo de un servidor y tiempos de servicio exponenciales, úsese una tasa de servicio de 40 por hora para calcular L_q, W_q, L_s, W_s y U para tasas de llegadas de 10, 20, 30 y 39 por hora.
b En la misma gráfica, dibújense W_s y U. ¿A qué conclusiones se puede llegar sobre el uso adecuado de los servicios?

15-4 La mayoría de los administradores de supermercados responden al crecimiento excesivo de las colas en las cajas agregando un empacador en la caja. ¿Es esto realmente económico? Supóngase que el agregar un empacador eleva la tasa de servicio de 20 a 30 clientes por hora y que la tasa de llegadas es de 15 clientes por hora. Si el empacador gana $3 la hora y el tiempo de espera del cliente se evalúa en $5 por hora, ¿cuál es la conclusión? (supónganse llegadas Poisson y tiempos de servicio exponenciales).

15-5 La Ace Machining tiene un departamento de herramientas a donde acuden los operarios en busca de alguna herramienta especial. Los operarios solicitan el servicio a una tasa promedio de 20 veces por hora. Se requiere un promedio de 4 minutos para procesar la solicitud de un operario. La paga de los operarios es de $8 por hora y la de los empleados del departamento de herramientas, de $3 por hora. Si aumentando el número de empleados se lograra reducir en forma proporcional el tiempo de servicio, ¿cuántos empleados deberían contratarse para el departamento de herramientas? (supónganse llegadas Poisson y tiempo de servicio exponenciales).

15-6 La Joe's Plumbing trabaja las 24 horas del día, 7 días a la semana en reparaciones de plomería. Las llamadas de los clientes llegan de manera totalmente aleatoria a lo largo de todo el día con una tasa de 10 por día. Joe piensa que un plomero por turno puede atender un promedio de 12 llamadas diarias; por supuesto los tiempos de servicio varían. Joe se pregunta si debe agregar un ayudante, lo

cual elevaría su capacidad a un promedio de 15 llamadas diarias. Su plomero gana $10 por hora y tendría que pagar la mitad de esta cantidad al ayudante. Si Joe estima que el tiempo que esperan los clientes hasta que el plomero llega tiene un costo de $10 por hora, ¿debe agregar el ayudante?

15-7 El supermercado Foodstuff está tratando de evaluar un nuevo sistema de "bandas" para las cajas que aumentaría su tasa de servicio de 12 a 15 clientes por hora. La administración sabe que los clientes llegan con una tasa promedio de 10 clientes por hora. La Foodstuff valúa el tiempo de espera de los clientes en $4 la hora. Si la nueva banda agrega $5 por hora a los costos de operación, ¿deberá comprarse?

15-8 La tienda de abarrotes ABC está tratando de determinar la tasa de servicio que se necesita en las horas pico. ¿Qué tasa de servicio es necesaria si se supone una línea, un servidor, llegadas Poisson, tiempos de servicio exponenciales y una tasa promedio de llegadas de 80 clientes por hora y:

a la espera promedio (incluyendo servicio) no debe exceder 2.4 minutos?

b la espera promedio (en la cola) no debe exceder 2.4 minutos?

15-9 El restaurante Greasy Burger está estudiando la instalación de una ventana de servicio a los autos para aumentar sus ventas. Como parte de la planeación, la administración quiere saber qué tasa de servicio se necesitaría durante las horas pico. Se espera que los clientes lleguen cada 15 segundos en promedio y se desea que el tiempo de espera promedio en el sistema no sea mayor que 1.5 minutos. Si las tasas de llegadas y de servicio se distribuyen siguiendo una Poisson, ¿qué tasa de servicio se necesita?

25-20 El restaurante de hamburguesas Cassed Burgers está reevaluando la operación de su ventanilla de servicio a los autos. La administración piensa que se están perdiendo ventas porque los clientes tienen que esperar mucho. En la actualidad, todos los clientes entran a un carril y piden por una bocina lo que van a comer. Toma 30 segundos en promedio colocar la orden. Los clientes se trasladan en el auto a la ventanilla de servicio. Una vez que están frente a la ventana, un dependiente recibe el pago y da el cambio (en un promedio de 10 segundos). Cuando la orden está lista, se le da al cliente, quien deja el carril (un promedio de 10 segundos para esto). Se lleva un promedio de 1 minuto servir la orden de un cliente. Por ahora hay espacio para cuatro autos entre el auto que está haciendo su pedido y el auto que está en la ventana de servicio.

a ¿Cuál es la tasa de servicio promedio para el sistema actual?

b. Sugiéranse por lo menos tres formas para incrementar la tasa de servicio de este sistema.

c. ¿Cuál sería una buena estimación para la tasa de servicio factible máxima?

15-11 a Para el modelo de un servidor con tasa de servicio exponencial, muéstrese que la longitud de la línea en el sistema varía sólo con la utilización, mientras que el tiempo de espera en el sistema depende tanto de la utilización como de la tasa de servicio.

b Relaciónense los resultados de (*a*) con el hecho de que aun cuando las longitudes de línea sean de sólo unos cuantos, esto desanima a los clientes de las gasolineras (en tiempos en que no hay escasez), mientras que los clientes de los cines toleran líneas muy largas.

Servidor, tiempos de servicio constantes

15-12 Un modelo de un servidor con llegadas Poisson y tiempos de servicio constantes tiene una tasa de llegadas de 30 por hora y una tasa de servicio de 40 por hora. Encuéntrense la longitud de línea y el tiempo de espera promedio tanto en la cola como en el sistema. ¿Cuál es la utilización del sistema?

15-13 Repítase el ejercicio 15-11 para un sistema de un servidor con tiempos de servicio *constantes*.

15-14 Si una escalera eléctrica en una tienda de departamentos puede aceptar a 30 personas por minuto, ¿cuál es la tasa de llegadas máxima que se permite para mantener el tiempo promedio de espera abajo de 10 segundos? ¿Cuál sería la longitud de línea promedio para este caso?

15-15 La estación de servicio para autos Smokey Joe's ha estado haciendo buen negocio lavando a mano autos. Pero con la expansión del negocio, Joe está considerando invertir en un lavado automático. Estima que la demanda puede llegar a 100 000 autos por año y que en horas pico puede alcanzar 50 autos por hora. Una desventaja es que tiene poco espacio para que esperen los autos. Si quiere que la longitud de línea promedio en la cola no exceda tres autos, ¿qué capacidad de servicio necesita tener la lavadora automática?

15-16 La Omega Corp. tiene actualmente una pequeña copiadora de oficina que opera una secretaria cuando se necesita. Las copias pueden sacarse con una tasa de cinco por minuto. Por $200 anuales adicionales, la firma puede obtener un modelo diferente que trabaja con el doble de velocidad. La secretaria gana $4 por hora y se hacen más o menos 80 copias por día de 8 horas de trabajo. Suponiendo que las "llegadas" tienen distribución Poisson, ¿debe la firma adquirir la nueva copiadora?

15-17 El Dandy Bank está considerando instalar una caja automática en el área del centro de la ciudad. Están en estudio dos equipos. El equipo A tarda 15 segundos en procesar una transacción, mientras que el equipo B tarda 20 segundos. El banco espera que las horas pico tengan una tasa de llegadas de dos clientes por minuto. Estos picos duran 2 horas y ocurrirán 200 días al año. El tiempo de espera del cliente se valúa en $5 por hora. Si el equipo A cuesta $5 000 más que el B, ¿cuál se debe comprar?

Múltiples servidores

15-18 El Servicio Nacional de Impuestos (SNI) está planeando abrir una oficina sucursal para ayudar a los causantes a llenar sus declaraciones. Se quiere determinar cuánto personal consultor debe haber en la oficina. De la experiencia anterior, el SNI sabe que el tiempo de servicio varía exponencialmente con un promedio de 15 minutos. Se espera que la sucursal reciba un promedio de 10 causantes por hora, aunque esto varía en forma Poisson. La oficina tendrá una pequeña sala de espera, en donde las personas pueden esperar a que se desocupe el siguiente consultor. El SNI desea que no haya más de tres personas en promedio esperando. ¿Cuántos consultores de impuestos se necesitan?

15-19 Con la proximidad de la Navidad, la tienda de departamentos Great Buy está tratando de determinar cuántas operadoras de teléfonos extra debe contratar. Una operadora puede atender, en promedio, cinco llamadas por minuto (con distribución Poisson). Se espera que se recibirán llamadas en forma aleatoria con una tasa promedio de 8 por minuto. Se quiere que se contesten en 15 segundos en promedio. ¿Cuántas operadoras adicionales deben contratarse?

15-20 El Banco ABC está estudiando dos configuraciones para sus ventanillas de autobanco. El plan 1 tendría dos ventanillas separadas cada una con su línea. El plan 2 tendría un carril que lleva a la entrada de ambas ventanillas; el cliente iría en este caso a la primera que se desocupara. Se espera una llegada promedio de 50 clientes por hora, con distribución Poisson. El tiempo de servicio varía exponencialmente con un promedio de dos minutos por cliente.

a ¿Qué plan debe adoptar el banco? ¿Por qué?

b ¿Qué otros factores pueden influir en la decisión?

ESTUDIO DE UN CASO: VENTANILLAS DE AUTOBANCO

El Third National Bank ha llegado al punto en que necesitan instalaciones de autobanco totalmente nuevas. Se está planeando usar un lote adyacente al banco que se acaba de adquirir para construir las nuevas instalaciones y carriles de circulación. Tiene espacio suficiente casi para cualquier diseño que se necesite para el tráfico esperado.

La experiencia pasada ha demostrado que los viernes en la tarde son horas pico. El banco planea diseñar las nuevas instalaciones de manera que puedan manejar una tasa de llegadas de un auto por minuto. Para propósitos de planeación, el tiempo de espera de los clientes se valúa en $5 por hora.

Los diseños posibles se han reducido a dos. El primero tendría tres ventanillas separadas, una dentro del banco y dos fuera, cada una con su propia línea. El segundo diseño tendría tres ventanillas dentro del banco y cinco carriles de circulación separados. Una ventanilla serviría al carril que queda junto al banco. Cada una de las otras ventanillas serviría dos carriles con la ayuda de terminales neumáticas remotas.

El vicepresidente Allen piensa que el diseño de los cinco carriles es el mejor. "Este diseño tiene varias ventajas. Una es seguridad, todas las cajas quedan dentro del banco. Otra ventaja es velocidad. Con tres ventanillas pueden manejarse cinco carriles, con lo cual aumentaría la productividad en un 167 %. Los costos de operación son los mismos que para el otro diseño y el costo de la construcción adicional es sólo $10 000. Se ahorrará esa cantidad en tiempo de espera de los clientes en el lapso de un año."

El vicepresidente Glenn no está de acuerdo. "Ha sobreestimado usted el aumento en la productividad del sistema de cinco carriles. En realidad la ventanilla del carril interno es idéntico para ambos diseños. Sabemos que para nuestros propósitos una ventanilla de autobanco con un solo carril atiende a un promedio de 30 autos por hora. Si hay una caja para dos carriles, esto no mejorará, puesto que las cajeras no harán su trabajo más rápido. Trabajarán al mismo paso sin importar cuantos carriles haya. Así, gastaríamos $10 000 para nada."

El vicepresidente Allen rebate: "Esta usted pasando por alto dos factores. Primero, con los dos carriles no hay tiempo muerto debido a la espera para que arranque un auto y entre el otro. Aun cuando las cajeras trabajen con la misma velocidad, obtenemos una ganancia de esto. Además, existe un aspecto psicológico. Los clientes son más pacientes mientras se les atiende que mientras están esperando. Deberíamos valorar el tiempo de espera en forma diferente según que estén en la cola o durante el servicio, digamos $5 y $3 respectivamente. Aunque afirmara que no aumenta la productividad, todavía ahorraríamos en costo de espera. Agregue a esto los beneficios de seguridad y la flexibilidad fuera de las horas pico y la selección está muy clara."

Preguntas

1 ¿Cuál es el costo de espera anual para el primer diseño, el de tres ventanillas separadas? Supóngase que las horas pico continúan por tres horas los viernes durante todo el año.

2 ¿Hay un ahorro con el costo de espera con el segundo diseño? Si así es, ¿a cuánto asciende?

3 ¿Cómo deben incluirse los factores de seguridad y flexibilidad en el análisis^ ¿Qué diseño recomendaría el lector y por qué?

BIBLIOGRAFÍA

Bhat, U. N.: "Sixty Years of Queuing Theory". *Management Science,* vol. 15 (1969), pp. B280-294.

Erikson, Warren J.: "Management Science and the Gas Shortage". *Interfaces,* vol. 4, núm. 4 (agosto 1974), pp. 47-51.

Hillier, Frederick S. and Gerald J. Lieberman. *Introduction to Operations Research.* la. edición (San Francisco: Holden-Day, 1967).

Kleinsock, Leonard: *Queuing Systems* (2 vols.) (New York: John Wiley, 1975).

Saaty, T. L.: *Elements of Queuing Theory with Applications* (New York: McGraw-Hill, 1961).

Stevenson, Keith A.: "Emergency Ambulance Transportation", en A. W. Drake, R. L. Keeney y P. M. Morse (editores) *Analysis of Public Systems* (Cambridge, Mass.: M.I.T., 1972).
Trueman, Richard E.: *An Introduction to Quantitative Methods for Decision Marking,* 2a ed. (Nueva York: Holt, 1977).

PARTE CINCO

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON EL MODELADO DEL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA

16

SIMULACIÓN

Todo arte es sólo la imitación de la naturaleza.

Séneca

La imaginación abandonada de la razón crea monstruosidades. Unida con la razón, la imaginación da lugar a grandes maravillas y a verdadero arte.

Goya

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje

Ejemplo de simulación: Análisis de ganancias
- Objetivo
- Formulación del modelo
- Diseño del experimento
- Realización del experimento
- Evaluación de los resultados

Procedimiento de simulación
- Paso 1: definición de los objetivos
- Paso 2: formulación del modelo
- Paso 3: diseño del experimento
- Paso 4: realización del experimento
- Paso 5: evaluación de los resultados

Generación de valores de una variable aleatoria

Proceso de Monte Carlo
- Método gráfico
- Método de transformación matemática
- Método tabular
- Cómo usar una tabla de números aleatorios
- Generación de números con distribución normal
- Verificación de la representatividad
- Ejercicios de práctica (16-1), (16-2)

Construcción de un modelo

Confiabilidad y validación del modelo

Introducción a algunos ejemplos

Ejemplo de sistemas de colas
- Objetivo
- Diseño del modelo
- Diseño del experimento
- Realización del experimento
- Evaluación de los resultados

Ejemplo de inventarios
- Objetivo
- Diseño del modelo
- Diseño del experimento
- Realización del experimento
- Evaluación de los resultados

Simulación de toma de decisiones

humanas
Objetivo
Construcción del modelo
Validación del modelo
Evaluación de los resultados
Ejemplo de una agencia de renta de autos
Objetivo
Diseño del modelo
Diseño del experimento
Realización del experimento
Evaluación de los resultados
Experiencias del mundo real
Sistemas de colas
Sistemas de inventarios
Juegos
Toma de decisiones humanas
Planeación
Lenguajes de simulación en computadora
Limitaciones de la simulación
Resumen
Ejercicios
Estudio de un caso: Pero, ¿se obtendrá una ganancia?
Bibliografía

Con todo el poder de las matemáticas, existen muchos problemas que desafían los métodos de solución conocidos. Por ejemplo, cuando se quiere tomar decisiones sobre un nuevo producto, el fabricante debe considerar precio, calidad, nombre de marca, reacción competitiva, reacción del cliente, promoción, distribución y otros factores. El administrador de un supermercado, al asignar personal en las cajas, debe tomar en cuenta las variaciones de tráfico de clientes de un día a otro y de una hora a otra, la disponibilidad de empleados, el nivel de entrenamiento, además de los efectos de baratas especiales. Estos problemas incluyen eventos aleatorios, muchas variables que tienen relaciones complejas y fenómenos dinámicos, es decir, que cambian a través del tiempo. Ninguna ecuación conocida o modelo de optimización resolverá estos problemas debido al comportamiento de las variables y a la complejidad de sus interacciones.

¿Qué se hace cuando todo lo demás falla? Una posibilidad es experimentar. La *simulación* es una técnica de experimentación en que se usan modelos lógico-matemáticos. Una simulación puede ser determinista o probabilista según el comportamiento de las variables incluidas. Las simulaciones deterministas son bastante comunes en la planeación corporativa. Por ejemplo, una firma puede usar simulación para pronosticar las ganancias sobre un alcance de ventas estimadas. Sin embargo, se hará hincapié en la simulación probabilista para comprobar cómo se tratan las variables aleatorias.

La experimentación no es ni nueva ni rara en el mundo de los negocios. La construcción de un modelo a escala de un nuevo automóvil, las pruebas de mercado de un nuevo producto, el que un departamento ensaye nuevos procedimientos contables o el hacer una pequeña inversión en un tipo nuevo de valores, son formas de experimentación.

Puede pensarse en la experimentación como en un método organizado de prueba y error que usa un modelo del mundo real para obtener información. Por ejemplo, un modelo de planeación corporativa puede usarse para probar una nueva política sobre ciertas condiciones futuras. En pocos minutos en una computadora, pueden simularse muchos años de operación para explorar los efectos de dicha política. La información obteni-

da de las simulaciones ayuda a la administración a explorar las nuevas políticas. También puede examinar políticas actuales bajo otras condiciones económicas futuras. De esta manera, la simulación acorta el tiempo y es menos costosa que llevar todo esto a la práctica.

La repetición es común en simulación. La razón es que los resultados de un experimento de simulación están sujetos a las probabilidades si el modelo incluye variables aleatorias. Cada corrida de prueba es sólo una muestra y los resultados de muchas iteraciones son estadísticos, y no leyes inmutables o soluciones óptimas. Al repetir el experimento muchas veces, es posible aumentar la confianza en los resultados, pero de todas maneras se deberán interpretar en forma estadística.

El riesgo más importante al experimentar se refiere a resultados del experimento; éstos pueden diferir de los resultados de la puesta en práctica. El modelo que se usa debe ser una representación *válida* del mundo real. Esto es, debe incluir todas las variables significativas y sus relaciones en forma correcta. Si el modelo no es válido, existen muy pocas posibilidades de que conduzca a resultados seguros.

La simulación difiere de los otros temas de este libro en un aspecto muy importante, es mucho más general. No está limitada a una categoría de problemas, como control de inventarios, o a un método de solución, como programación lineal. Los límites que existen son los de la imaginación, de los recursos de computación y de tiempo.

No hay principios ni teoremas de simulación. Pero, por fortuna, existen aspectos de la simulación que pueden estudiarse con grandes beneficios. En este capítulo se presenta un procedimiento de simulación ampliamente aceptado que se basa en el método científico. También se analizan algunas técnicas específicas, como la de Monte Carlo, que se emplean con frecuencia en simulación. Se inlcuyen bastantes ejemplos con el fin de estimular la imaginación en cuanto al campo de las aplicaciones de simulación.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Después de estudiar este capítulo, el lector deberá conocer:

1 El significado de los siguientes términos:
   Simulación — Generador de números aleatorios uniforme
   Proceso de Monte Carlo — Diagrama de flujo
   Número seudoaleatorio — Validación del modelo
2 Los cinco pasos en el procedimiento de simulación.
3 Cómo generar valores de una variable aleatoria mediante el proceso de Monte Carlo.
4 Cómo llevar a cabo una simulación manual.
5 Cómo interpretar los resultados de una simulación.

EJEMPLO DE SIMULACIÓN: ANÁLISIS DE GANANCIAS

Supóngase que una firma está considerando la introducción de un nuevo producto. Se sabe, con una confianza razonable, que los costos fijos serán

de $10 000 y que el precio de venta debe ser de $2 por razones competitivas. La firma quiere por lo menos alcanzar el punto de equilibrio en el primer año de ventas.

Este problema surge gracias a la incertidumbre en cuanto a los costos variables y a la demanda del producto. Las mejores estimaciones son que los costos variables estarán entre $0.95 y $1.05. Se piensa que la demanda dependerá de la reacción de los competidores. Si reaccionan rápidamente en el primer año, se espera que las ventas sean de 8 000, 9 000 o 10 000 unidades. Si no hay reacción fuerte, entonces las ventas pueden llegar a 10 000, 11 000 o 12 000 unidades. La firma piensa que existe un 60% de posibilidades de que sus competidores reaccionen fuertemente.

Objetivo

La administración desea saber el riesgo de seguir adelante con el producto. ¿Qué posibilidad existe de llegar al punto de equilibrio? Esta situación presenta la oportunidad de una simulación:

Existen varias variables interrelacionadas
Algunas variables se comportan aleatoriamente
Se dispone de datos sobre las variables
No hay disponibilidad inmediata de una solución analítica

Con simulación la administración puede "someter a prueba" el nuevo producto muchas veces. Después pueden graficarse los resultados de cada prueba para observar con qué frecuencia se obtiene el punto de equilibrio. Por tanto, el objetivo será proporcionar una distribución de probabilidad para las ganancias del primer año.

Formulación del modelo

La ecuación básica del modelo es la ecuación de la ganancia:

$$\text{Ganancia} = (\text{precio} - \text{costo variable})(\text{demanda}) - \text{costo fijo}$$

Se sabe que el costo fijo y el precio son constantes en $10 000 y $2, respectivamente. El costo variable y la demanda se deben determinar para cada corrida de prueba. No debe olvidarse que la demanda depende de la reacción del competidor.

En la figura 16-1 se muestra un diagrama de flujo para el modelo completo. Al seleccionar en forma aleatoria una reacción del competidor, las posibilidades de demanda se vuelven conocidas. La selección aleatoria de una demanda y un costo variable harán posible calcular la ganancia. Así, se tiene un modelo para simular la introducción de un nuevo producto.

Diseño del experimento

Para alcanzar el objetivo de obtener la probabilidad de llegar al punto de equilibrio, tendrá que repetirse el experimento cierto número de veces.

FIGURA 16-1
Diagrama de flujo del modelo de análisis de ganancias.

¿Cuántas? La respuesta a esta pregunta está basada en la teoría de muestreo que no se trata aquí. Puede consultarse cualquier texto sobre estadística para ver cómo se determina el tamaño de la muestra. Baste decir que debe haber suficientes repeticiones para producir resultados estadísticamente seguros. Los ejemplos usan 100 corridas.

Los datos de cada corrida de prueba deberán registrarse. Será necesario registrar los valores seleccionados para cada variable aleatoria y, por supuesto, la ganancia.

Realización del experimento

¿Cómo se seleccionan los valores para las tres variables aleatorias? Si se supone que tienen distribución uniforme, una manera es usar el *método de los números en un sombrero.* Considérese el costo variable. Existen 11 costos posibles si se suponen incrementos de un centavo. Como se considera que todos son igualmente probables, pueden ponerse 11 números en un sombrero y seleccionar uno para cada prueba (reemplazando el número después de cada prueba). De una manera similar, podrían ponerse 10 números en un sombrero para la reacción competitiva. Seis de ellos representarían una reacción fuerte y cuatro una reacción débil. Para la demanda se podrían usar tres números.

Otro método es usar una tabla de número aleatorios. Para el costo variable, los números de 1 al 11 representan los costos posibles seleccionando un número de la tabla y usando la correspondencia que se muestra en la tabla 16-1.

TABLA 16-1
Código para el costo variable

Número	*Costo variable*
1	$0.95
2	0.96
3	0.97
4	0.98
5	0.99
6	1.00
7	1.01
8	1.02
9	1.03
10	1.04
11	1.05

Por conveniencia se usará el método de la tabla de números aleatorios. Las correspondencias para la reacción competitiva y las demandas se muestran en la tabla 16-2.

TABLA 16-2
Códigos para la reacción competitiva y la demanda

		Demanda		
Número	*Reacción competitiva*	*Número*	*Reacción fuerte*	*Reacción débil*
1	Fuerte	1	8 000	10 000
2		2	9 000	11 000
3		3	10 000	12 000
4				
5				
6	Fuerte			
7	Débil			
8				
9				
10	Débil			

Ahora puede llevarse a cabo el experimento en el siguiente orden:

1 Se selecciona aleatoriamente un costo variable
2 Se selecciona aleatoriamente una reacción competitiva
3 Se selecciona aleatoriamente una demanda de producto, dada la reacción competitiva.
4 Se calcula la ganancia
5 Se repite 100 veces

En la tabla 16-3 se muestran los resultados de las 10 primeras pruebas.

Aun para este pequeño ejemplo, pueden apreciarse las ventajas de una computadora.

TABLA 16-3
Resultados de la simulación

Costo variable		*Reacción competitiva*		*Demanda*		
Número aleatorio	Costo, $	Número aleatorio	Reacción	Número aleatorio	Demanda	Ganancia, $
2	0.96	9	Débil	3	12 000	2480
8	1.02	10	Débil	2	11000	780
9	1.03	3	Fuerte	3	10 000	-300
10	1.04	2	Fuerte	2	9000	-1360
3	0.97	9	Débil	1	10 000	300
11	1.05	4	Fuerte	2	9000	–1450
10	1.04	2	Fuerte	3	10 000	-400
5	0.99	6	Fuerte	1	8000	-1920
7	1.01	3	Fuerte	2	9000	-1090
11	1.05	6	Fuerte	2	9000	-1450

Evaluación de los resultados

Con una computadora, las 100 repeticiones dieron los siguientes resultados:

Ganancia mínima: $ -2 400
Ganancia máxima: $ 2 480
Ganancia promedio: $ -266
Ganancia mediana: $ -200

En la figura 16-2 se presenta un histograma que da la distribución de probabilidad que resultó del experimento. Como puede observarse, el punto de equilibrio se alcanzó en el 44% de las pruebas. En el 27% las pérdidas excedieron a $1 000. Con esta distribución de probabilidad, la administración puede evaluar el riesgo de introducir el nuevo producto. Por supuesto, en el caso de que escogiera seguir adelante, sólo ocurrirá un costo variable y una demanda, lo cual dará sólo un resultado de ganancia.

PROCEDIMIENTO DE SIMULACIÓN

Las simulaciones se llevan a cabo con una secuencia de cinco pasos. Los pasos sirven como una guía de lo que debe incluirse para realizar con éxito un experimento.

Paso 1: definición de los objetivos

Una simulación puede llevarse a cabo como ayuda para entender un sistema existente o como apoyo para diseñar un nuevo sistema. Una compañía puede experimentar el aumento en los costos de inventario, en cuyo caso construye un modelo de simulación de su sistema de inventario para estudiar las causas del aumento. O puede experimentar con diferentes políticas de financiamiento usando un modelo global de la compañía.

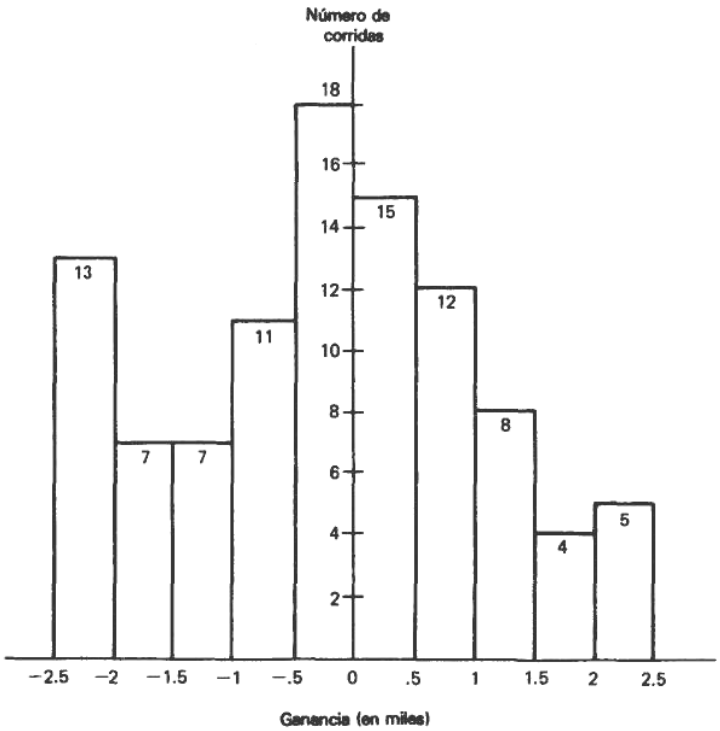


FIGURA 16-2
Distribución de la frecuencia para simulación.

Puede usarse también un modelo de simulación de flujo de caja para probar el impacto de las inversiones de capital propuestas.

Es importante que los objetivos del experimento estén definidos con claridad, ya que servirán como guía para todo lo que sigue. Las variables del modelo pueden incluirse o excluirse según los objetivos (por ejemplo, ignorar el flujo de caja en un modelo de inventarios e incluirlo en un modelo de inversión de capital). Los objetivos influyen en el diseño del experimento. Por ejemplo, se tiene que mantener constante el espacio de almacenamiento cuando se estudian sistemas actuales, pero puede dejarse variar cuando se trata del diseño de un nuevo sistema.

Paso 2: formulación del modelo

La tarea es desglosar en términos lógico-matemáticos precisos: (1) las componentes que deben incluirse, (2) el comportamiento de las componentes y (3) sus relaciones. Aunque es esencial el ser escrupuloso, debe tenerse cuidado de no incluir detalles innecesarios. Los objetivos de la simulación proporcionan la mejor guía para distinguir los factores relevantes y los irrelevantes. La meta es formular un modelo válido y seguro con un mínimo de complejidad.

Paso 3: diseño del experimento

Se ahorra mucho tiempo y esfuerzo, si se trabaja en los procedimientos experimentales antes de correr el modelo. ¿Qué medidas se tienen que tomar? ¿Qué incrementos de tiempo se usarán? ¿Cuál será la duración total? ¿Cómo se analizarán los resultados? Deben tomarse en cuenta las respuestas a estas y otras preguntas al desarrollar un plan para el experimento.

Paso 4: realización del experimento

Esto es de hecho correr el modelo. Aquí se debe marcar el tiempo apropiado, hacer las observaciones necesarias y registrar los datos para el análisis.

Paso 5: evaluación de los resultados

Casi siempre la simulación da resultados estadísticos: promedios y distribuciones de probabilidad.

En la práctica, estos cinco pasos se traslapan considerablemente. Muchas veces los objetivos se establecen tomando en cuenta las capacidades des del modelo. Los modelos se diseñan para ayudar a la experimentación. Los experimentos se diseñan para obtener los resultados deseados. Y los resultados se analizan para aclarar los objetivos. El orden de los pasos es menos significativo que el que se ejecuten por completo.

GENERACIÓN DE VALORES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Como muchas simulaciones incluyen variables aleatorias, es necesario conocer cómo seleccionar valores específicos de estas variables. Recuérdese que en el ejemplo anterior se examinó el método de los *números en un sombrero.* El objetivo era seleccionar valores específicos de acuerdo con su probabilidad de ocurrencia. El proceso de Monte Carlo es un método más general, que puede usarse para cualquier distribución de probabilidad.[1]

PROCESO DE MONTE CARLO

El proceso de Monte Carlo es un procedimiento de dos pasos para generar valores de una variable aleatoria de acuerdo con una distribución de probabilidad dada. Esto se muestra en la figura 16-3.

Cuando se tira del gatillo, un generador de números aleatorios (que podría ser números en un sombrero) produce un número. Los números producidos deben tener una distribución de probabilidad uniforme, es decir, deben ser igualmente probables. Después la transformación convierte los números con distribución uniforme en el valor que se desea, de acuerdo con la distribución que se quiere.

[1] Algunos autores usan el término "Monte Carlo" como sinónimo de simulación. En este libro Monte Carlo tiene un significado menos amplio.

FIGURA 16-3
Proceso de Monte Carlo.

Para simulaciones pequeñas, los números aleatorios distribuidos uniformemente pueden generarse por medio de tablas de números aleatorios, por el método de números en un sombrero, tirando una moneda o tirando un sólo dado. Sin embargo, para tareas mayores se necesitan métodos más complicados.

Los generadores de números aleatorios verdaderos casi siempre incluyen algún proceso físico como ruido eléctrico (similar a la estática del radio), que es aleatorio por naturaleza. Este tipo de procesos se ha usado para generar tablas de hasta 1 millón de números.

La mayoría de las computadoras utilizan ecuaciones matemáticas para generar números *seudoaleatorios.* Los generadores de números seudoaleatorios producen series cíclicas de números en donde cada ciclo es exactamente igual que el anterior. Sin embargo, dentro de un ciclo dado, la salida se acerca bastante a una serie de números aleatorios con distribución uniforme. Las longitudes típicas de un ciclo exceden a un millón de números; así, muy rara vez hay problemas de repetición.

Para transformar un número aleatorio distribuido uniformemente en uno que tenga la distribución deseada puede aplicarse cualquiera de tres métodos: gráfico, matemático o tabular.

Método gráfico

Para usar este método se debe dibujar una gráfica de la distribución de probabilidad *acumulada* que se desea. Entonces, para cada número aleatorio generado se lee la gráfica para obtener el valor correspondiente de la variable aleatoria. Esto se ilustra en la figura 16-4, que muestra la distribución acumulada para el costo variable usada en el ejemplo anterior de simulación. Recuérdese que el costo variable podía tomar cualquiera de 11 valores igualmente probables desde $0.95 hasta $1.05. Para cada valor de de la variable aleatoria, la distribución acumulada muestra la probabilidad de que ocurra ese valor o uno menor.

Para usar la gráfica, el generador de números aleatorios uniformes debe producir números entre 0 y 1. Cada número específico generado se localiza en el eje de probabilidad de la gráfica. Por ejemplo, si el número aleatorio es 0.86, se localiza en el eje vertical (punto A). Leyendo hasta llegar a la curva y después hacia abajo, el valor correspondiente para la variable aleatoria deseada se encuentra en el punto B (1.04). De esta manera se ha utilizado la gráfica para transformar números con distribución uniforme en la distribución deseada.

El método gráfico es muy útil para distribuciones continuas, como la normal y la exponencial, pero puede emplearse con cualquier distribu-

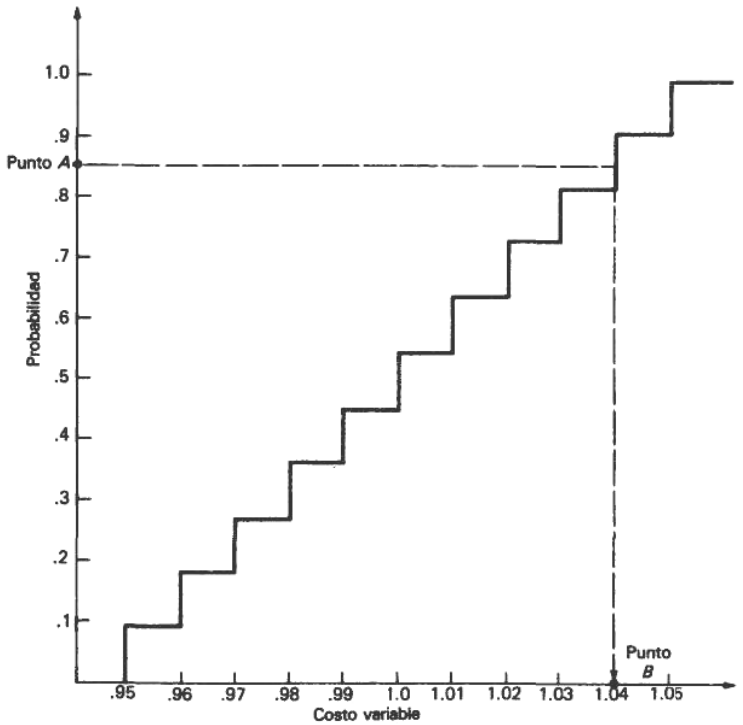


FIGURA 16-4
Distribución acumulada para el costo variable.

ción. La limitación más importante es que se debe tomar tiempo y cuidado en dibujar la gráfica con exactitud.

Método de transformación matemática

Para aplicar este método es necesario que se disponga de una ecuación matemática para la distribución de probabilidad deseada. Otra vez se usa la distribución acumulada. Considérese el ejemplo del costo variable. La función de distribución acumulada para esta distribución puede escribirse como:

$$F(X) = \frac{X - 0.94}{0.11} \text{ para } X = 0.95, 0.96, \ldots, 1.05$$

Después, sea R un número aleatorio con distribución uniforme entre 0 y 1. Establézcase $F(X)$ igual que R y despéjese X.

$$F(X) = R = \frac{X - 0.94}{0.11}$$

$$0.11\,R = X - 0.94$$

$$X = 0.11\,R + 0.94 \text{ (después de 2 decimales se redondea)}$$

Ahora puede seleccionarse un número aleatorio y sustituirlo en la ecuación de transformación para obtener el costo variable. Si se selecciona 0.40, entonces:

$R = 0.40$
$X = 0.11(0.40) + 0.94$
$X = 0.984$ redondeado a 0.99

De hecho con este método se hace exactamente lo mismo que el método gráfico, sólo que usa álgebra. El método de transformación matemática es ventajoso para uso en computadoras. Sin duda, algunas computadoras incluyen las transformaciones para las distribuciones más comunes como la distribución normal.

Método tabular

El método tabular se usa ampliamente por su simplicidad. Este es el método que se utilizó para el ejemplo de simulación de las ganancias. Aunque conceptualmente es igual, que los métodos gráficos y de transformación matemática, emplea tablas en lugar de gráficas o ecuaciones.

Para comenzar se construye una tabla de cada valor de la variable aleatoria y su probabilidad asociada. Esto se muestra en las primeras dos columnas de la tabla 16-4. Después se tabula la distribución acumulada sumando en la columna de probabilidades. Por último, se establecen intervalos de números aleatorios usando las probabilidades acumuladas como límites superiores de cada intervalo.

Así, se ha creado un código para interpretar los números aleatorios de acuerdo con la distribución de probabilidad deseada. Si, por ejemplo, se selecciona el número aleatorio 0.94, el valor correspondiente sería 7 minutos entre llegadas.

Si el lector está pensando que esto sólo es sentido común, está en lo correcto. Todo lo que se está tratando de hacer es localizar un conjunto de números de acuerdo con una distribución deseada. En el ejemplo anterior 5% de los números deben corresponder a 1 minuto entre llegadas, 25% a 3 minutos, etc. Se podrían seleccionar cinco números cualesquiera para el primer valor (2, 7, 9, 38 y 62, por ejemplo), otros 25 para el siguiente valor y así sucesivamente. El uso de la tabla tiene dos ventajas: conduce a intervalos sencillos y se tiene menos probabilidad de cometer errores.

TABLA 16-4
Tiempo entre llegadas

Tiempo, minutos	*Probabilidad*	*Probabilidad acumulada*	*Intervalos*
1	**0.05**	**0.05**	**0.01-0.05**
3	**0.25**	**0.30**	**0.06-0.30**
5	**0.60**	**0.90**	**0.31-0.90**
7	**0.10**	**1.00**	**0.91-0.99,00**

El método tabular es excelente para simulaciones manuales, pero requiere que se guarde la tabla en la memoria si se usa una computadora. Su limitación más grande es que no puede utilizarse con distribuciones continuas, a menos que se disponga de una tabla para esa distribución.

Cómo usar una tabla de números aleatorios

El apéndice C de este texto es un extracto de una tabla de números aleatorios. Para usar una tabla de números aleatorios se debe:

1 Entrar a la tabla en forma aleatoria
2 Proceder a través de la tabla siguiendo un patrón fijo

Para usar el apéndice C. El lector puede cerrar los ojos, señalar con un lápiz en algún lugar de la tabla. Después ir seleccionando los números en orden hacia abajo de la columna, seguir con el primer número de la siguiente columna, etc. La regla puede consistir en seleccionar los números por renglón de derecha a izquierda. O se puede ir por las columnas hacia arriba en lugar de hacia abajo. Básicamente cualquier regla fija funcionará. Pero no deben seleccionarse los valores salteados sin orden, pues los resultados podrían no ser aleatorios.

¿Cuántos dígitos se deben tomar? Sólo los que se necesiten. Por ejemplo, en la tabla 16-4 se necesitan 100 números, lo que implica que se deben utilizar dos dígitos (úsese 00 como 100). Para esto pueden usarse cualquiera dos columnas adyacentes en una tabla de números aleatorios. Para 1 000 números se necesitan tres dígitos; para 10 números sólo un dígito.

¿Qué pasa si se necesitan menos de 10 números? Simplemente se omiten los dígitos que no se están usando. Por ejemplo, la tirada de un dado se podría representar o duplicar seleccionando los números del 1 al 6 de la tabla y saltándose los dígitos 0, 7, 8 y 9 cuando aparecen.

Generación de números con distribución normal

La distribución normal se usa con frecuencia en simulación. Para generar valores puede aplicarse cualquiera de los tres métodos, pero el método de transformación matemática es el más común con computadoras. Se dispone de varias ecuaciones que varían en complejidad y exactitud. Un método sencillo pero eficaz es seleccionar 12 números aleatorios separados con distribución uniforme entre 0 y 1, sumarlos y restarles 6. Esto es:

$$X = \left[\sum_{i=1}^{12} R_i\right] - 6$$

en donde R_i es un número aleatorio con distribución uniforme entre 0 y 1 y X es un número aleatorio con distribución normal con media cero y desviación estándar de uno. Esto lleva a una buena aproximación dentro de

tres desviaciones estándares de la media. El hecho de tener que usar 12 números para obtener sólo un número con distribución normal no es ningún problema para la computadora.

También puede usarse el método tabular para generar números aleatorios con distribución normal. Para esto se necesita una tabla de la distribución normal acumulada (véase el apéndice B). Primero se selecciona un número de una tabla de números aleatorios. Después se localiza ese número en el cuerpo de la tabla de la distribución normal. Por último se lee el valor correspondiente en el margen de la tabla. Esto equivale al método gráfico, excepto que se emplea una tabla en lugar de una gráfica para encontrar los valores deseados.

Con cualquiera de los dos métodos, los valores que resultan se deben modificar usando la media y la desviación estándar que se quiere, si éstos son diferentes de los valores normales estándares. Recuérdese que esto se hace con la ecuación:

$$X = \mu + Z\sigma$$

Verificación de la representatividad

Cuando se emplea el proceso de Monte Carlo es importante revisar los valores generados para comprobar si son representativos de lo que se esperaba. La distribución de los valores debe corresponder de cerca a la distribución dada para la variable. Si no es así, se deben rechazar estos valores y desarrollar un nuevo conjunto.

Considérese un ejemplo. Supóngase que se quiere generar el tiempo entre llegadas para las primeras 10 personas aplicando el proceso de Monte Carlo en la tabla 16-4. Se procede a seleccionar 10 números aleatorios de una tabla de números aleatorios y se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 16-5. Los valores generados no se distribuyen cómo era de esperarse. En lugar de que el 60% de los valores fuera cinco minutos, sólo se obtuvo uno (10%). Además, cinco de los valores son de 1 minuto

TABLA 16-5
Primaras diez llegadas

Llegada número	*Número aleatorio*	*Tiempo entre llegadas, minutos*
1	05	1
2	01	1
3	19	3
4	29	3
5	15	3
6	04	1
7	72	5
8	01	1
9	12	3
10	03	1

cuando se esperaba que sólo hubiera uno. Si este conjunto de valores fuera usado en una simulación, los resultados serían erróneos puesto que los valores no son representativos de la variable.

Existen pruebas estadísticas formales para evaluar la representatividad, pero no se presentarán aquí. Éstas pueden encontrarse en la mayoría de los libros de estadística bajo el título "pruebas de bondad de ajuste".

EJERCICIO DE PRÁCTICA 16-1

a Con el método tabular, establézcanse intervalos de números aleatorios para la siguiente variable:

Variable	*Probabilidad*
G	**0.05**
I	**0.05**
O	**0.25**
T	**0.25**
U	**0.15**
Y	**0.10**
Espacio	**0.15**

b Enumérense los valores de la variable para la siguiente serie de números aleatorios:

83, 30, 68, 92, 4, 28, 49, 89, 8, 55

EJERCICIO DE PRÁCTICA 16-2

Dados los siguientes 12 números aleatorios:

78, 92, 14, 36, 68, 22, 51, 9, 38, 94, 78, 41

a Con la expresión de transformación matemática genérese un número aleatorio con distribución normal.
b Con el método tabular encuéntrense 12 números distribuidos normalmente.

CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO

Pocas veces resulta tan evidente el lado artístico de las ciencias administrativas como en el diseño de modelos de simulación. Se necesita una combinación de razonamiento lógico, matemáticas y buen sentido común. Una simulación exitosa es tanto un logro creativo como una herramienta práctica que proporciona información útil al administrador. Las

probabilidades de éxito aumentan si no se pierde de vista qué es lo que se está simulando y se usan diagramas de flujo para construir el modelo.

La simulación requiere tratar de imitar la operación de algún sistema o proceso. Al construir el modelo y realizar el experimento se debe tener en mente la idea del sistema real. Por ejemplo, si se está simulando el proceso de salida de un supermercado, la imagen debe ser de los clientes llegando, esperando, siendo servidos y saliendo. Si se trata de la simulación de un inventario se debe imaginar a la orden del cliente que se satisface, el nivel de inventario que baja, un pedido que se hace para recuperar el inventario y las nuevas unidades que se agregan al inventario. Este trabajo mental ayudará a identificar la secuencia de los pasos que sigue una operación y evitará el sentirse perdido a la mitad del experimento.

Los diagramas de flujo son ayudas gráficas para un proceso de pensamiento lógico. La simulación opera en ciclos y cada ciclo consiste en una serie de pasos. El tener que dibujar un diagrama de flujo obliga a pensar en los pasos que hay dentro de cada ciclo. En la figura 16-5 se muestran algunas figuras básicas. El lector debe tener paciencia al dibujar los diagramas de flujo. Debe comenzar con las primeras impresiones y después revisar y mejorar el diagrama conforme vaya entendiendo el modelo. Cuando tenga un diagrama claro y lógico ha llegado al término.

CONFIABILIDAD Y VALIDACIÓN DEL MODELO

Se dice que un modelo es *confiable* si réplicas idénticas llevan a los mismos resultados. Un modelo es *válido* si los resultados de la simulación son semejantes a los que se obtendrían del sistema real, es decir, del sistema que se está modelando. La confiabilidad normalmente depende de la natura-

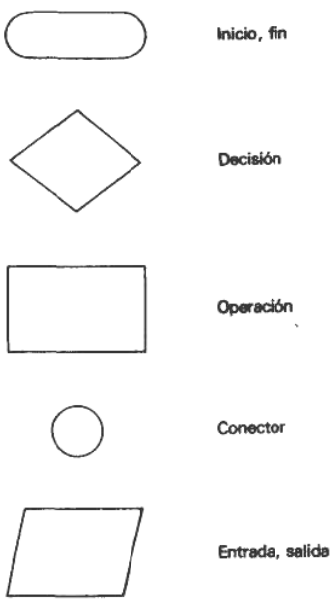


FIGURA 16-5
Figuras básicas para el diagrama de flujo.

leza causal de la mayoría de los modelos. Por ejemplo, en el modelo de análisis de ganancias, si se usan el mismo costo variable y la misma demanda, cada vez se obtendría la misma ganancia (sin tomar en cuenta algunos errores aritméticos).

La validez es más difícil de demostrar. Un método común es introducir datos históricos y comprobar si el modelo conduce a resultados históricos conocidos. Si es así, se dice que el modelo es válido. Desafortunadamente, la conformidad con el pasado no garantiza validez en el futuro.

La prueba básica de una simulación es el hecho de que proporcione o no información más valiosa que su costo.

INTRODUCCIÓN A ALGUNOS EJEMPLOS

Las siguientes cuatro secciones presentan ejemplos de simulación. El primer ejemplo incluye un sistema de colas y es el primer ejemplo de la simulación de sistemas dinámicos. Se introducirán los métodos para hacer correr el tiempo en una simulación y para registrar los datos en este ejemplo.

El segundo ejemplo es de un sistema de inventarios. Aquí el propósito es explorar distintas políticas. En efecto, la administración puede hacer preguntas de "¿qué pasa si. . .?" En el tercer ejemplo la simulación se usa para imitar (y automatizar) la toma de decisiones humanas. El último ejemplo muestra la simulación de una agencia de renta de carros.

Estos ejemplos ilustran las técnicas básicas para construir un modelo, hacer correr el tiempo, registrar los datos e interpretar los resultados. También deberán estimular la imaginación en cuanto al potencial de la simulación.

EJEMPLO DE SISTEMAS DE COLAS

En este ejemplo un banco está tratando de determinar cuántas cajas de autobanco construir. De manera más específica, desea saber si una ventanilla será suficiente. Debido a las limitaciones de estacionamiento, el banco no quiere más de tres carros esperando en la línea a la vez.

Objetivo

Puede suponerse que una ventanilla es suficiente si la longitud de la línea muy pocas veces excede a tres. Si pudiera simularse la operación de una sola ventanilla de autobanco, podría observarse la longitud de la cola y ver con qué frecuencia excede el límite. El objetivo, entonces, es determinar la frecuencia con que las longitudes exceden a tres.

Diseño del modelo

La simulación incluye un modelo de una cola y un servidor. Se necesitan datos sobre el patrón de llegadas y sobre las tasas de servicio. Por supuesto la tasa de llegadas varía de un día a otro y de una hora a otra en cualquier

día dado. Como el objetivo es determinar la incidencia de colas largas, deben usarse las tasas de llegadas pico. Supóngase que a través del estudio de otros bancos y por medio de encuestas con los clientes propios el banco estima que la tasa de servicio y el tráfico máximo tienen la distribución de probabilidad que se muestra en la tabla 16-6.

Con los datos de las tasas de llegadas y de servicio, puede pasarse a la construcción del modelo. En la figura 16-6 se muestra un diagrama de flujo de la operación de la ventanilla.

Diseño del experimento

Es necesario considerar tres preguntas para este experimento. Primero, ¿cuán larga necesita ser la corrida? La regla general es: una corrida lo su-

TABLA 16-6
Distribución de llegadas y de tasas de servicio

Tiempo entre Llegadas, minuto	*Probabilidad*	*Tiempo de servido minutos*	*Probabilidad*
0.2	0.3	0.5	0.1
0.4	0.3	1.0	0.5
0.6	0.2	1.5	0.3
0.8	0.1	2.0	0.1
1.0	0.1		1.0
	1.0		

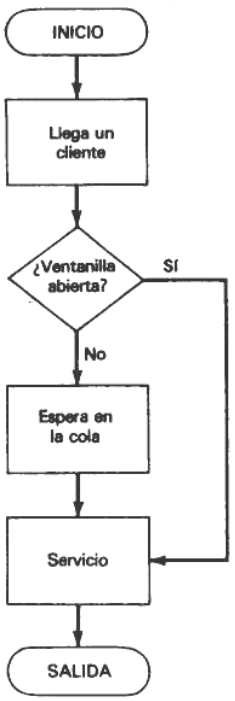


FIGURA 16-6
Diagrama de flujo de la operación de una ventanilla de autobanco.

ficientemente larga para establecer con claridad un patrón de comportamiento. Algunos modelos pueden ampliarse indefinidamente, esto es, explotar, otros pueden disminuir y detenerse, pero la mayoría se estabilizará en algún patrón de estado estable. Para el ejemplo, puede comenzarse con 60 minutos de operación y comprobar si se estableció un patrón.

Segundo, ¿cuántas corridas se necesitan? Cada corrida sólo es una muestra. Serán necesarias suficientes corridas para constituir una muestra estadística grande.

Por último, ¿cuáles son las condiciones iniciales? Es obvio que el hecho de que la cola está vacía o no al comenzar significa alguna diferencia. El enfoque general en simulación es seleccionar condiciones iniciales reales y quitar los resultados de las primeras (por ejemplo, 10) iteraciones. Esto evita la distorsión de los resultados de estado estable debida a las condiciones iniciales.

Realización del experimento

En un modelo de simulación dinámico, el tiempo puede avanzar con incrementos fijos o variables. Para un modelo de incrementos de tiempo fijos, el tiempo que transcurre entre las observaciones del sistema es constante; cada ciclo está marcado por el reloj como golpes en un tambor. En los modelos de incrementos de tiempo variables, el inicio de cualquier periodo dado está determinado por la ocurrencia de algún evento como la llegada de un cliente. En ambos casos debe definirse la unidad más pequeña de tiempo que se permite (es decir, minutos, días años).

Como en este caso la distribución de llegadas está dada para el tiempo entre llegadas, es conveniente usar incrementos de tiempo variables. Entonces cada ciclo se inicia siempre que llegue un cliente. Esto corresponde también a la forma en que el sistema real opera.[2]

Para generar las llegadas y los tiempos de servicio puede aplicarse el proceso de Monte Carlo basado en la tabla de números aleatorios y la transformación que se muestra en la tabla 16-7.

Por simplicidad sólo se consideran las 10 primeras llegadas para una corrida. Se usa la tabla 16-8 para registrar los eventos conforme ocurren, asignando un renglón de la tabla a cada ciclo. Para recorrer la simulación, considérese mentalmente la operación del sistema. Un reloj se inicia en el tiempo cero. Se selecciona el dígito aleatorio 6 para la primera llegada, lo cual corresponde a 0.4 minutos entre llegadas. Como ésta es la primera llegada, el reloj marca 0.4 minutos. Se selecciona otro número aleatorio para el tiempo de servicio, que da 1.0 minutos. En este momento puede registrarse la operación del sistema. El servicio comienza a los 0.4 minutos y termina en el tiempo 1.4 minutos. Para el primer cliente no hay espera ni cola.

[2] Se usarían incrementos de tiempo fijo, si los datos de llegadas mostraran el número de llegadas por minuto. En este caso, sería necesaria una regla para manejar llegadas múltiples: todas las llegadas ocurren el principio del minuto, o n llegadas se espacian cada n-ésima parte de un minuto. Aunque ésta no es la forma en que opera el sistema, es una buena aproximación.

TABLA 16-7
Tablas de transformación

a Llegadas

Tiempo entre llegadas, minutos	*Probabilidad*	*Probabilidad acumulada*	*Dígitos aleatorios*
0.2	0.3	0.3	1-3
0.4	0.3	0.6	4-6
0.6	0.2	0.8	7-8
0.8	0.1	0.9	9
1.0	0.1	1.0	0

b Tiempo de servicio

Tiempo de servicio, minutos	*Probabilidad*	*Probabilidad acumulada*	*Dígitos aleatorios*
0.5	0.1	0.1	1
1.0	0.5	0.6	2-6
1.5	0.3	0.9	7-9
2.0	0.1	1.0	0

TABLA 16-8
Simulación del autobanco

	Llegadas			*Servicio*		*Operación*			
Núm	*Número aleatorio*	*Tiempo entre llegadas*	*Tiempo de llegada*	*Número aleatorio*	*Tiempo de servicio*	*Tiempo de inicio de servicio*	*Tiempo de terminación de servicio*	*Tiempo de espera*	*Longitud de la cola*
1	6	0.4	0.4	4	1.0	0.4	1.4	—	—
2	2	0.2	0.6	3	1.0	1.4	2.4	0.8	2
3	8	0.6	1.2	6	1.0	2.4	3.4	1.2	2
4	6	0.4	1.6	6	1.0	3.4	4.4	1.8	2
5	1	0.2	1.8	7	1.5	4.4	5.9	2.6	3
6	4	0.4	2.2	2	1.0	5.9	6.9	3.7	4
7	3	0.2	2.4	7	1.5	6.9	8.4	4.5	4
8	5	0.4	2.8	0	2.0	8.4	10.4	5.6	5
9	7	0.6	3.4	8	1.5	10.4	11.9	7.0	5
10	8	0.6	4.0	7	1.5	11.9	13.4	7.9	6

La segunda llegada ocurre a los 0.2 minutos después de la primera, este cliente entra en el tiempo 0.6 minutos. Pero el servicio no puede comenzar hasta terminar con el primer cliente a los 1.4 minutos. Esto significa que el cliente 2 espera 1.4 - 0.6 = 0.8 minutos, y la longitud de la línea es uno (cliente 2).

La décima y última llegaba entra a la cola en el tiempo 4.0. Para saber qué tan larga es la cola véase la columna de "tiempo de inicio de servicio" hasta encontrar un tiempo menor que 4.0 (llegada 4). Esto significa que

los dientes 5, 6, 7, 8 y 9 estaban todos esperando cuando llegó el cliente 10, resultando en una cola de seis.

Evaluación de los resultados

Aun cuando el ejemplo incluye sólo una corrida y nada más para las 10 primeras llegadas (que normalmente se descartan para evitar sesgos por las condiciones iniciales), es claro que una ventanilla no es suficiente. Esto se pudo haber previsto analizando las distribuciones de llegadas y de servicio de la tabla 16-7. Los clientes llegan con un promedio de 2 por minuto mientras que el servicio tiene un promedio de menos de 1 por minuto. El siguiente paso sería tratar tres ventanillas. (¿Por qué no dos ventanillas?).

EJEMPLO DE INVENTARIOS

Bill, el dueño de una tienda de bicicletas quiere experimentar con su política de inventarios. En particular, quiere probar con simulación una política de cantidad fija, punto de reorden. Se dispone de buenos datos sobre bicicletas de ejercicio que se usarán en el experimento. Aunque se desconoce el costo por faltantes, Bill sabe que la venta se pierde cuando no se tienen bicicletas en almacén (no se aceptan órdenes retrasadas o faltantes). Se quiere encontrar una política que mantenga los costos bajos y tenga muy poco riesgo de faltantes.

Objetivo

La meta de esta simulación es estimar el costo total y la probabilidad de que ocurran faltantes para una cantidad y un punto de reorden dados. Repitiendo los cálculos sobre valores que recorren las cantidades y puntos de reorden Bill puede encontrar de manera experimental la mejor combinación.

Diseño del modelo

Como éste es un modelo de inventarios, se necesitan datos sobre los costos de inventario, la demanda y el tiempo de entrega. También se necesitan los alcances posibles de cantidades y puntos de reorden. Supóngase que Bill pudo proporcionar los datos de la tabla 16-9. También supóngase que quiere explorar cantidades de reorden que van de 3 a 10 y puntos de reorden de 3 a 7.

Se diseña el propio modelo para que duplique la operación del sistema de inventarios para una política dada (véase la figura 16-7). Para comenzar el ciclo, se genera una demanda y se ajusta el inventario. Se registran los valores negativos si ocurren faltantes. Después se toma la decisión de hacer un pedido, si el nivel del inventario está en o abajo del punto de reorden. Se calculan los costos de ordenar y de conservar y se inicia el siguiente ciclo. Cuando se coloca una orden, se genera un tiempo de entrega. Se supone que las órdenes se colocan al final de la semana y se reciben

TABLA 16-9
Datos de inventario

a Costos

Costo de conservar	$1/unidad/semana
Costo de ordenar	$20/orden

b Distribución de la demanda

Unidades	*Probabilidades*
0	0.20
1	0.50
2	0.10
3	0.10
4	0.05
5	0.05

c Distribución del tiempo de entrega

Semanas	*Probabilidad*
1	0.10
2	0.25
3	0.60
4	0.05

al principio de la semana. Los costos de conservar están basados en el inventario terminal.

Diseño del experimento

Cada prueba debe tener suficientes ciclos para establecer un patrón claro. Usando incrementos de una semana, esto podría ser 1 año (52 semanas). Además, cada combinación debe correr de 30 a 100 veces para establecer confianza estadística. Como existen 8 cantidades de reorden diferentes y 5 puntos de reorden diferentes, esto da 8 x 5 = 40 combinaciones distintas. Si cada combinación se corre 30 veces, existirán 1 200 corridas de 52 semanas cada una. Es obvio que esto lleva mucho tiempo si se hace en forma manual, pero es sencillo con una computadora. Para los propósitos de ilustración aquí sólo se muestra parte de una corrida.

Realización del experimento

De nuevo se aplica el proceso de Monte Carlo con una tabla de números aleatorios y el método tabular (véase la tabla 16-10) para generar la demanda semanal y los tiempos de entrega. Se supone que el inventarío inicial es de 7 unidades. En la tabla 16-11 se muestran los resultados de 10 semanas usando una cantidad de reorden de 7 unidades y un punto de reorden de 4.

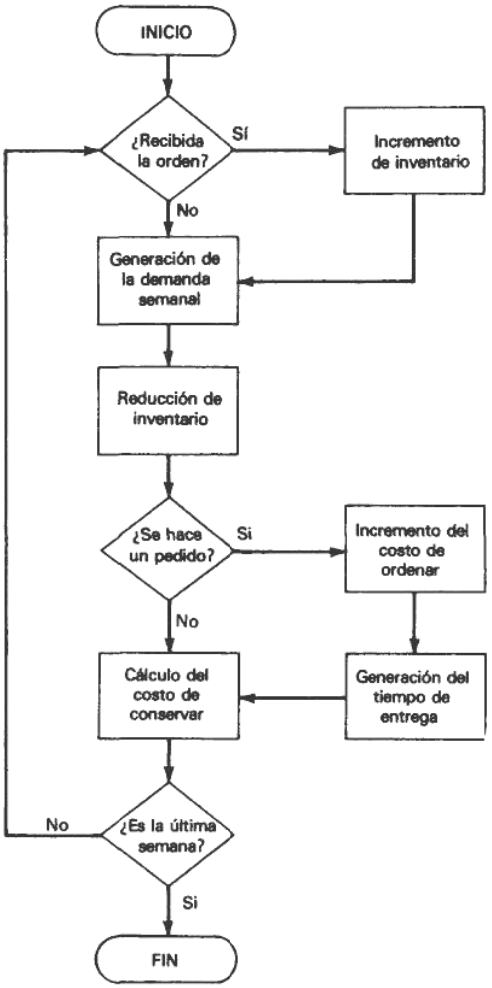


FIGURA 16-7
Modelo de simulación de inventarios.

Evaluación de los resultados

Se llevó a cabo una simulación completa para este ejemplo y los resultados se muestran en la tabla 16-12. Cada política se probó 30 veces por periodos de 52 semanas, promediándose los resultados de las 30 pruebas. Así, por ejemplo, la política de ordenar en lotes de 3 unidades *(Q* = 3) con un punto de reorden de 3 (*R* = 3) dio un costo pomedio anual de ordenar y de mantener de $436, con un promedio de 21.8 faltantes para las 30 corridas de prueba.

Puede observarse que algunas políticas son claramente superiores a otras en cuanto a costos y faltantes (4,3 es mejor en ambas cuentas que 3,3), pero los resultados muestran que es necesario algún trueque entre los costos y los faltantes. Esto puede observarse con más claridad en la figura 16-8. Se obtuvieron cinco curvas seleccionando las mejores cantidades de reorden para cada uno de los cinco puntos de reorden. La línea punteada

TABLA 16-10
Monte Carlo: inventario

a Demanda semanal

Unidades	*Probabilidad*	*Probabilidad acumulada*	*Intervalos de números aleatorios*
0	0.20	0.20	1.20
1	0.50	0.70	21-71
2	0.10	0.80	71-80
3	0.10	0.90	81-90
4	0.05	0.95	91-95
5	0.05	1.00	96-99,00

b Tiempo de entrega

Semanas	*Probabilidad*	*Probabilidad acumulada*	*Intervalos de números aleatorios*
1	0.10	0.10	1.10
2	0.25	0.35	11-35
3	0.60	0.95	36-95
4	0.05	1.00	96-99,00

TABLA 16-11
Simulación de inventarios*

	Demanda					*Tiempo de entrega*	
Semana	*Número aleatorio*	*Unidades*	*Inventario terminal*	*Costo de conservar*	*Costo de ordenar*	*Número aleatorio*	*Semanas*
			7				
1	21	1	6	$6	-	-	-
2	72	2	4	4	$20	35	2
3	56	1	3	3	-	-	-
4	69	1	2	2	-	-	-
5	87	3	6+	6	-	-	-
6	89	3	3	3	$20	89	3
7	02	0	3	3	-	-	-
8	92	4	−1	-	-	-	-
9	13	0	0	-	-	-	-
10	02	0	7	-	-	-	-

* Política: ordenar 7 unidades siempre que el inventario terminal sea de 4 unidades o menos.

+ Inventario terminal = 2 + 7 (pedido) - 3 (demanda) = 6.

TABLA 16-12
Resultados de la simulación de inventarios

Política			
Q	*R*	*Costo promedio anual de ordenar y conservar*	*Número promedio anual de faltantes*
3	3	$436	21.8
	4	463	22.5
	5	492	18.4
	6	506	17.9
	7	533	14.0
4	3	420	15.1
	4	471	9.5
	5	505	9.8
	6	532	5.6
	7	563	7.5
5	3	389	13.2
	4	447	7.6
	5	492	5.2
	6	532	5.6
	7	590	2.6
6	3	386	9.1
	4	433	5.2
	5	492	4.2
	6	548	2.1
	7	584	1.7
7	3	383	8.8
	4	433	5.2
	5	477	3.8
	6	541	2.2
	7	591	1.0
8	3	384	8.4
	4	430	5.1
	5	488	3.3
	6	540	1.6
	7	588	0.8
9	3	401	7.1
	4	440	4.4
	5	496	2.4
	6	543	1.1
	7	600	0.3
10	3	404	5.8
	4	450	4.3
	5	500	2.5
	6	551	1.5
	7	610	0.6

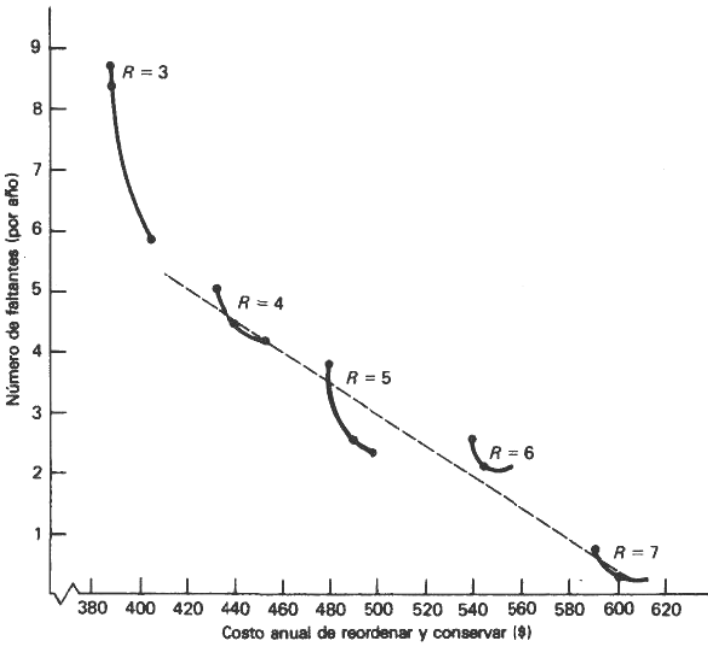


FIGURA16-8
Resultados referentes al punto de reorden.

que se agregó muestra una pendiente hacia abajo de $40 por faltante. El administrador de la tienda tiene que decidir cuánto desea gastar para reducir los faltantes a menos de 8.8 que da el costo mínimo.

La principal ventaja de este tipo de simulación es que permite a la administración explorar distintas políticas dentro del laboratorio de matemáticas.

SIMULACIÓN DE TOMA DE DECISIONES HUMANAS

Un área de aplicación importante que está en crecimiento se refiere a la simulación de la toma de decisiones humanas. Éste no es un campo nuevo. Por ejemplo, las personas han tratado siempre de desarrollar máquinas que puedan jugar. El desarrollo de las computadoras ha estimulado este interés hasta el punto en que una computadora es invencible jugando damas y muy buena (aunque no perfecta) en ajedrez. No obstante, puede obtenerse algo más que diversión.

Si un tomador de decisiones (grupo o individuo) toma decisiones repetitivas bajo las mismas circunstancias, es posible simular el proceso de decisión. En tales casos, la mayoría de los tomadores de decisiones utilizan una especie de modelo mental al tomar sus decisiones. El modelo puede hacerse explícito mediante entrevistas y después formularse en términos lógico-matemáticos. Entonces, puede aplicarse el modelo para tomar las decisiones, quitándole la tarea al tomador de decisiones.

El objetivo de este tipo de simulación no es obtener información sino automatizar lo que actualmente es un proceso manual. Esto implica una secuencia distinta de pasos en el proceso de simulación. En lugar de dise-

ñar, realizar y evaluar un experimento, se debe validar cuidadosamente el modelo. Una vez obtenido un modelo válido, se ha terminado la tarea. Un ejemplo ayudará a aclarar este tipo de aplicación.

Objetivo[3]

Muchos bancos reciben un gran número de sobregiros al día, cheques para los que no hay fondos suficientes. En este ejemplo, el vicepresidente de un banco revisa entre 200 y 400 cheques diarios y decide (1) pagar el cheque, (2) rechazar el cheque o (3) posponer la decisión hasta localizar por teléfono al depositante. El objetivo es construir un modelo que duplique las decisiones hechas por el vicepresidente.

Construcción del modelo

Revisando las decisiones pasadas, entrevistando al vicepresidente y haciéndolo que tomara en voz alta sus decisiones, se identificaron tres factores críticos. Éstos fueron:

1 El saldo de la cuenta
2 La cantidad por la que se giró el cheque
3 La solvencia general del depositante

El saldo de la cuenta era negativo si se habían pagado sobregiros anteriores. Como es menos probable que se recuperen los sobregiros subsecuentes, no se pagaban.

La cantidad por la que se hizo el cheque influye en la selección entre seguirlo procesando y llamar al depositante. Si el cheque era de más de $50 dólares, el vicepresidente se sentía obligado a llamar al depositante. Abajo de $50, se tomaba la decisión de pagar o de no pagar.

La solvencia general del depositante era un juicio subjetivo que hacía el vicepresidente. En lugar de buscar cómo se determinaba este factor, se decidió que el vicepresidente determinara esta característica para cada cuenta y se incluyó como un dato del modelo.

En la figura 16-9 se muestra un modelo del proceso de toma de decisiones. Cuando se recibe un sobregiro, se verifica el saldo de la cuenta. Si el balance es negativo, se rechaza el pago. En caso contrario, se revisa la cantidad en el cheque. Si es por más de $50, se llama por teléfono al depositante. Si es por menos de $50, se consulta la solvencia del depositante. Si ésta es buena, se paga el cheque y si es mala se rechaza.

Validación del modelo

Existen dos enfoques básicos para validar este tipo de modelos de simulación. El primero es usar datos históricos. Los sobregiros que ya han sido procesados por el vicepresidente pueden procesarse en el modelo y compa-

[3] **Este ejemplo es una adaptación de Hugh J. Watson, "Simulating Human Decision Making",** ***Journal of Systems Management,*** **vol. 24, núm. 5 (mayo de 1973), pp. 24-27.**

FIGURA 16-9
Simulación del procesamiento de sobregiros.

rarse cada una de las decisiones. El segundo método es construir un conjunto de sobregiros hipotéticos y procesarlos tanto por el vicepresidente como por el modelo y comparar también las decisiones que resultan. En cualquiera de los casos, el modelo debe coincidir con el vicepresidente en una gran proporción de los casos.

El uso de sobregiros hipotéticos tiene dos ventajas sobre los datos históricos. Está controlado y, además, puede explorarse una lista completa de condiciones posibles. Por ejemplo, sobregiros de $40 en saldos positivos con baja solvencia (rechazo) y aquéllos de $25 en saldos positivos con buena solvencia (pagos).

¿Hasta qué punto debe coincidir el modelo con el tomador de decisiones? Éste es un juicio subjetivo no abierto al análisis estadístico. En general se requiere que coincidan sustancialmente. Para el ejemplo también sería deseable no tener casos en que el modelo diga "pago" mientras que el vicepresidente dice "rechazo". La coincidencia perfecta es difícil de alcanzar en parte porque los tomadores de decisiones humanas no son perfectamente congruentes.

Evaluación de resultados

¿Qué se ha logrado en éste ejemplo, suponiendo que el modelo es válido? Se ha desarrollado un dispositivo para ahorro de trabajo. El modelo puede programarse en la computadora del banco y el proceso de toma de decisiones queda automatizado. El vicepresidente queda liberado de dos a cuatro horas de trabajo tedioso al día. Es importante hacer notar que el modelo sólo duplica lo que el vicepresidente ha venido haciendo. Si el vicepresidente hace decisiones pobres, entonces el modelo también tomará decisiones pobres.

El desarrollo de modelos del tipo que se presentó en este capítulo casi siempre es tardado y costoso. Debe considerarse esto como una inversión y preguntarse si se obtendrá o no un rendimiento razonable sobre esa inversión para cualquier aplicación potencial. Cuando se toman decisiones repetitivas con mucha frecuencia, la respuesta puede muy bien ser sí.

EJEMPLO DE UNA AGENCIA DE RENTA DE AUTOS

Una de las aplicaciones más importantes de la simulación es obtener información para la planeación. Simulando las diferentes operaciones bajo una variedad de ambientes, puede obtener información para seleccionar el plan deseado. En este ejemplo, el administrador de una agencia de renta

de autos quiere saber cuántos autos debe tener disponibles. Esto se explorará simulando las operaciones de la firma usando varios niveles de inventario.

Objetivo

Joe, el administrador, quiere conocer cómo varía la tasa de utilización de los autos cuando se tiene diferente número de autos en almacén. Joe planea dar un enfoque diferente de la renta de autromóviles. En lugar de autos nuevos almacenará autos usados (de 10 años atrás) y los rentará a precios bajos. El negocio será lento durante el primer año. Así, planea que su agencia de renta trabaje tiempo parcial por una temporada.

Basándose en el análisis de costos, Joe ha calculado el punto de equilibrio en términos de la tasa de utilización. La tasa de utilización es el número de días rentados dividido entre el número de días calendario para ese periodo. Joe necesita conocer cómo varía la tasa de utilización con el número de autos en almacén para su demanda anticipada. Con esa información, 1o que hará es almacenar tantos como pueda arriba de su punto de equilibrio.

Diseño del modelo

Es necesario identificar las variables importantes de este problema y obtener información sobre su comportamiento. Para cualquier corrida dada el número de autos almacenados será una constante. La única incertidumbre se relaciona con la demanda de autos. Se tiene que conocer el número de autos que se rentan cada día y la longitud del periodo de renta. Para simplificar la simulación se supondrán siete días por semana de operación y no se incluirá el mantenimiento. Si no se tienen autos disponibles, la renta se pierde.

Supóngase que Joe ha preparado un pronóstico de demanda como el que se muestra en la tabla 16-13. Entonces, puede usarse el modelo que se muestra en la figura 16-10 para cada corrida de simulación.

TABLA 16-13
Demanda estimada de autos de renta

Número de autos demandados por día	*Probabilidad*	*Número de días que se renta el auto*	*Probabilidad*
0	0.4	1	0.3
1	0.3	2	0.2
2	0.2	3	0.1
3	0.1	4	0.1
	1.0	5	0.1
		6	0.1
		7	0.1
			1.0

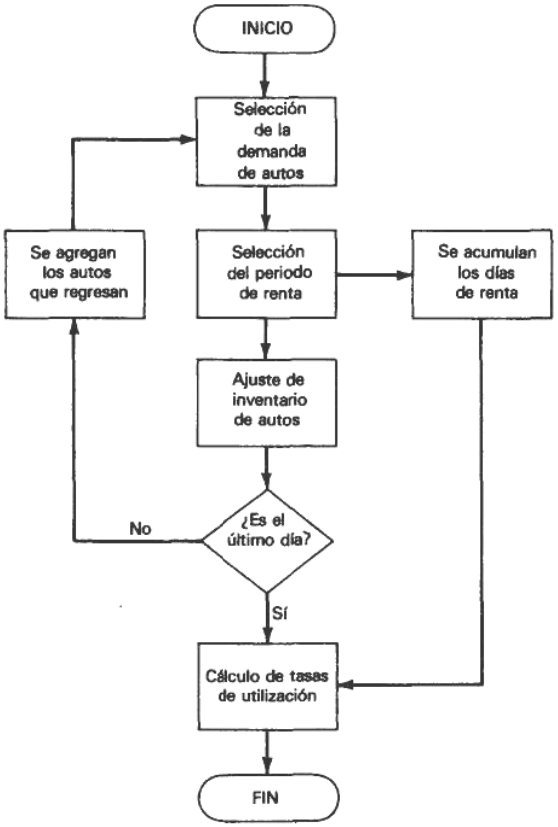


FIGURA 16-10
Modelo de simulación para la renta de autos.

Diseño del experimento

Para proporcionar a Joe la información que desea, se necesitan como 100 corridas de 100 días de duración para cada nivel de almacén considerado. Si Joe quiere analizar niveles de 3 a 10 autos, esto significa 800 corridas de 100 días cada una, o sea, 80 000 días simulados. Si se pudiera hacer esto manualmente con un promedio de 4 días por minuto, tomaría 20 000 minutos, o 333 horas. Sin embargo, con una computadora esto puede hacerse en minutos.

Realización del experimento

Se usarán intervalos de tiempo fijo de 1 día. Para generar la demanda diaria y los periodos de renta, se necesita el proceso de Monte Carlo usando el método tabular (véase la tabla 16-14). En la tabla 16-15 se dan los resultados de 15 días de operación usando un nivel de inventario de 4. Al realizar la simulación, se supuso que los autos se regresaban y se rentaban al principio del día.

TABLA 16-14
Procesos de Monte Carlo para la demanda de carros

a Número de autos demandados

Demanda, autos por día	*Probabilidad*	*Probabilidad acumulada*	*Intervalos de números aleatorios*
0	0.4	0.4	1-4
1	0.3	0.7	5-7
2	0.2	0.9	8-9
3	0.1	1.0	0

b Longitud de los periodos de renta

Periodo, días	*Probabilidad*	*Probabilidad acumulada*	*Intervalos de números aleatorios*
1	0.3	0.3	1-3
2	0.2	0.5	4-5
3	0.1	0.6	6
4	0.1	0.7	7
5	0.1	0.8	8
6	0.1	0.9	9
7	0.1	1.0	0

TABLA 16-15
Resultados para un almacén de cuatro

Día	*Inventario inicial*	*Número aleatorio*	*Demanda*	*Número aleatorio*	*Periodo de renta**	*Días acumulados de uso*
1	4	5	1	4	2(3)	2
2	3	4	0	-	-	2
3	4	6	1	6	3(6)	5
4	3	1	0	-	-	5
5	3	1	0	-	-	5
6	4	8	2	2	1(7)	6
				0	7(13)	13
7	3	7	1	1	1(8)	14
8	3	8	2	7	4(12)	18
				5	2(10)	20
9	1	6	1	9	6(15)	26
10	1	1	0	-	-	26
11	1	5	1	7	4(15)	30
12	1	4	0	-	-	30
13	2	2	0	-	-	30
14	2	0	0	-	-	30
15	4	9	2	1	1(16)	31
				3	1(16)	32

*El número entre paréntesis muestra el día en que el auto será devuelto.

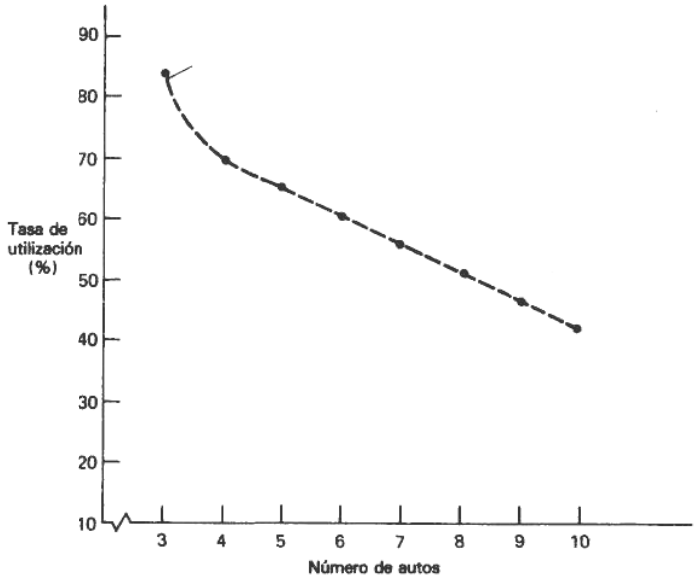


FIGURA 16-11
Resultados de la simulación de la renta de autos.

Evaluación de los resultados.

Para la pequeña corrida de la tabla 16-14, la utilización tue de:

$$\frac{\text{32 días de uso}}{\text{4 autos x 15 días}} = 53\%$$

Se llevó a cabo un experimento más complicado con una computadora. Las corridas de prueba de 100 días de longitud se repitieron 100 veces para cada nivel de inventario. En la figura 16-11 se granearon los promedios que resultaron. Esta información sería útil para determinar el número máximo de autos que se deben almacenar.

EXPERIENCIAS DEL MUNDO REAL

En vista de la naturaleza general de la simulación y de la disponibilidad de las computadoras, sería de esperarse que tuviera una amplia aplicación. Esto, sin duda, es cierto y las aplicaciones aumentan con rapidez. En seguida se presenta una breve muestra de las aplicaciones de gran escala con propósitos ilustrativos.

Sistemas de colas

La compañía Xerox usó una simulación de sistemas de colas para analizar la eficacia del servicio proporcionado por su duplicadora modelo 9200.[4] Las

[4] W. H. Bleuel, "Management Science's Impact on Service Strategy", *Interfaces,* vol. 6, núm. 1, parte 2 (noviembre de 1975). pp. 4-12.

llamadas de mantenimiento de urgencia y las de mantenimiento preventivo regular "llegan" en forma aleatoria a la unidad de servicio técnico representativo local. Con una simulación de este sistema, la Xerox exploró varios tamaños de unidades de servicio desde 1 hasta 5 personas (representantes técnicos). Encontraron que las unidades de 3 técnicos serían más eficaces que las de 1 que habían venido usando.

Sistemas de inventarios

El banco de sangre de un hospital tiene un problema de inventarios difícil debido a la aleatoriedad de la demanda, a que se trata de un bien perecedero y a la alta penalización por no tener inventarío. Se ha usado simulación para permitir al hospital explorar las diferentes políticas de inventarios en un esfuerzo para encontrar la política más eficaz.[5]

Juegos

La simulación es la base de muchos juegos de negocios usada en las escuelas de administración de empresas en programas de entrenamiento. Se han construido modelos de firmas y de industrias completas que permiten insumos externos para ciertas variables como el precio del producto. Los jugadores introducen sus decisiones, se corre el modelo para el siguiente periodo y se dan los resultados a los jugadores para otro ciclo de decisión.[6]

Toma de decisiones humanas

Otra aplicación de la simulación es para imitar los procesos de toma de decisiones de un individuo o un grupo. Por ejemplo, se construyó un modelo de simulación para imitar el proceso por medio del cual la ciudad de Pittsburgh alteró los reglamentos de zonificación con objeto de satisfacer nuevas necesidades. En este tipo de simulación no se busca la optimación, ni siquiera las mejoras. Más bien se trata de automatizar un proceso humano. El modelo de Pittsburgh se juzgó exitoso, porque en la mayoría de los casos la decisión tomada fue la misma que la de los participantes humanos.[7]

Planeación

Muchas compañías grandes han desarrollado modelos de pleneación corporativa para ayudar a su toma de decisiones. Dichos modelos están construidos con las especificaciones particulares de la firma y pueden ser sencillos o bastante complejos. Conceptualmente son similares a los modelos

[5] John B. Jennings, "Blood Bank Inventory Control", *Management Science,* vol. 19, núm. 6 (febrero de 1973), pp. 637-645.

[6] Véase por ejemplo, G. L., Gibbs, *Handbook of Gantes and Simulation Exercises* (Beverly Hills, Calif.: Sage Publications, 1974).

[7] Otto A. Davis y Frederick H. Reuter, "A Simulation of Municipal Zoning Decisions", *Management Science,* vol. 19, núm. 4, parte 2, pp. 39-77.

de simulación utilizados en juegos de negocios. En 1974, una investigación de las grandes corporaciones encontró que el 73 % de la muestra estaba aplicando modelos de este tipo.[8]

Lenguajes de simulación en computadoras

Casi cualquier lenguaje de programación de una computadora se puede emplear para programar una simulación. Si alguien va a realizar un solo experimento en un modelo pequeño, usará sin duda el lenguaje con que esté más familiarizado. Sin embargo, lenguajes comunes como el FORTRAN o el BASIC, requieren de rutinas especiales para generar valores de variables aleatorias y analizar los resultados. Existen algunos lenguajes de simulación que ofrecen rutinas integradas para estas tareas. Dos ejemplos son el SIMSCRIPT y el GPSS (General Purpose Simulation System).[9]

Limitaciones de la simulación

La simulación comparte algunas limitaciones que son inherentes a las técnicas analíticas. Deben simplificarse las suposiciones sobre el mundo real y esto puede conducir a resultados erróneos. También es necesaria la cuantificación de las variables que se van a incluir. Además, se incurre en costos al aplicar la simulación. Los beneficios recibidos deben exceder los costos, si se quiere justificar la simulación.

Dos limitaciones únicas de la simulación son el hecho de que es experimental y que la mayoría de las simulaciones debe hacerse a la medida, es decir, para el caso específico. Siendo de naturaleza experimental, la simulación no proporciona soluciones óptimas, meramente resultados del experimento. La naturaleza específica de la mayoría de las simulaciones aumenta los costos. Se requiere tiempo para diseñar el modelo y el experimento. Una vez aplicada, quizás ya no se vuelva a utilizar. De hecho, tal vez tenga que justificarse una simulación para un solo uso.

A pesar de estas limitaciones, se espera que el uso de la simulación en los negocios siga aumentando.

RESUMEN

La simulación es un método para realizar experimentos que emplean modelos lógico-matemáticos. El procedimiento de simulación requiere una secuencia de cinco pasos: (1) definición de los objetivos; (2) diseño del modelo; (3) diseño del experimento; (4) realización del experimento, y (5) evaluación de los resultados. Como es experimental, la simulación conduce a resultados estadísticos más que a soluciones óptimas.

[8] Thomas H. Naylor y Horst Schauland, "A Survey of Users of Corporate Planning Models". *Management Science,* vol. 22, núm. 9 (mayo de 1977), pp. 927-937.

[9] Véase P. J. Kiviat, R. Villanueva y H. M. Markowitz: *The Sinucrtpt II Programming Language* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1968); y Thomas J. Schriber, *Simulation Using GPSS* (New York: Wiley, 1974).

El proceso de Monte Carlo se usa con frecuencia en simulación para generar valores de una variable aleatoria. Monte Carlo es un proceso de dos pasos que incluye (1) la selección de números aleatorios con distribución uniforme y (2) la transformación de los números aleatorios en un valor correspondiente de la variable deseada. Se dispone de tres métodos de transformación: el gráfico, el matemático y el tabular.

La simulación es un método más general que las otras técnicas presentadas en este texto. Se requiere creatividad, imaginación y habilidad técnica para llevar a cabo una simulación eficaz. Se presentan ejemplos de colas, inventarios, toma de decisiones humanas y de una agencia de renta de autos, con el fin de mostrar la variedad de aplicaciones de la simulación. Aunque en este capítulo se hace hincapié en la simulación manual, la mayoría de las aplicaciones son económicas sólo con una computadora.

La prueba última de la simulación es el hecho de que la información que proporciona sea más valiosa o no que el costo de realizarla.

EJERCICIOS

Monte Carlo

16-1 Apliqúese la técnica de Monte Carlo para generar 20 valores para la siguiente variable aleatoria:

X	2	4	6	8	10
p(X)	0.1	0.15	0.3	0.2	0.25

16-2 Se estima que el precio que puede cobrar un competidor por un nuevo producto puede ser de $6 a $10 en incrementos de $1. Si todos los precios son igualmente probables, genérense 10 precios que puedan usarse en una simulación.

16-3 Una firma estudia cuidadosamente sus costos para preparar 100 cartas de negocios y llega a la siguiente distribución:

Costo, $	*Frecuencia*
1.00	1
1.50	1
2.00	4
2.50	8
3.00	15
3.50	20
4.00	30
4.50	16
5.00	5

Aplíquese la técnica Monte Carlo para generar 20 costos de cartas para usarse en simulación.

16-4 Las llegadas a la taquilla de un cine durante la media hora anterior a la hora de inicio programada tiene la distribución que se da en se-

guida. Aplíquese el método Monte Carlo para generar las primeras 20 llegadas.

Tiempo entre llegadas, segundos	*Probabilidad*
20	**0.3**
40	**0.25**
60	**0.15**
80	**0.15**
100	**0.1**
120	**0.05**

¿Cuál es el tiempo promedio entre llegadas para la distribución dada? ¿Y para las llegadas generadas?

16-5 Un equipo de estudiantes visitó una cafetería de autoservicio durante la hora del almuerzo para reunir datos sobre las tasas de llegadas. Sus datos mostraron:

Tasa de llegadas, clientes/minuto	*Frecuencia*
2	**12**
4	**18**
6	**21**
8	**20**
10	**17**
12	**12**

Genérense las primeras 20 llegadas, incluyendo la hora de llegada para cada una. Si existen llegadas múltiples dentro de una minuto, deben quedar igualmente espaciadas durante el intervalo del 1 minuto

16-6 La demanda semanal de artículos en inventario tiene la distribución que se muestra en seguida. Genérese la demanda de 10 semanas con la técnica de Monte Carlo.

Demanda, unidades	*Probabilidad*
10	**0.1**
15	**0.15**
20	**0.3**
25	**0.25**
30	**0.2**

16-7 Los datos empíricos de la demanda semanal de la marca X se muestran en seguida. Con la técnica de Monte Carlo, simúlese la demanda semanal para las siguientes 13 semanas. Muéstrense los intervalos de números aleatorios que se usen y los números aleatorios seleccionados para cada semana.

Demanda	*Número de semanas que se recibe esta demanda*
100	10
300	21
500	32
700	15
900	10
1 100	8
1300	4

16-8 La División de Seguridad de Tráfico del Estado quiere experimentar con varios métodos de control de tráfico en una intersección específica. Para esto necesita simular la llegada de autos a la intersección. El conteo del tráfico real en la intersección dio los siguientes datos:

Tiempo entre llegadas, segundos	*Probabilidad*	*Dirección*	*Probabilidad*
5	0.3	Norte	0.5
10	0.25	Sur	0.3
15	0.2	Este	0.15
20	0.15	Oeste	0.05
25	0.05		
30	0.05		

Genérense las primeras 10 llegadas a la intersección incluyendo tanto el tiempo de llegada como la dirección. ¿Qué suposición se debe hacer para generar las llegadas?

16-9 Se sabe que una variable aleatoria tiene distribución normal con media de 34 y desviación estándar de 2. Aplíquese la técnica de Monte Carlo (tabular) para generar 20 valores de esta variable. ¿Cómo se comparan los valores obtenidos con la distribución deseada?

16-10 Con el método tabular genérense valores de una variable aleatoria con distribución normal con media 12 y desviación estándar de 1.5.

16-11 Genérense cinco valores aleatorios para una variable distribuida normalmente con una media de 8 y una desviación estándar de 1.2. Aplíquese la fórmula de aproximación para valores normales dada en el texto.

Simulación

16-12 El doctor Pill comienza sus horas de consulta el martes a las 8:30 a.m. Los pacientes están programados a intervalos de 15 minutos hasta las 11 a.m. En la tarde se dan citas desde la 1 p.m. con la última a las 4 p.m. Las llamadas de urgencia se programan para las

4:30 p.m. (si esto no es aceptable, se mandan al hospital de la localidad). El doctor Pili vive a 30 minutos de su oficina. El 95 % de los pacientes del doctor Pili llegan a la hora de su cita o antes (el otro 5% llega 15 minutos tarde). La mayor variación ocurre en el tiempo que tarda el doctor Pili con los pacientes. Se sabe que éste tiene una distribución como la siguiente:

Tiempo de consulta, minutos	*Probabilidad*
5	**0.1**
10	**0.2**
15	**0.3**
20	**0.2**
25	**0.1**
30	**0.1**

El 40 % del tiempo no hay llamadas de urgencia; la mitad del tiempo se programa una llamada y el 10 % restante dos. Simúlese el día de trabajo del doctor Pili. ¿Llega a su casa las 5:30 p.m.?

16-13 El aeropuerto municipal Mid-City se enfrenta al problema de que tal vez se duplique su tráfico de aviones. En la actualidad su única pista es suficiente para manejar el tráfico en forma satisfactoria, pero las autoridades se preguntan si será necesaria otra pista. Durante los periodos pico, los despegues y aterrizajes ocurren con las siguientes probabilidades:

Tiempo entre despegues y aterrizajes, minutos	*Probabilidad*
5	**0.1**
6	**0.2**
7	**0.3**
8	**0.2**
9	**0.1**
10	**0.1**
	1.0

Un aterrizaje o un despegue se llevan 4 minutos. El Mid-City no quiere más de cuatro aviones esperando acceso a la pista. Simúlese 1 hora de demanda pico, suponiendo que la tasa de tráfico de hecho se duplica. Con base en la simulación, ¿necesita el aeropuerto otra pista?

16-14 Jim tiene dos maneras de llegar a su trabajo. Puede: (*a*) tomar el autobús o *(b)* manejar hasta un estacionamiento y después caminar su oficina. Con la distribución que sigue (el tiempo está en minutos), simúlense 10 viajes para cada alternativa. Evalúense los resultados. Muéstrese el proceso de Monte Carlo y los números aleatorios.

En autobús a la oficina		*En mito al estacionamiento*	
Tiempo	*Probabilidad*	*Tiempo*	*Probabilidad*
25	*0.50*	*20*	*0.40*
30	*0.25*	*25*	*0.40*
35	*0.15*	*30*	*0.10*
40	*0.10*	*35*	*0.10*

Caminando a la oficina	
Tiempo	*Probabilidad*
2	**0.15**
4	**0.75**
6	**0.10**

16-15 Tom quiere experimentar con una política de inventario de cantidad fija, punto de reorden para triciclos de adultos. Sabe los siguiente:

Costo por faltante:	$25
Costo por mantener:	$1.50 por unidad por semana
Costo por ordenar:	$15
Inventarío inicial:	4

La demanda y el tiempo de entrega tienen las siguientes distribuciones:

Demanda semanal	*Probabilidad*	*Tiempo de entrega, semanas*	*Probabilidad*
0	**0.3**	**1**	**0.2**
1	**0.4**	**2**	**0.5**
2	**0.2**	**3**	**0.2**
3	**0.05**	**4**	**0.1**
4	**0.05**		

Simúlense 20 semanas de operación usando una cantidad de reorden de 2 unidades y un punto de reorden de 3. Muéstrense los procesos de Monte Carlo y los números aleatorios.

16-16 Tom y Bill están tratando de desarrollar un juego de béisbol para niños diseñado para dos jugadores (un lanzador y un bateador). El lanzador puede escoger uno de cuatro lances: bola rápida, bola baja, curva o cambio de velocidad. El bateador puede seleccionar uno de tres bateos: rápido, normal o lento. Integrado al juego pero desconocido para los jugadores, se tendrá la siguiente tabla de resultados fijos:

	Lance			
Bateo	*Bola rápida*	*Bola baja*	*Curva*	*Cambio de velocidad*
Rápido	Home run	Out	Out	Out
Normal	Out	Doble	Sencilla	Out
Lento	Out	Out	Out	Triple

Para que el juego sea siempre interesante, un proceso aleatorio invertirá el resultado de un lance de *out* a *hit* (o de hit a out), en promedio, una de cada cuatro veces. Así, por ejemplo, un bateo *lento* para una *bola baja* obtendría un doble si el resultado se invirtiera. Cada jugador obtiene tres outs y marca carreras sólo cuando hay corredores en las bases.

Para hacer una prueba inicial, Tom y Bill deciden jugar tres entradas seleccionando en secuencia las opciones. Es decir, los lances siempre se hacen en orden: bola rápida, bola baja, curva y cambio de velocidad. De la misma manera, los bateos serán primero rápido, después normal y después lento. Tom bateará primero. Juéguense las primeras tres entradas para Tom y Bill. ¿Quién gana?

16-17 Un vendedor que ofrece revistas de puerta en puerta ha experimentado los siguientes resultados:

La probabilidad de que abran la puerta:	30%
Si abrieron, la probabilidad de que sea mujer:	80%
la probabilidad de que sea hombre:	20%
La probabilidad de venta, si es mujer:	15%
si es hombre:	25%

Cuando se hace la venta, el número de suscripciones que se ordenan tiene la siguiente distribución:

	Probabilidad	
Suscripciones	*Mujer*	*Hombre*
1	0.6	0.1
2	0.3	0.4
3	0.1	0.3
4	—	0.2

La ganancia por cada suscripción vendida es $2. Simúlense 25 llamadas a la puerta y determínese la ganancia total. Muéstrense los procesos de Monte Carlo y los números aleatorios.

16-18 El profesor Winn ha desarrollado para sus estudiantes un juego de negocios muy sencillo, aunque en apariencia complicado. El juego incluye sólo dos compañías completas con índices de actividad económica, fórmulas de porcentajes de mercado y ecuaciones de costo y ganancia. Cada compañía selecciona uno de dos precios, $1 o $2.

Los jugadores desconocen que el precio que seleccione cada uno determina la ganancia que tendrá para ese período, en la forma en que se muestra en seguida:

Precio		*Ganancia*	
Firma A	*Firma B*	*Firma A*	*Firma B*
\$1	\$1	\$10 000	\$10 000
\$1	\$2	0	20 000
\$2	\$1	20 000	0
\$2	\$2	5 000	5 000

Para probar el juego, simúlense 20 períodos con las siguientes probabilidades para cada firma:

Firma	*Precio*	*Probabilidad*
A	**\$1**	**0.3**
	2	**0.7**
B	**\$1**	**0.5**
	2	**0.5**

¿Cuáles son las ganancias acumuladas para cada compañía?

16-19 Los jugadores del juego del profesor Winn en el problema anterior quisieran verse influidos por la selección del competidor. Supóngase que los dos jugadores hacen las siguientes selecciones:

Prueba:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
Firma A:	1	2	2	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	2
Firma B:	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2

a Constrúyase un modelo de simulación como el del problema anterior y pruébese el modelo para 20 periodos. ¿Qué proporción de las decisiones de cada jugador se duplica en el modelo?

b Analícense las decisiones hechas por cada compañía para determinar quién es el líder y quién el seguidor. ¿Qué firma busca cooperación? ¿Cómo se relaciona esta situación con el mercado oligopólico?

16-20 Los datos siguientes corresponden a una parte de una red de PERT. Supóngase para este ejercicio que constituyen la red completa.

	Tiempo, días		
Actividad	*Mínimo*	*Más probable*	*Máximo*
1,2	1	6	11
1,3	13	14	15
2,3	1	7	13
2,4	10	16	22
3,4	14	15	16

a Dibújese la red de PERT. Encuéntrese la ruta crítica y determínese la probabilidad de terminar el proyecto en 30 días.

b Aplíquese simulación para estimar la probabilidad de terminar el proyecto en 30 días. Háganse 30 pruebas registrando en cada prueba la ruta más larga (crítica) y el tiempo total del proyecto. Para simplificar la simulación úsese la distribución normal para aproximar la distribución beta de cada actividad. Con base en la simulación, ¿cuál es la probabilidad de terminar el proyecto en 30 días?

c ¿Cómo se explica la diferencia entre los resultados de (*a*) y *(b)?*

ESTUDIO DE UN CASO: PERO, ¿SE OBTENDRÁ UNA GANANCIA?

Presidente: Señores, el desarrollo de nuestro nuevo XL-250 ha alcanzado el punto en que debemos tomar una decisión sobre la producción. Por supuesto, la cuestión clave es: ¿se obtendrá una ganancia?
Comercialización: Pienso que la demanda puede estimarse bastante bien basándonos en nuestros estudios. Esperamos en promedio 6 000 unidades. Estadísticamente, estimamos una desviación estándar de 700 unidades. Es decir, existe una probabilidad del 67% de que las ventas caigan dentro de 5 300 y 6 700 unidades.
Producción: Para producir el XL-250, necesitamos alguna maquinaria nueva, una persona más en mantenimiento y la relocalización de algunas estaciones de trabajo existentes. He costeado cuidadosamente estas necesidades y ascienden a un total de $100 000 de costos fijos. Diría que hay 50% de posibilidades para los $100 000 y 25% para $98 000 o para $102 000.
Presidente: Hmmmmm. ¿Qué sucede con el costo variable?
Contabilidad: Después de consultar a nuestros departamentos de ingeniería y producción, hemos llegado a un costo esperado entre $24 y $26. Digamos que existe el 50 % de las posibilidades para $25 y 25 % tanto para $24 como para $26.
Comercialización: Eso parece bien porque podremos cobrar alrededor de $50 por unidad del XL-250. Para ser más preciso, un pronóstico de $50 con un 50% de posibilidades y una probabilidad del 25% para $49 o $51.
Presidente: Veo que todos ustedes han tomado recientemente cursos de es-

tadística. Si uso sus figuras promedio, tendremos una ganancia de $50 000 en el XL-250. Pero, podríamos perder dinero si quedamos en el lado bajo de sus estimaciones.

Experto en investigación de operaciones: Señores, permítanme elaborar una simulación para ustedes. Les ayudará a tomar una decisión.

Constrúyase un modelo de simulación para este problema, háganse 20 corridas y analícense los resultados.

BIBLIOGRAFÍA

Bleuel, W. H.: "Management Science's Impact on Service Strategy". *Interfaces,* vol. 6, núm. 1, parte 2 (noviembre 1975), pp. 4-12.

Boulden, James B.: *Computer-Assisted Planning Systems* (New York: McGraw-Hill, 1975).

Davis, Otto A. y Frederick H. Rueter: "A Simulation of Municipal Zoning Decisions", *Management Science,* vol. 19, núm. 4, parte 2, pp. 39-77.

Fourre, James P.: *Quantitative Business Planning Techniques* (New York: American Management Association, Inc., 1970).

Cibbs, C. I.: *Handbook of Gatnes and Simulation Exercises* (Beverly Hills, Calif.: Sage Publications, 1974).

Hamburg, Morris: *Statistical Analysis for Decision Making* (New York: Harcourt, Brace, 1970).

Jennings, John B.: "Blood Bank Inventory Control", *Management Science,* vol. 19, núm. 6 (febrero 1973), pp. 637-645.

Kiviat, P. J., R. Villaneuva y H. M. Markowitz: *The Simscript II* Progf. *"iming Language* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1969).

Meier, Robert C, William T. Newell y Harold L. Pazer.: Simulation in Business and Economics (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1969).

Naylor, Thomas H., y Horst Schauland: "A Survey of Users of Corporate Planning Models", *Management Science,* vol. 22, núm. 9 (mayo 1977), pp. 927-937.

Schriber, Thomas J.: *Simulation Using GPSS* (New York: Wiley, 1974).

Watson, Hugh J.: "Simulating Human Decisión Making" *Journal of Systems Management,* vol. 24, núm. 5 (mayo 1973), pp. 24-27.

Wheelwright, Steven C. y Spyros C. Makridakis: *Computer-Aided Modeling for Managers* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1972).

PARTE SEIS

MANTENIMIENTO DE UNA PERSPECTIVA ADMINISTRATIVA

17

MÉTODOS CUANTITATIVOS EN ACCIÓN

Los administradores y los que trabajan en las ciencias de administración están operando como dos culturas separadas, cada una con sus propios objetivos, lenguajes y métodos.

C. Jackson Grayson, Jr.

PERFIL DEL CAPÍTULO

Objetivos de aprendizaje
Cuándo usar los métodos cuantitativos
Selección del método cuantitativo apropiado
El proceso de desarrollo del modelo
- Información y/o identificación del problema
- Desarrollo del modelo
- Prueba del modelo
- Puesta en práctica del modelo
- Operación del modelo

Obstáculos para el uso de los métodos cuantitativos
- La perspectiva del administrador
- La perspectiva del que trabaja en ciencias de la administración
- Comparación de las perspectivas

Sistemas de información basados en computadoras
- Sistemas de procesamiento de bases de datos
- Sistemas de procesamiento de datos integrados
- Sistemas de información administrativos
- Sistemas de soporte para decisiones
- Ejemplo de un sistema de soporte de decisiones: EIS
- Resumen de la operación de CBIS

Impacto de los métodos cuantitativos
Futuro de los métodos cuantitativos
Resumen Ejercicios
Estudio de un caso: National Tool Co.
Bibliografía

Existen más posibilidades de que los lectores de este libro trabajen en administración que en ciencias administrativas. En consecuencia, parece especialmente apropiado que se cierre este libro con un capítulo que desarrolle una perspectiva administrativa al uso de los métodos cuantitativos. La experiencia ha demostrado que la aplicación exitosa de los métodos cuantitativos depende tanto de las consideraciones administrativas tanto como del conocimiento de las diferentes técnicas.

A pesar del potencial que tienen los métodos cuantitativos para mejorar la operación de la organización, este potencial muy pocas veces se ha realizado por completo. En este capítulo se pone atención en qué puede hacerse para mejorar las posibilidades de que la aplicación de los métodos cuantitativos sea beneficiosa para la administración y la organización.

Un punto de partida lógico es conocer cuándo se deben usar los métodos cuantitativos. No todas las situaciones requieren la aplicación de un modelo. Además, también se tiene que seleccionar el modelo adecuado. La "herramienta" debe servir para los propósitos que se tienen.

Los modelos se crean a través de un proceso de desarrollo del modelo. Los pasos incluyen la identificación de la información necesaria o del problema, el desarrollo del modelo, su prueba, ponerlo en práctica y la operación del modelo. La atención cuidadosa en los detalles del proceso de desarrollo del modelo aumenta las posibilidades de que se cree un modelo útil y apropiado.

Existen obstáculos en el uso de los métodos cuantitativos. Muchos de estos obstáculos son atribuibles al hecho de que los administradores y los científicos de la administración no trabajan lo suficientemente cerca y hacia los mismos objetivos. Como dijo a guisa de crítica C. Jackson Grayson, Jr. "Los administradores y los que trabajan en las ciencias de la administración están operando como dos culturas separadas, cada uno con sus propios objetivos, lenguajes y métodos". Se pretende aquí analizar qué puede hacerse para eliminar o, por lo menos reducir, algunos obstáculos para la aplicación de los métodos cuantitativos.

El uso de los métodos cuantitativos en la mayoría de las organizaciones va aparejado con los sistemas de información basados en computadoras. Los modelos inherentes al sistema pueden hacer mucho para mejorar el funcionamiento del mismo. Por otro lado, un sistema con un alto nivel de operación facilita el uso de los métodos cuantitativos. Es importante entender completamente estas interrelaciones.

Los métodos cuantitativos pueden tener un gran efecto sobre los administradores y la organización. Si no fuera así, no habría razón para usarlos. Se explorarán las formas como los métodos cuantitativos afectan en la actualidad a los administradores y a las organizaciones y qué futuro espera al modelado cuantitativo.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Con el estudio de este capítulo, el lector conocerá:

1 Cuándo se deben aplicar los métodos cuantitativos.
2 Cómo seleccionar el método apropiado.

3 Los pasos en el proceso de desarrollo del modelo.
4 Los obstáculos para aplicar los métodos cuantitativos.
5 Cómo se usan los modelos en sistemas de información basados en computadoras.
6 Los efectos de los métodos cuantitativos en las organizaciones y los ad ministradores.
7 El futuro de los métodos cuantitativos.
8 El significado de los siguientes términos:
Sistemas de procesamiento de bases de datos
Sistemas de procesamiento de datos integrados
Sistemas de soporte para decisiones

CUÁNDO SE DEBEN APLICAR LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS

Hasta este momento ya se conocen bastantes métodos cuantitativos. Este aprendizaje incluye el saber detectar las aplicaciones potenciales, hacer los cálculos necesarios e interpretar correctamente los resultados. Pero, ¿cuándo se deben aplicar estos métodos?

Los métodos cuantitativos pueden usarse ya sea sobre una base *intuitiva* o de manera *explícita.* Primero se considera el uso intuitivo. En este caso el tomador de decisiones pone su atención en los conceptos importantes pero no usa un modelo formal. Como ejemplo, imagínese una situación de líneas de espera. El tomador de decisiones puede entender que los costos del tiempo de espera y de servicio se mueven en direcciones opuestas, cuando se cambia el número de instalaciones de servicio y que un diseño óptimo del sistema minimiza la suma de estos costos. Empleando un proceso subjetivo, el tomador de decisiones puede llegar a un diseño satisfactorio, si no óptimo. Esto se hace sin cuantificar formalmente las tasas de llegadas y de servicio, los costos de espera y de servicio, etc. No obstante, el contacto con los modelos de colas ha influido en el comportamiento del tomador de decisiones, ya que le ha enseñado a poner atención en los factores más importantes.

La decisión de emplear o no explícitamente un método cuantitativo depende sobre todo de las consideraciones de *costo/beneficio.* Cuando los beneficios increméntales derivados del uso de un método exceden los costos increméntales, el método debe aplicarse. Sin embargo, en la práctica, con frecuencia es difícil hacer esta comparación por varias razones. Primero, puede ser difícil estimar los beneficios de antemano. En relación con este punto, puede ser que los beneficios sean difíciles de cuantificar. Por ejemplo, ¿qué valor debe asociarse con la aplicación del análisis de punto de equilibrio? También puede ser difícil la estimación previa de los costos del uso de un método. Existen muchos tipos de costos en que puede incurrirse: de recolección de datos, de construcción del modelo, de prueba del modelo, de computación y otros. En consecuencia, el hecho sencillo de hacer estimaciones de costos puede convertirse en una empresa importante. Aun cuando se haga un esfuerzo para estimar los costos, la estimación puede estar equivocada. A pesar de los problemas asociados con la cuantificación de los beneficios y la estimación de los costos, es importante darse

cuenta de su magnitud al considerar la aplicación de los métodos cuantitativos.

Un director de investigación de operaciones de un importante banco de Boston ha desarrollado un enfoque interesante de las consideraciones de costo/beneficio. Sólo autoriza a su personal a trabajar en proyectos en que los beneficios exceden los costos en razón de 5:1. Aunque éste es tal vez un criterio sumamente rígido, normalmente asegura que el proyecto sea beneficioso aun cuando los beneficios potenciales sean inciertos y los costos puedan estar subestimados.

SELECCIÓN DEL MÉTODO CUANTITATIVO APROPIADO

Junto con la pregunta de si debe o no usarse un método cuantitativo de manera explícita está la interrogante de cuál es el método más apropiado. Una respuesta obvia es aquel para el que los beneficios excedan a los costos esperados. Sin embargo, existen otras consideraciones importantes.

Un factor limitante posible es el de los métodos con que está familiarizado el analista. En la mayoría de los casos, los analistas emplean métodos que ya conocen.

Hasta cierto punto, también es importante qué métodos entiende el usuario. Como ha dicho Francis F. Bradshaw, ex presidente de la Society for the Advancement of Management: "La mayoría de los administradores prefieren vivir con un problema que no pueden resolver que utilizar un método que no entienden".[1]

El método aplicado también debe adecuarse a la situación que se está aplicando. Por ejemplo, el método del transporte de programación lineal no puede aplicarse a todos los problemas de programación lineal. En su lugar, puede emplearse el método símplex.

En algunos casos pueden aplicarse varios métodos, pero debe seleccionarse sólo uno de ellos. Por ejemplo, es potencialmente posible simular el comportamiento de un sistema de colas o usar las fórmulas desarrolladas a partir de un análisis matemático. Muchos factores pueden afectar la decisión de cuál seleccionar. Algunos de los más importantes ya se han descrito y otros se mencionarán después.

Un modelo debe proporcionar la cantidad requerida de poder descriptivo. Por ejemplo, tal vez sólo la simulación del sistema de colas pueda capturar la complejidad del sistema del mundo real. Quizá los clientes que desisten entrar al sistema sea una característica importante del comportamiento del sistema y se deba incluir. Desafortunadamente, casi siempre hay una relación directa entre el costo de emplear un método cuantitativo y su poder descriptivo.

También debe considerarse la cantidad de tiempo disponible antes de llegar a una decisión. Cierto tipo de modelos, como los de simulación, pueden llevar mucho tiempo de desarrollo.

[1] Russel L. Ackoff, "Frontiers of Management Science", *The Bulletin (TIMS)* (febrero de 1971), p. 20.

Es importante también la disponibilidad de datos. La importancia de la situación de toma de decisiones quizá no justifique un esfuerzo extensivo para reunir datos.

Por último, algunos métodos de análisis requieren paquetes de programas y una computadora. Mientras que algunos métodos, como el de análisis de punto de equilibrio, pueden aplicarse manualmente, otros, como programación lineal y simulación, en general requieren del cálculo de una computadora.

PROCESO DE DESARROLLO DEL MODELO

Los modelos no aparecen como por arte de magia para que se usen. En algún momento debe llevarse a cabo un *proceso de desarrollo del modelo* para poderlos aplicar. Tales procesos requieren el esfuerzo unido de muchas personas, los que trabajan en ciencias de la administración, los usuarios, el personal de procesamiento de datos y otros. Aunque muchos sistemas de clasificación diferentes pueden describir el proceso de desarrollo del modelo, para los propósitos que aquí se persiguen, los siguientes pasos proporcionan una descripción útil:

1 Información y/o identificación del problema
2 Desarrollo del modelo
3 Prueba del modelo
4 Puesta en práctica del modelo
5 Operación del modelo

Este proceso en realidad no es directo, como lo podrían implicar los pasos. Es usual que exista retroalimentación en cada paso, lo que puede causar un retroceso al paso anterior. Por ejemplo, la prueba del modelo puede indicar la necesidad de hacer cambios en el modelo que se ha desarrollado hasta ese momento. En la figura 17-1 se ilustra este proceso de desarrollo del modelo que incluye retroalimentación y retrocesos. Se estudiará ahora este proceso paso por paso.

Información y/o identificación del problema

No importa cuán elegante sea el procedimiento de análisis. Si no proporciona la información correcta, el esfuerzo de modelado será un fracaso. Charles J. Hitch del Departamento de Defensa dijo:

> Por experiencia sé que los problemas más difíciles para el analista de sistemas no son los de las técnicas analíticas. De hecho, las técnicas que usamos en la Secretaría de la Defensa son en general sencillas y anticuadas. Lo que distingue a un analista útil y productivo es su habilidad para formular (o diseñar) el problema.[2]

[2] Charles J. Hitch, *Decision-Making for Defense* (Berkeley, Calif.: University of California, 1967), p. 54.

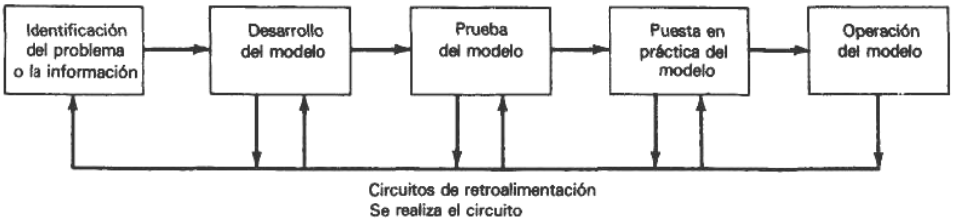


FIGURA 17-1
Proceso de desarrollo del modelo

Una dificultad en la formulación correcta de un problema es identificarlo más que detectar sus síntomas. Por ejemplo, considérese una situación en que consistentemente se retrasa el reparto de pedidos a los clientes. Esto quizá sea un síntoma más que un problema. El problema puede radicar en los pronósticos de la demanda, en el control de inventarios, en la programación de la producción o en los horarios de distribución. Una vez identificado el problema correcto, se podrá usar tal vez un modelo o simplemente cambios en los procedimientos y métodos para ayudar a resolverlo.

Aun cuando aquí se le ha dedicado mucha atención a la presentación de varios métodos cuantitativos, siempre debe tenerse en cuenta que los métodos no son el objetivo por sí mismos. Los que trabajan en las ciencias de la administración no deben ser, como lo describió un alto ejecutivo de una de las corporaciones más grandes de la nación, ". . .portadores divinos de la solución que tratan de hacer contacto con el problema".[3]

Es importante que el usuario y el analista trabajen juntos durante el proceso de desarrollo del modelo. En especial al final de esta primera fase cuando se establecen las especificaciones de salida. El administrador, quien tiene el problema o la necesidad de información, está en la mejor posición para describir lo que se necesita. El que el usuario se incluya, ayuda a asegurar que el modelo que se desarrolle sea el adecuado y que finalmente se use. El mismo director de investigación de operaciones que se mencionó antes sólo emprende proyectos si, mientras dure el proyecto, se incluye en su personal a un miembro del último grupo de usuarios. Así piensa en cuanto a incluir al usuario.

Desarrollo del modelo

Si el paso para identificar la información o el problema sugiere la necesidad de un modelo, se inicia el desarrollo de un modelo apropiado. Ya se ha hablado antes de algunas consideraciones al escoger el modelo correcto. En los capítulos anteriores se han descrito cómo construir y operar diferentes tipos de modelos. Tal vez lo que se necesite aquí sea captar algo de la "riqueza" con que se desarrollan los modelos en la realidad. Para este propósito se empleará un ejemplo de la vida real que ilustra cómo puede quedar incluido el personal en el desarrollo del modelo.

[3] Louis T. Rader, "Roadblocks to Progress in Management Sciences and Operations Research", *Management Science* (febrero de 1965), p. C-l.

Uno de los autores fue contratado recientemente como consultor por una compañía productora de alambre de cobre. La compañía estaba interesada en aplicar programación lineal a la producción del cobre. En particular, la administración quería mezclar los ingredientes usados para producir cobre de tal forma que se minimizaran los costos de producción. Tal vez reconozca aquí el lector la aplicación de programación lineal a la "producción de mezclas".

Las primeras juntas se llevaron a cabo con los que quedarían incluidos o afectados por el proyecto. El personal administrativo estaba ahí. Asistieron los contadores que tendrían que proporcionar el grueso de los datos de costos. Se incluyó a los ingenieros químicos quienes proporcionarían las ecuaciones de la reacción química que asegura que se produce cobre y que éste fluye fuera de la fundidora. Asimismo, el personal de procesamiento de datos que en última instancia tendría que correr el modelo en la computadora de la compañía.

Este enfoque de trabajo en equipo se usó durante todo el proyecto. El consultor proporcionó principalmente dirección y guía más que profundizar en todos los detalles de la construcción del modelo. Al cabo de un tiempo, el consultor pudo salirse del proyecto, seguro de que existía suficiente experiencia y compromiso en el grupo para llevar a la puesta en práctica y la operación exitosa del modelo. Por supuesto, si la compañía hubiera contado con personal interno de ciencias administrativas,' éste se habría comprometido más en los detalles del desarrollo del modelo y hubiera seguido todos los pasos del proyecto.

Prueba del modelo

Existen dos aspectos importantes en la prueba del modelo. El primero es asegurar que proporciona una buena descripción del sistema real. El segundo es comprobar que cumple con las necesidades del usuario.

La exactitud de un modelo se debe verificar en varias formas. La primera es considerar las suposiciones importantes sobre las que se construyó el modelo y la lógica interna del mismo. Se deben examinar de nuevo las suposiciones sobre qué variables son importantes y cómo se relacionan, si las relaciones son lineales o no lineales y qué reglas de decisión se usan en situaciones específicas. Cuando se escriben programas de computadora se deben revisar con cuidado tanto la lógica como la sintaxis del programa.

Se deben comparar las ecuaciones usadas en el modelo con los datos reales. Esto casi siempre requiere métodos estadísticos, como las pruebas *t, F* o la de la chi-cuadrada.

Por último, se debe comprobar la salida del modelo contra la salida del sistema real. Esta es la "prueba acida", por así decirlo, del modelo. Los datos que se usen en la prueba del modelo siempre deben ser distintos de los que se usaron en su construcción.

Otro aspecto importante de la prueba de un modelo es asegurar que cumple con las necesidades del usuario. Es importante proporcionar al usuario una salida del modelo tan pronto como sea posible. De esta mane - ra, los cambios necesarios pueden hacerse con rapidez y sin costo, si es po-

sible. Esto también ayuda a "atraer" el interés continuo del usuario en el proyecto. El obtener pronto versiones pequeñas del modelo puede generar un apoyo para llegar a modelos más comprensibles.

Es de esperarse que la versión inicial de un modelo no se parezca a la final. Casi siempre se requieren cambios. En general existen muchos retrocesos en la identificación de la información o el problema y en el desarrollo y la prueba del modelo.

Puesta en práctica del modelo

Por poner en práctica un modelo se entiende integrarlo al medio organizacional en donde se va a usar. Cuando un modelo se computariza, se debe incluir en el sistema de información basado en computadoras de la organización. Se hablará más sobre este punto más adelante. Debe ponerse atención en asegurar que los datos necesarios para el modelo están disponibles y son de fácil acceso. También ha de proporcionarse la documentación para el modelo y el sistema. Pueden ser necesarios programas de entrenamiento para los usuarios del modelo. No obstante, es deseable que los usuarios se hayan comprometido lo suficiente en el proceso de desarrollo del modelo que se requiera muy poco entrenamiento formal. En esta etapa se hace también cualquier ajuste final al modelo.

Operación del modelo

Un modelo que se ha puesto en práctica por completo está listo para su operación. Es aquí donde se realiza el pago por el desarrollo del modelo. El usuario obtiene la información necesaria para apoyar sus responsabilidades de toma de decisiones.

Después que se ha operado por un tiempo un modelo, con frecuencia surge un problema. Lo que puede suceder es que el modelo se vuelva obsoleto cuando cambia el medio ambiente para el que fue diseñado. Dos cosas, ambas malas, pueden ocurrir a menos que se actualice el modelo. Primero, el modelo puede "ir a dar al archivero" no siendo de ninguna utilidad. Segundo, puede continuar en uso y proporcionar información potencial-mente equivocada. Por supuesto, lo que se requiere es una actualización del modelo. Sin embargo, con frecuencia esto es más difícil de lo que parece, ya que el grupo que construyó el modelo se habrá asignado a otros proyectos y no existe un plan o mecanismo de actualización sencillo. Se hablará más sobre este punto y los remedios posibles cuando se presente el tema de sistemas de información basados en computadoras.

OBSTÁCULOS PARA EL USO DE LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS

Se estima que sólo el 40 % de los proyectos de ciencias de la administración llegan a terminarse con éxito .[4] Se ha tratado de describir cómo deben des-

[4] R. A. Ward, "More Implementation Through an OR/Behavioral Science Partneiship and Management Training", *Operational Research Quarterly* (junio de 1974), pp. 209-217.

TABLA 17-1
Lista de obstáculos según los administradores por orden de importancia

Importancia	*Media*	*Obstáculos*
1	6.51	Los administradores no entienden claramente los beneficios del uso de las técnicas
2	6.04	Los administradores no tienen conocimientos de las técnicas cuantitativas
3	5.80	Los administradores no están expuestos a las técnicas cuantitativas en el principio de su entrenamiento
4	5.79	Los datos requeridos son difíciles de cuantificar
5	5.47	Sólo una minoría de los administradores está entrenado en las técnicas cuantitativas
6	5.43	La administración tiene éxito sin el uso de las técnicas cuantitativas
7	5.39	Los administradores en puestos clave carecen de conocimientos en las técnicas cuantitativas
8	5.33	El costo por el desarrollo de los modelos y el uso de las técnicas es muy alto
9	4.85	Los datos requeridos para el uso de las técnicas no están disponibles
10	4.56	Los administradores no están orientados cuantitativamente
11	4.32	Los que se han graduado de las universidades recientemente con entrenamiento cuantitativo todavía no llegan a ocupar puestos de influencia
12	4.17	Los administradores no quieren ni pueden usar la computadora para la toma de decisiones o las computadoras no están disponibles
13	4.16	El gasto de emplear especialistas en métodos cuantitativos es muy grande
14	3.93	El personal veterano en administración no apoya al personal administrativo joven para usar las técnicas
15	3.92	La administración desconfía y teme el uso de las técnicas

arrollarse los modelos, pero parece útil explorar por qué algunos esfuerzos de modelado fracasan. Un enfoque útil es considerar el problema tanto desde la perspectiva de la administración como desde la de las ciencias administrativas. Cada uno tiene puntos de vista únicos sobre el problema. Primero se observará desde el punto de vista del administrador o del usuario.

La perspectiva del administrador

Green, Newsom y Jones estudiaron en 1977 datos reunidos que proporcionan puntos de vista interesantes sobre la perspectiva del administrador en cuanto a los obstáculos para el uso de los métodos cuantitativos.[5] Pidieron a los gerentes de producción o equivalentes que ponderaran los obstáculos más importantes para la utilización de las técnicas cuantitati-

[5] Thad B. Creen, Walter B. Newsom y S. Roland Jones, "A Survey of the Application of Quantitative Techniques to Production/Operations Management in Large Organizations", *Academy of Management Journal* (diciembre de 1977), pp. 669-676.

vas. Se les pidió que midieran la importancia de cada obstáculo en una escala de 10 puntos, desde 1, para no importante, hasta 10, para muy importante. Los resultados del estudio se muestran en la tabla 17-1.[6] En esta tabla se ordenaron los diferentes obstáculos por su importancia. Es interesante notar que la mayoría de las barreras importantes tienden a ser de naturaleza educativa. Otros obstáculos graves incluyen el costo del uso de las técnicas y la dificultad para cuantificar los datos.

Perspectiva del que trabaja en ciencias de la administración

En 1979 Watson y Marett investigaron a los miembros no académicos del Institute of Management Science (TIMS) y de la Operations Research Society of America (ORSA) en cuanto a los obstáculos para el uso de los métodos cuantitativos.[7] Todos ellos practicaban las ciencias de la administración y proporcionaron la segunda perspectiva que aquí se busca. Se pidió a los encuestados que dieran una lista de los tres problemas más importantes en el uso de los métodos cuantitativos en sus organizaciones. Del análisis de las respuestas se encontró que los problemas se podían clasificar en 10 categorías. En la tabla 17-2 se muestran los resultados del estudio. En esta tabla se ordenaron los problemas u obstáculos por el porcentaje de encuestados que los mencionó.

Encabezando la lista se encuentra el problema de vender la idea de una técnica de las ciencias administrativas al administrador. Relacionado con este primer problema se encuentra el segundo más importante: ni la alta ni la media administración tiene la base educativa que les permita apreciar las técnicas de las ciencias administrativas. Si la administración no entiende las técnicas, es lógica la dificultad para convencerlos de que se deben usar. Otra queja se refiere a la falta de datos seguros y limpios que puedan usarse en los modelos. Las restricciones de tiempo y la falta de entendimiento de los usuarios también tuvo un alto porcentaje entre los que practican las ciencias de la administración.

Comparación de las perspectivas

Tanto la administración como las ciencias de la administración están de acuerdo en que muchos obstáculos para el uso de los métodos cuantitativos es de índole educativa. Desafortunadamente estos obstáculos no pueden eliminarse con rapidez. Lleva tiempo subir la escalera organizacional, muchos altos y medios administradores fueron educados en la década de los 60 cuando el entrenamiento cuantitativo apenas comenzaba a incluirse en el curriculum de las escuelas de administración. Por otro lado, no todos los administradores recibieron educación en administración. En consecuencia, muchas organizaciones no cuentan con el medio ambiente óptimo para la aplicación de los métodos cuantitativos, ya que muchos al-

[6] *Ibid, p. 673.*

[7] *Hugh J. Watson y Patricia Gilí Marett, "A Survey of Management Science Implementation Problems", Interfaces (agosto de 1979), pp. 124-128.*

TABLA 17-2
Lista de obstáculos según los científicos de administración por orden de Importancia

Importancia	*Porcentaje*	*Obstáculos*
1	35	La venta de la idea de las técnicas de las ciencias administrativas se encuentra con resistencia
2	34	Ni la alta ni la media administración tienen bases educativas para apreciar las técnicas de las ciencias administrativas
3	32	La falta de datos buenos y limpios
4	23	Nunca hay tiempo de analizar un problema real con un método complicado
5	22	La falta de entendimiento por parte de quienes necesitan usarlas
6	19	Los problemas para las aplicaciones son difíciles de definir
7	16	El rendimiento del uso de métodos complicados es insuficiente
8	12	Carestía de personal
9	11	Una reputación pobre de los que trabajan en ciencias de la administración en cuanto a resolver problemas
10	10	La gente se siente amenazada por las ciencias administrativas y sus técnicas

tos ejecutivos no entienden ni aprecian su valor potencial. A través del tiempo se han solucionado muchos de estos problemas educativos. Esto traerá como resultado a más administradores que reciben entrenamiento cuantitativo en las universidades o por medio de un creciente número de programas de desarrollo ejecutivo que se están impartiendo.

Parece que la administración y las ciencias de la administración coinciden menos en algunos otros puntos importantes. Los administradores se quejan de que los métodos de las ciencias administrativas requieren demasiados datos de entrada y que su aplicación es muy costosa. Los que practican las ciencias de la administración lamentan la falta de buenas fuentes de datos y el no tener suficiente tiempo para analizar un problema con un enfoque complicado. Existe una diferencia obvia en la perspectiva de los dos grupos.

La diferencia de los enfoques puede deberse a que los que se dedican a las ciencias administrativas no siempre entienden las necesidades de información de los administradores. En muchos casos la administración sólo quiere un análisis "rápido e informal". Un análisis de este tipo debe ser rápido, poco costoso y proporcionar una cantidad razonable de información. Los de ciencias administrativas, por su parte, se inclinan con frecuencia a procedimientos de análisis más elegantes. A veces les es difícil usar métodos relativamente poco complicados cuando se conocen otros más avanzados.

Un buen enfoque usado por un creciente número de personas en las ciencias administrativas es desarrollar en un principio un modelo sencillo y extenderlo conforme se necesite. Miles Waugh, gerente de ciencias administrativas en Phillip Morris, U.S.A., lo dice de la siguiente forma:

Al desarrollar modelos de planeación resulta bueno pensar en grande pero comenzar en pequeño. Los costos iniciales deben minimizarse hasta que puedan demostrarse los beneficios de un modelo a través de algunos resultados concretos. Debe evitarse la tendencia inicial natural a incorporar todo lo que uno pueda pensar.

SISTEMAS DE INFORMACIÓN BASADOS EN COMPUTADORAS

Un sistema de información basado en computadoras requiere personal, computadora y otros equipos de procesamiento de datos para convertir los datos en información. Aunque esta definición es correcta, no capta ni refleja la variedad de sistemas de información basados en computadoras (CBIS) que existen. Lo que es más fundamental, estos sistemas pueden variar en términos de su (1) *tecnología de software y hardware* y (2) *nivel de operación.* La tecnología de software y hardware de un sistema se describe casi siempre en términos de cuatro *generaciones de computadoras,* que se describen en la tabla 17-3. E1 nivel de operación de un sistema puede identificarse por ser un sistema de procesamiento de datos básicos (MIS), o

TABLA 17-3
Atributos de las generaciones de computadoras*

Atributo	*Primera generación*	*Segunda generación*	*Tercera generación*	*Cuarta generación*
Componente tecnológica	Tubo aspirador	Transistor	Circuitos integrados (IC)	Integración de mediana y gran escala (MSI, LSI)
Tipo de memoria	Tambor, primeros procesadores	Procesador	Procesador IC	IC
Tiempo de acceso	200-8 microsegundos	20-1 microsegundos	0.2-0.08 microsegundos	0.1-0.01 microsegundos
Capacidad de memoria central	1-4K caracteres	2-32K caracteres	16-128K caracteres	10^5-10^{13} caracteres
Técnicas de programación	Lenguajes ensamblador, macroprogramación temprana, FORTRAN	Lenguajes orientados a procedimientos, COBOL, FORTRAN II	Lenguajes orientado a procedimientos multiprogramación FORTRAN IV	Lenguajes orientados a procedimientos microprogramación
Otras tecnología	Tarjetas perforadas de entrada salida (I/O) y archivos	Tarjetas, cinta I/O cintas de archivos primeros servicios de software (sorteo, impresión, etc.)	Cinta, disco I/O; archivos de tambor y de disco; servicios de software avanzados; primeros sistemas administrativos de datos, multiprocesos	Memoria virtual, sistemas administrativos de bases de datos; teleproceso; minicomputadoras y microcomputadoras
Ejemplos	IBM 650,701: UNIVACI	IBM 1401,1410; UNIVACII Burroughs B-2500	Serie IBM 360; UNIVAC 9200;	Serie IBM 370

• *Fuente:* Hugh J. Watson, Ralph H. Sprague, Jr., y Donald W. Kroeber, "Computer Technology and Información System Performance", MSU *Business Tapies* (Summer, 1977). p. 18.

bien, un sistema de soporte de decisiones (DSS). Cada nivel tiende a construirse sobre los anteriores. Estos niveles de operación se describirán en breve.

Existen interrelaciones cerradas entre la tecnología de software y hardware y los niveles de operación y el uso de modelo en un CBIS. Para ilustrar esto, pueden emplearse modelos para mejorar la operación de un CBIS mientras que el hardware y software disponibles facilitan el uso de los modelos. Es importante entender cómo pueden integrarse estas tres componentes para mejorar la operación de una organización. Se describen los diferentes niveles de operación del CBIS y se hace hincapié en el uso de modelos y en la tecnología de hardware y software que se requiere.

Sistemas de procesamiento de datos básicos

En el nivel más bajo de operación de un CBIS sólo se realizan tareas de oficina (por ejemplo, nóminas). Cada tarea es un trabajo autocontenido. No existe una base de datos común, ya que se conserva un archivo separado para cada tarea. La salida de un *sistema de procesamiento de datos básico* consiste en datos de transacciones procesadas y en un conjunto limitado de informes resumen. Los informes quedan disponibles para todos los niveles administrativos, pero son de valor limitado para los altos ejecutivos y los gerentes en cuanto a llevar a cabo sus responsabilidades de toma de decisiones para el control y la planeación estratégica. Es común que no se integren modelos en un CBIS. No se requiere tecnología de software y hardware complicada.

Sistemas de procesamiento de datos integrados

Un *sistema de procesamiento de datos integrado* combina los diferentes trabajos de procesamiento de datos en un sistema integrado. Muchas tareas usan más de un archivo de datos y con frecuencia los mismos datos se emplean en más de una aplicación. La salida de una aplicación seguida se vuelve la entrada de otra. Aun así, casi todas las actividades de procesamiento de datos requieren el procesamiento de datos de transacciones y la generación de informes resumen que apoyan principalmente la toma de decisiones de la baja administración. En este nivel de operación se comienzan a usar modelos sencillos, como los que se ajustan al control de inventarios. Para conservar la base de datos de la organización se utilizan archivos en discos magnéticos y sistemas administrativos de bases de datos.

Sistemas de información administrativos

Existen diferentes opiniones en cuanto a qué constituye un *sistema de información administrativo.* En un extremo está el punto de vista de que es una mayor integración del procesamiento de datos de transacciones y la preparación de un conjunto mayor de informes programados. En el otro extremo se piensa que un MIS debe proporcionar a todos los elementos de la organización la información necesaria para funcionar de manera efi-

caz. En algún punto medio está lo que la gente entiende por un MIS, es decir, un sistema que caracteriza a un sistema de informes estructurados, una base de datos integrada y una orientación de apoyo a las decisiones.

El sistema de informes estructurados proporciona los informes y documentos requeridos para la comunicación entre las partes internas y externas de una organización. No sólo se proporcionan informes resumen sino también informes preparados con base en una demanda. Los usuarios también pueden solicitar una base de datos específica. El sistema de informes está diseñado para ayudar a satisfacer las necesidades de información de los altos niveles administrativos.

La base de datos está mucho más integrada en un MIS. Existe una red de comunicación para recolectar datos, la actualización de la base y para un fácil acceso a la base de datos. Incluye un sistema de consulta que permite el fácil acceso a la base de datos y la recuperación de información de la misma.

Se usa un conjunto comprensible de modelos como apoyo a la toma de decisiones. Existen modelos de análisis de datos (por ejemplo, modelos de análisis de tendencia), modelos para evaluar alternativas de inversión (por ejemplo, análisis de valor presente, descuento neto), algoritmos de asignación y programación (por ejemplo, programación de la producción) y tal vez modelos de simulación para evaluar planes y alternativas (por ejemplo, planeación de ventas de promoción).

A pesar de la variedad de modelos con que se cuenta para ayudar a la toma de decisiones, su eficacia es limitada por la falta de integración. Los diferentes modelos no se interconectan con facilidad ni se combinan para satisfacer una nueva necesidad única de información. Casi siempre la salida de cada modelo queda independiente y no se usa como entrada a otros modelos. La mayoría de los modelos no puede actualizarse con facilidad; por tanto, van perdiendo importancia gradualmente conforme cambia el medio ambiente de las decisiones para las que fueron diseñados. Los modelos no tienen una base de datos establecida, lo cual requiere que se reúnan los datos cada vez que se usa uno de ellos. Con frecuencia, los modelos no están integrados al CBIS para que puedan usarse fácilmente por personal no entrenado en métodos cuantitativos.

Sistemas de soporte para decisiones

El problema de falta de integración entre los modelos, las bases de datos y el tomador de decisiones se está reduciendo o eliminando en algunos CBIS que se están desarrollando y operando en la actualidad. Es común que se haga referencia a estos sistemas como *sistemas de soporte para decisiones.* Tales sistemas manejan los modelos, las bases de datos y el tomador de decisiones como subsistemas de un sistema completo diseñado para proporcionar información para apoyar las responsabilidades específicas de toma de decisiones. Este enfoque de subsistemas integrados se ilustra en la figura 17-2.

Un DSS contiene una gran variedad de modelos. Existen modelos permanentes para planeación estratégica, control administrativo y control

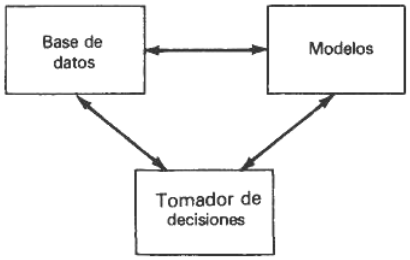


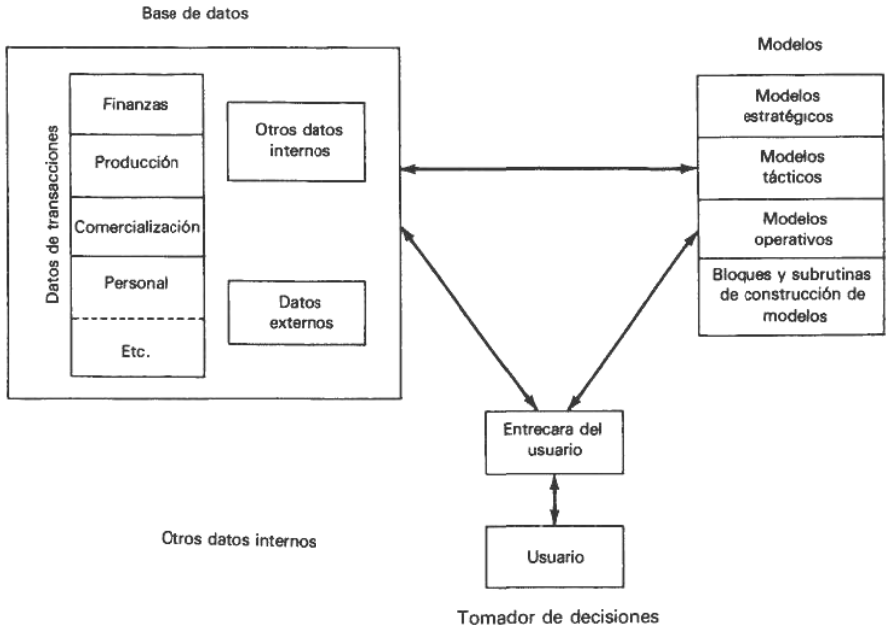
FIGURA 17-2
Estructura de un sistema soporte para decisiones.

operativo que apoyan las necesidades de información especificas. Existen bloques de construcción de modelos o subrutinas que se usan en la construcción de nuevos modelos. Existen modelos para analizar los datos en la base de datos. Existen modelos para actualizar los modelos permanentes.

Un DSS requiere una base de datos comprensible. La base de datos debe incluir datos de transacciones, otros datos internos y datos externos, y no sólo datos objetivos sino también subjetivos; en general cualesquiera que sean los datos que los modelos requieran. La base de datos proporciona el "combustible" para los modelos. La salida de los modelos, a su vez, se incluye en la base de datos.

El usuario también debe considerarse como parte de un DSS, ya que el sistema está diseñado para servir al usuario. Esta orientación hace hincapié en un punto importante como es el que el sistema se utilice por lotes sobre la base de tiempo real, cómo puede diseñarse el sistema para facilitar su uso por el tomador de decisiones, qué formato se debe usar al pre-i sentar la salida, etc.

FIGURA 17-3
Componentes de un sistema de soporte para decisiones.



En la figura 17-3 se muestra una ilustración de las componentes de un DSS.

Un DSS requiere hardware y software complicados. Es necesaria una gran capacidad de almacenamiento para la base de datos, junto con un sistema administrativo de base de datos avanzado. Pueden crearse, almacenarse y actualizarse muchos modelos, lo cual requiere características complicadas de software. Para satisfacer mejor las necesidades del usuario el sistema debe operarse fácilmente. Esto con frecuencia exige lenguajes de programación con similitud con el inglés, capacidades de graficado, terminales de tubo de rayos catódicos (CRT), y otros.

Ejemplo de un sistema de soporte de decisiones: EIS

Los sistemas del tipo que se caracterizó como sistemas de soporte para decisiones están creciendo en un número. En una investigación reciente, el 12% de las organizaciones encuestadas informó del uso de sistemas avanzados que pueden clasificarse como DSS.[8] Una conferencia que se dio en 1977 en California para presentar el sistema DSS en operación atrajo una audiencia de más de 200 personas para examinar los sistemas existentes.[9]

Las organizaciones que venden servicios de computación está comenzando a reconocer y responder a un mercado que pide sistemas DSS. Una de estas compañías es la Boeing Computer Services (BCS). Sobre la base de tiempo compartido, la BCS ofrece un sistema denominado Sistema de Información Ejecutivo (EIS).[10] Tiene muchas características que se han adscrito a un DSS y proporciona un ejemplo interesante del mundo real.

El EIS tiene seis subsistemas interrelacionados:

J Escritura de informes
2 Gráficas
3 Aplicaciones financieras
4 Pronósticos y estadística
5 Modelado, qué pasa si y simulación
6 Administración de base de datos

Los primeros dos subsistemas permiten el formateo de informes, gráficas y tablas de una manera flexible especificada por el usuario del sistema. El tercer subsistema consiste en un conjunto de modelos financieros como análisis de inversión de capital, análisis de compra/arrendamiento y comparación de métodos de depreciación. Estos modelos pueden usarse individualmente o incorporarse en un modelo más comprensible escrito por el usuario. El cuarto subsistema proporciona el mismo tipo de capacidades de modelado que el tercero, excepto que se trata de modelos estadísticos

[8] Hugh J. Watson, Ralph S. Sprague, Jr. y Donald W. Kroeber, "An Empirical Study of Information Systems Evolution", *Proceedings, Tenth Hawaii International Conference on Systems Sciences* (North Hollywood, Calif.: Western Periodicals, 1977).

[9] Eric Carlson (ed.) "Proceedings of a Conference on Decision Support Systems", *Data Base* (Winter, 1977).

[10] Tomado de D. Nash, "Building E.I.S. A Utility for Decisions", *Data Base,* (Winter, 1977), pp. 43-45.

TABLA 17-4
Atributos de los CBIS por su nivel de operación*

Atributos	*Sistemas de procesamiento de datos básicos*	*Sistemas de procesamiento de datos integrados*	*Sistemas administrativos de información*	*Sistemas de soporte para decisiones*
Aplicaciones	Nómina, registros de inventario y personal	Programación de la producción, análisis de ventas	Control de la producción, pronósticos de ventas, presupuesto de capital	Planeación estratégica a largo plazo
Bases de datos	Única para cada aplicación, actualización conjunta	Tareas comunes dentro de un sistema. Actualización conjunta	Acceso interactivo para programadores	Sistemas administrativos de bases de datos, acceso interactivo para programadores
Capacidad de decisión	Ningún modelo de decisión	Modelos sencillos de decisión	Modelos de ciencias administrativas	Modelos integrados de ciencias administrativas e investigación de operaciones
Tipo de información	Informes resumen	Informes resumen, información operativa	Informes programados y por demanda, información con orientación administrativa, flujo de informes estructurado	Información de apoyo a las responsabilidades de toma de decisiones específicas
Nivel más alto de la organización al que da servicio	Niveles subadministrativos, baja administración	Baja administración	Administración media	Alta administración

Nota: sólo se enumeran los atributos más altos de cada nivel. También se encuentran muchos atributos menores en cada uno.

* *Fuente:* Hugh J. Watson, Ralph H. Sprague, Jr. y Donald W. Kroeber, "Computer Technology and Information System Performance", MUS Business *Topics* (Summer, 1977), p. 20.

como estadística descriptiva, extrapolación basada en una constante o cambios de porcentajes en el tiempo, análisis de series de tiempo y análisis de variancia. Juntos, el tercero y el cuarto subsistemas comprenden los bloques de construcción de modelos y las subrutinas para el DSS. El quinto subsistema consiste en un lenguaje de modelado que se usa para construir modelos específicos. Es adecuado para modelos que generan estados financieros pro forma, dados los pronósticos y las suposiciones de ventas, costos, etc. Por último, el sexto subsistema maneja la base de datos con el fin de facilitar la preparación de los informes financieros por producto, por región y/o por rama para cada uno de los muchos periodos. El usuario del EIS accesa este conjunto integrado de subsistemas a través de una terminal, ya sea de teletipo o de pantalla, usando un sencillo lenguaje de alto nivel.

Resumen de la operación del CBIS

Conforme evolucionan las capacidades de operación de los sistemas de información, tienen lugar muchos cambios. Algunos de estos se mencionan

en la tabla 17-4. Se ha hecho hincapié en los cambios en el uso de los modelos. No sólo ocurren cambios en el número y tipo de modelos utilizados, sino también en cómo se integran en un CBIS. Cuanto mejor integrados estén los modelos en el CBIS, tanto más útiles y eficaces se vuelven para el administrador y la organización.

EFECTOS DE LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS

Con el creciente uso de los métodos cuantitativos, es lógico explorar cuál es el efecto que tienen en la organización y en la administración. Para las organizaciones complejas de hoy en día, los métodos cuantitativos proporcionan una oportunidad para planear, organizar y controlar mejor sus operaciones. Aunque los métodos cuantitativos requieren recursos, brindan el potencial para una mayor eficiencia en la organización.

Los efectos de los métodos cuantitativos sobre los administradores individuales dependen de la posición del administrador. Algunos puestos requieren que el administrador entre en contacto con los modelos en forma regular, mientras que otros no. Sin embargo, conforme se sube por la escalera de la organización, lo más probable es que se ocupe un puesto en el cual de alguna manera el trabajo con modelos es parte de la tarea diaria.

Es importante entender que no se está sugiriendo que los administradores deben tener habilidades para los métodos cuantitativos semejantes a las de los que trabajan en las ciencias administrativas. Este no es un objetivo factible ni deseable. Más bien, los administradores sólo deben ser capaces de trabajar con los de ciencias de la administración dirigiendo y ayudando a desarrollar los modelos y más tarde pudiendo usar los modelos.

Aun este papel relativamente modesto de los administradores está influyendo en las habilidades que deben poseer. Deben tener conocimientos en áreas como las de proceso de desarrollo del modelo, obstáculos para el desarrollo y uso de modelos, capacidades y limitaciones de los diferentes modelos y cómo trabajar con un sistema de información basado en computadoras. En otras palabras necesitan tener capacidad semejante a la que se obtiene con el estudio de un libro como éste.

En algunos casos, los modelos influyen en el alcance de las responsabilidades de toma de decisiones del administrador. En un límite de este alcance, los modelos asumen ciertas responsabilidades. Por ejemplo, en algunas organizaciones las cantidades de reorden se establecen por medio de un modelo, sujetas a la revisión administrativa, en lugar de que el administrador las establezca. Aun cuando la mejor orientación para el uso de modelos es que *apoyan* más que *toman* las decisiones, en algunas situaciones sencillas y altamente estructuradas de toma de decisiones, de hecho toman las decisiones. En el otro extremo, resulta que se le han aumentado las responsabilidades al administrador debido a la información proporcionada por los modelos. En algunas empresas, la toma de decisiones se está descentralizando cada vez más, gracias a que los altos ejecutivos han adquirido confianza en que es probable que se tomen decisiones de calidad dada la información disponible para la baja administración.

FUTURO DE LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS

El uso de los métodos cuantitativos tiene sus orígenes muchos siglos atrás. Sin embargo, no fue sino hasta el siglo XX y a partir de la segunda Guerra Mundial que la aplicación de los métodos cuantitativos se volvió realmente importante. En la actualidad, el uso de estos métodos ha adquirido raíces sólidas y todas las investigaciones hechas en las organizaciones informan que su uso aumentará en el futuro. Pero, como se ha sugerido en este capítulo, todavía existen grandes obstáculos para el empleo de los métodos cuantitativos. Estos obstáculos incluyen desde factores de comportamiento hasta consideraciones sobre el diseño de sistemas de información basados en computadoras. Si el uso de los métodos cuantitativos ha de alcanzar su potencial completo, se tendrá que poner atención en estos obstáculos tanto por parte de los administradores como de los que trabajan en las ciencias administrativas.

RESUMEN

Es importante tener una perspectiva administrativa en cuanto al empleo de los métodos cuantitativos en las empresas. Tal perspectiva ayuda a asegurar que éstos métodos aumenten la eficiencia en la organización y no son fines por sí mismos.

También es importante saber cuándo aplicar los métodos cuantitativos. Es cierto que con frecuencia se usan sobre una base intuitiva. Sin embargo, deben usarse explícitamente sólo cuando los beneficios esperados excedan a los costos esperados.

Deben tenerse varios factores en mente al seleccionar qué método cuantitativo se va a aplicar. Además de las consideraciones de beneficio/costo, es necesario pensar en cuáles son los métodos con que el analista y el usuario se sienten a gusto, en el tipo de situación que se va a analizar, en la cantidad de poder descriptivo requerida, en la cantidad de tiempo disponible para el desarrollo del modelo y en la disponibilidad de datos, de paquetes de programas y de una computadora.

Los modelos se crean a través de un proceso de desarrollo del modelo. Primero se especifican las necesidades de información y/o se identifica el problema. Después se desarrolla la versión inicial del modelo. Más tarde se prueba. En la mayoría de los casos, esta prueba identifica las áreas en donde se necesitan cambios. Después que el modelo se ha probado por completo, se pone en práctica en el medio ambiente de la organización en donde se aplicará. Entonces se pone en operación. El proceso típico de desarrollo del modelo requiere una cantidad considerable de retroalimentación y mucho retrocesos a los pasos anteriores.

Existen muchos obstáculos potenciales para el uso de los métodos cuantitativos. Tanto los administradores como los que trabajan en las ciencias de la administración coinciden en que los mayores obstáculos son de naturaleza educativa. El mayor desacuerdo está en las áreas de requerimientos de datos y de costos. Bien podría ser que fuera el resultado de la falta de entendimiento por parte de los que trabajan en las ciencias administrativas de las necesidades de información del administrador.

Los sistemas de información basados en computadoras difieren en su tecnología de *software y hardware* y en el nivel de operación. El *hardware* y el *software* pueden describirse por medio de las cuatro generaciones de computadoras, mientras que el nivel de operación puede ser el de un sistema de procesamiento de datos básico, el de un sistema de procesamiento de datos integrado, el de un sistema de información administrativo o el de un sistema de soporte para decisiones. Estos niveles difieren en el grado y la forma como los modelos cuantitativos se usan y se encuentran integrados en el CBIS. Es normal que un sistema de procesamiento de datos básico no contenga ningún modelo. Con frecuencia se encuentran modelos sencillos en los sistemas de procesamiento de datos integrado. Un sistema de información administrativo contiene una variedad de modelos para apoyar la toma de decisiones, pero por desgracia casi nunca están los suficientemente bien integrados en el sistema de información basado en computadora como para maximizar su eficacia. Esta integración se encuentra mejor realizada en los sistemas de soporte para decisiones. El número de estos sistemas está creciendo; éstos tratan a los modelos, a la base de datos y al tomador de decisiones como subsistemas integrados, diseñados para apoyar las responsabilidades de toma de decisiones.

Los métodos cuantitativos comienzan a influir en las organizaciones y en la administración. En el nivel de la organización, tienen el potencial para crear mayor eficiencia. Aunque la influencia de los métodos cuantitativos sobre el administrador depende del puesto, está afectando muchas áreas como las necesidades educativas de los administradores y las responsabilidades de toma de decisiones de los mismos.

El uso de los métodos cuantitativos promete ir en aumento en el futuro. Sin embargo, existen muchos obstáculos que los administradores y los que trabajan en las ciencias administrativas deben salvar, si se quiere que los métodos cuantitativos realicen su potencial completo.

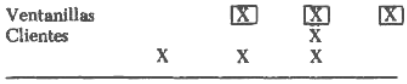
EJERCICIOS

17-1 El Monroe Bank and Trust emplea un método común para proporcionar su servicio de ventanillas. Existen varias cajeras y cada cliente que desea servicio se une a una de las colas. Este sistema se ilustra en seguida.

La administración ha visto que algunos bancos están adoptando un sistema de "cola rápida". Con este método, los clientes que desean servicio se unen a una sola línea que lleva a todas las cajas. Cuando queda libre una ventanilla, se prende una luz enfrente y suena una

campana que indica a la siguiente persona en la línea que se acerque para recibir servicio. Este sistema se ilustra en seguida.

Método de servicio de una línea rápida



Si la administración desea comparar por medio de un análisis cuantitativo las características de estos dos sistemas:

a ¿Qué personal se debe incluir en el estudio?
b ¿Qué tipos de modelos pueden usarse?
c ¿Qué datos se requieren?
d ¿Qué consideraciones de comportamiento pueden ser importantes para la decisión final?

17-2 En el capítulo de simulación, se describió un modelo para simular el procesamiento de sobregiros por un oficial del banco. ¿Qué beneficios pueden derivarse de la operación de un modelo de este tipo?

1*7-3* Bud Phillips es presidente de la Clayton Federal Savings and Loan, que se localiza en la pequeña ciudad de Clayton, Arizona. El señor Phillips acaba de regresar de una conferencia en Phoenix, en la cual la Phoenix Savings and Loan describió su sistema computarizado de planeación de financiamiento. Este sistema permite a la Savings and Loan generar estados financieros pro forma para los próximos 10 años. El señor Phillips recientemente autorizó la creación de un sistema de computación interno para la Clayton Federal Savings and Loan y ahora está interesado en la posibilidad de desarrollar un sistema de planeación de financiamiento similar al que se describió en Phoenix. ¿Qué tan factible y deseable es el desarrollo de este sistema? ¿Cómo puede la Clayton Federal Savings and Loan obtener este sistema?

17-4 Peter Drucker, notable académico, escritor y consultor en administración, establece en su libro *Management* lo siguiente relativo a lo que deben saber los administradores sobre las herramientas de las ciencias de la administración: "El pedir a cualquier usuario de una herramienta que entienda lo que se necesita para hacer la herramienta equivale a que el que hace la herramienta admita su incompetencia. El usuario, siempre y cuando la herramienta esté bien hecha, no necesita y sin duda no debe saber nada sobre la herramienta". ¿Hasta qué grado está el lector de acuerdo o en desacuerdo con la afirmación de Drucker?

17-5 La jerga profesional que emplean los que trabajan en las ciencias de la administración puede parecer incomprensible para el hombre común. Este problema fue dramatizado por el presidente de una división de $50 millones de dólares de una gran compañía farmacéutica, quien dijo lo siguiente: "Nuestros investigadores de opera-

dones nos hablan continuamente, pero no explican; yo quisiera saber". Enumérense cinco términos empleados por los de las ciencias administrativas que puedan ser desconocidos para un administrador.

17-6 Se ha dicho que los que trabajan en las ciencias de la administración no aprecian a la administración como un proceso completo que incluya una multitud de entrecaras, relaciones, restricciones y problemas con que sólo están vagamente familiarizados y todavía menos interesados. Según los conceptos administrativos que el lector tenga, ¿qué piensa sobre la administración como un proceso completo que puede ser desconocido o no bien entendido por alguien cuya área principal son las matemáticas?

17-7 Se ha dicho que al diseñar un DSS siempre se deben tener en mente las características del usuario del sistema. Actualmente, existe un debate continuo sobre si un DSS se debe diseñar bajo la suposición de que un administrador usará el sistema él solo o que será operado por un intermediario del personal que correrá el sistema para el administrador. ¿Cuáles son los beneficios y los costos asociados con cada enfoque? ¿Qué piensa el lector que es lo mejor?

17-8 Una minoría de las organizaciones opera su departamento de ciencias administrativas como un centro lucrativo separado. De esta manera, el grupo de ciencias de la administración cobra a los usuarios por los modelos y los análisis que desarrollan. Al cerrar el año, el departamento de ciencias administrativas se hace responsable por las pérdidas o ganancias que pueda tener. ¿Cuáles son los pros y los contras de este concepto de centro lucrativo cuando se aplica a las actividades de las ciencias de la administración?

17-9 Suponga el lector que es el Rip Van Winkle de la actualidad y se duerme durante 40 años. ¿Para qué tipos de problemas podrían tenerse modelos dentro de 40 años que no se tienen ahora? Trate de ser específico.

17-10 Visite una compañía relativamente grande en su ciudad. Liste los métodos cuantitativos que se están usando. Pregunte cuáles son los mayores obstáculos para aplicar los métodos cuantitativos.

ESTUDIO DE UN CASO: NATIONAL TOOL COMPANY[11]

Ben Harris, vicepresidente de producción desde hace mucho tiempo de la Compañía National Tool, se encontraba presidiendo la junta mensual para revisar la producción y planeación. "¡Maldita sea! —dijo con exasperación obvia—, no pueden ustedes darme un plan que funcione? Ésta es la tercera vez que su sistema de cien mil dólares me da una asignación de planta-producto que no parece estar de acuerdo con mis capacidades de maquinaria." Jeff Clark, el joven que trabaja en ciencias administrativas se puso pálido.

[11] El presente estudio de caso está tomado de Harvey H. Shycon, "All around the Model: Perspectives on MS Applications," *Interfaces* (febrero 1978), pp. 33-37.

"¿Cuándo aprenderán ustedes, los chicos listos de la computadora, que quiero pruebas de que su plan es factible?", dijo Ben.

El nuevo Sistema de Asignación de Capacidad y Producción de la National Tool (que divide la producción entre sus nueve plantas) había comenzado a funcionar tres meses antes y Harris rápidamente rehusó aceptarlo o a considerar seriamente su plan de manufactura. "Hasta que puedan probar que coloca la producción, producto por producto, en la planta correcta y considera mi equipo, herramientas y moldes, la capacidad de producción y las restricciones de capacidad y los puntos geográficos del mercado a donde finalmente tiene que mandarse el producto, no me convencerán —dijo una y otra vez—. Quiero pruebas de que funcionará, lo mismo que pido a mis ingenieros."

El grupo de ciencias de la administración acababa de completar dos años de trabajo, había diseñado bien un modelo del sistema de producción de la National Tool y ahora el autoritario vicepresidente rehusaba aceptar los resultados de la corrida. "Pero tiene usted que creer que se están haciendo las asignaciones apropiadas —insistió Jeff—. Le he demostrado ya varias veces, señor Harris, que todos los cálculos son correctos, y he presentado un seminario describiendo con detalle la técnica. Este modelo es correcto y los resultados que le recomienda son correctos. Debe tener fe."

Ben Harris había trabajado con la National Tool durante 25 años. Había subido por su trabajo de ingeniero a supervisor de manufactura, después a gerente de planta. Durante los últimos cinco años había sido el ejecutivo de producción de mayor éxito de toda la compañía. Había hecho su reputación como un jefe duro y capitaneaba su barco cumpliendo o mejorando los objetivos de costos. Durante estos cinco años como vicepresidente, había agregado dos nuevas plantas y las había puesto en marcha con un mínimo de problemas iniciales. Era uno de los pilares administrativos en su lucha para mantener sus porcentajes de mercado y conservar los costos en buen nivel en esta competitiva industria. Rehusaba aceptar los resultados de la corrida sin lo que el llamaba una prueba, un duplicado de los programas del año anterior y los costos resultantes como el los conocía.

Jeff Clark era el joven brillante que trabajaba en ciencias de la administración, había llegado a la compañía dos años antes y había hecho su reputación como el individuo que finalmente había puesto en orden el sistema de planeación financiera. Una vez que había probado ser competente, se le había encomendado la tarea de desarrollar una herramienta para asignar los requisitos de producción entre las plantas y entre las capacidades de producción de la compañía. Esto se consideró como una de las tareas más importantes de la compañía. Desafortunadamente, Jeff no había sido capaz de convencer a Ben Harris de seguir las asignaciones de producción que recomendaba el modelo.

Preguntas

1 ¿En qué punto del proceso de desarrollo del modelo fracasó el modela do?

2 Evalúese con cuidado el enfoque empleado para probar el modelo.

3 Desarróllese un plan de acción para que siga Jeff Clark con el fin de convencer a Ben Harris de que aplique el modelo.

BIBLIOGRAFÍA

Ginzberg, Michael J.: "Steps Towards More Effective Implementation of MS and MIS." *Interfaces* (mayo 1978), pp. 57-63.

Grayson, C. Jackson, Jr.: "Management Science and Business Practice," *Harvard Business Review* (julio-agosto 1973), pp. 41-48.

Watson, Hugh J. and Archie B. Carroll: *Computen for Business: A Managerial Emphasis,* edición revisada (Dallas: Business Publications, Inc. 1980).

APÉNDICE A

REPASO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Este apéndice contiene los conceptos esenciales de probabilidad y estadística que se usan en el cuerpo del libro. Se incluyen tres temas: probabilidad, estadística y distribuciones de probabilidad. Se proporciona una bibliografía al final del apéndice sobre desarrollos más detallados.

PROBABILIDAD

La probabilidad proporciona medios numéricos para expresar la posibilidad de que ocurra un evento estocástico. Los eventos estocásticos incluyen tirar un siete con un par de dados, el que llueva hoy o ser el ganador en un contrato competitivo.

Definiciones de probabilidades

Debido a que varios términos son de uso común al hablar de probabilidad, se definirán primero. Después se definirán tanto la probabilidad *objetiva* como la *subjetiva.*

Experimento estocástico Prueba de un proceso aleatorio, cuyo resultado no puede predecirse con certidumbre. Las pruebas repetidas se llevan a cabo bajo condiciones idénticas. *Ejemplo:* lanzar una moneda al aire.

Evento Resultado posible de un experimento estocástico. *Ejemplo:* cara.

Espacio muestra Conjunto de todos los resultados o eventos posibles de un experimento aleatorio. *Ejemplo:* cara y cruz.

Variable aleatoria Función numérica definida sobre un espacio muestra. *Ejemplo:* cara = 1, cruz = 0.

Probabilidad objetiva Probabilidad de un evento A es la frecuencia relativa con que ocurre un evento en un número muy grande de pruebas del experimento aleatorio. Así:

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{número de ocurrencias de A}}{\text{número total de pruebas}}$$

Esta es la definición clásica o de frecuencia relativa de la probabilidad. Las probabilidades pueden encontrarse en forma lógica (cara y cruz deben tener una probabilidad de $^1/_2$ cada una) o efectuando muchas pruebas y usando la frecuencia relativa observada. Conforme el número de pruebas tiende a infinito, ambas formas llevan al mismo resultado.

De la definición se observa que las probabilidades siempre están entre 0 y 1 ($0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1$). También, para un espacio muestra, la suma de todas las probabilidades debe ser 1 ($\sum_{\text{toda } i} \mathrm{P} = 1$).

Probabilidad subjetiva[1] Las probabilidades subjetivas son estimaciones, basadas en el juicio y la experiencia pasada, de la posibilidad de eventos futuros. Se emplean cuando no pueden usarse ni la lógica ni las pruebas repetidas para determinar una probabilidad objetiva. Los ejemplos incluyen la probabilidad de lluvia hoy, la probabilidad de hacer una venta o la probabilidad de llegar al punto de equilibrio con un nuevo producto dentro de un año. En cada caso sólo puede haber una prueba. Antes que la prueba se lleve a cabo, puede expresarse el grado de confianza en ciertos resultados, como una probabilidad.

Algunos administradores se niegan a usar probabilidades derivadas subjetivamente, argumentando que no puede verificarse o comprobarse que son correctas. Aunque esto es cierto, las estimaciones de probabilidad subjetiva pueden explicitar lo que de otra manera se haría subconcientemente. Una vez sacadas a la luz, puede examinarse y rebatirse el hecho de que sean razonables o no.

Leyes de probabilidades[2]

Ya sea que las probabilidades se hayan encontrado de manera objetiva o subjetiva, existen ciertas reglas para combinarlas.

[1] También llamada probabilidad "bayesiana".

[2] Todas las leyes se dan para dos eventos, pero pueden aplicarse a cualquier número de cuentos.

Probabilidad conjunta La probabilidad de que dos eventos, A y B, ocurran se llama *probabilidad conjunta.* Esto se denota por:

$$P(AB) \text{ o } P(A,B) \text{ o } P(A \cap B) \text{o } P(A \cdot B)$$

Probabilidad condicional La probabilidad de que ocurra un evento A, dado que ya ocurrió otro evento *B,* se llama *probabilidad condicional.* Esto se denota por:

$$P(A/B)$$

Ley de adición (ley de cualquiera de los dos) Para dos eventos, *A* y *B,* la probabilidad de que ocurra A o B o ambas está dada por:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) — P(A)$$

Esto se ilustra en la figura A-1

Eventos mutuamente excluyentes Si A y *B* no pueden ocurrir juntos (es decir, $P(AB) = 0$), se dice que son *mutuamente excluyentes.* Un ejemplo sería cara *y* cruz en una sola tirada de una moneda.

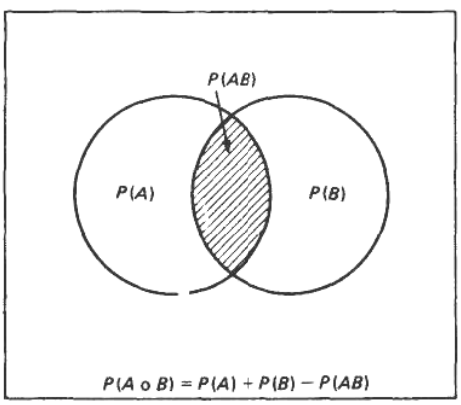
Ley de multiplicación La *probabilidad conjunta* de dos eventos está dada por:

$$P(AB) - \text{P(A)P(B/A)} = P(B)P(A/B)$$

Eventos independientes Si la ocurrencia de un evento no afecta la probabilidad de ocurrencia de un segundo evento, se dice que los dos eventos son *independientes.* Así, para eventos independientes:

$$P(A/B) = P(A)$$
$$P(B/A) = P(B)$$

FIGURA A-1
Ley de la adición



Teorema de Bayes Una relación útil (derivada de la ley de multiplicación) conocida como *teorema de Bayes* es:

$$P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(B/\bar{A})}$$

en donde

$$P(\bar{A}) = P(noA) = 1 - P(A)$$
$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(B/\bar{A})$$

Combinaciones y permutaciones

Con frecuencia es necesario, para poder calcular las probabilidades, contar el número de combinaciones posibles o las secuencias que pueden ocurrir. Muchos de estos problemas combinatorios pertenecen al tema de combinaciones o permutaciones.

Combinaciones El número de maneras en que pueden agruparse *n* artículos, tomando r de ellos a la vez sin tomar en cuenta el orden, es:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Como ejemplo, el número de maneras en que se pueden sacar cinco cartas de una baraja completa es:

$$C(52,5) = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2\ 598\ 960$$

Permutaciones Las permutaciones difieren de las combinaciones en que es importante el orden en que se seleccionan los artículos. Así, sacar un rey y después un as es diferente de sacar un as y después un rey. El número de permutaciones de *n* artículos tomando *r* a la vez es:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = r!C(n,r)$$

El número de permutaciones de cinco cartas sacadas de una baraja completa sería:

$$P(52,5) = \frac{52!}{(52-5)!} = 311{,}875{,}200$$

ESTADÍSTICA

El campo de la estadística se divide en dos categorías, estadística descriptiva e inferencia estadística. La *estadística descriptiva* incluye las maneras

y los medios para resumir grandes cantidades de datos numéricos. Los promedios de bateo de béisbol, el promedio de calificaciones de un estudiante y el contenido del *Statistical Abstract of the United States* pertenecen a esta categoría. La *inferencia estadística* concierne al muestreo y a los métodos para obtener conclusiones razonables (inferencias) a partir de una muestra de datos. Auditores y encuestadores lo usan en control de calidad.

Medidas de tendencia central

Las medidas de tendencia central indican en dónde se localiza el centro de algún conjunto de números. La media, la mediana y la moda son tres medidas importantes.

Media La media es el promedio aritmético de un conjunto de números, comúnmente llamada *promedio*. Formalmente está dada por:

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Como ejemplo, el valor medio de las caras de un solo dado es:

$$\mu = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5$$

Mediana La mediana es el cincuentavo percentil entre un conjunto de números. Es decir, la mida de los números será mayor y la mitad de los números será menor que la mediana. Para un solo dado la mediana es:

$$\frac{3 + 4}{2} = 3.5$$

Moda La moda es el número que ocurre con más frecuencia en un conjunto de números. Si todos los números en el conjunto son únicos, entonces el conjunto no tiene moda. La mida muestra el número más popular o el más probable dentro de un conjunto o el pico de una distribución.

Medidas de dispersión

Las medidas de dispersión muestran la cantidad de variación que existe en un conjunto de números. Tres medidas importantes de este tipo son el rango, la variancia y la desviación estándar.

Rango El rango de un conjunto de números es la diferencia entre el valor más grande y el más pequeño. Muestra la separación total entre el mínimo y el máximo.

Variancia La variancia de un conjunto de números mide la cantidad de variación *alrededor de la media* para el conjunto. Si la mayoría de los nú-

meros se agrupan cerca de la media, la variancia será pequeña. Si, por otra parte, se encuentran dispersos, la variancia será grande. La variancia está dada por:

$$\sigma^2 = \frac{(X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu)^2 + \ldots + (X_n - \mu)^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

Desviación estándar La desviación estándar es sencillamente la raíz cuadrada de la variancia *(a).* En muchos casos es más conveniente que la variancia.

Combinaciones de medidas y variancias

Con frecuencia hay necesidad de combinar las medias y las variancias de dos conjuntos de números. Si vienen de poblaciones *independientes,* entonces:

$$v_T = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_m}{m} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu_i$$

y

$$\sigma_T^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_m^2 = \sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2$$

La desviación estándar está dada por:

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots \sigma_m^2}$$

Valor esperado

El concepto de valor esperado ha sido muy útil en situaciones de toma de decisiones de naturaleza probabilísticas. Matemáticamente es *idéntica* a la media o al promedio aritmético. Sin embargo, es común usar una notación especial para la esperanza matemática. Si X es una variable aleatoria discreta, entonces el valor esperado de X está dado por:

$$E(X) = X_1P(X_1) + X_2P(X_2) + \ldots + X_nP(X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_iP(X_i) = \mu$$

en donde $P(X_i)$ = probabilidad de ocurrencia de X_i

Muestreo

El muestreo es una técnica para obtener estadística con un costo reducido. Por ejemplo, en control de calidad, es costoso probar todos los artículos

producidos en una línea de ensamble. Sin duda puede ser imposible, como en el caso de probar todos los cartuchos de dinamita que se producen. Probando sólo algunos artículos, es posible obtener conclusiones razonables sobre todo el grupo o población. Por supuesto, siempre existe un riesgo de error en la estadística de muestreo. Sin embargo, si la muestra no es sesgada, la cantidad de riesgo puede cuantificarse como una probabilidad. Esto permite a los administradores juzgar el trueque entre el tamaño de la muestra y el riesgo de error.

Cuando se calculan estadísticas a partir de una muestra de datos en lugar de los datos de toda la población, se usan símbolos diferentes para la media y para la desviación estándar. Así, para los datos de una muestra:[3]

$$\text{Media:} \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\text{Desviación estándar:} \qquad S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

Ley de los grandes números

Muchas veces parece sorprendente cómo los encuestadores pueden usar una muestra comparativamente pequeña para hacer afirmaciones grandiosas respecto de una población grande. Por ejemplo, con la encuesta Nielson se calcula lo que toda la nación está viendo en la televisión probando únicamente unas 1 500 casas. Esto puede explicarse por la *ley de los grandes números: La diferencia entre la media de una muestra alteatoria (no sesgada) y la media de la población tiende a cero cuando el tamaño de la muestra aumenta.* En la práctica, la diferencia se acorta rápidamente; A veces, una muestra tan pequeña como de 30 puede considerarse muestra grande.

Teorema del límite central

Otro teorema importante es el *teorema del límite central,* que establece: *conforme el tamaño de la muestra aumenta, las medias de la muestra tienden a una distribución normal, independientemente de la distribución de la población.* Esta tendencia hacia la normalidad también ocurre con rapidez, una regla sintetizada es que el tamaño de la muestra debe ser por lo menos 30. Este teorema se usa en los cálculos de PERT. Aun cuando las actividades individuales tienen una distribución beta, el proyecto completo, formado por muchas actividades (≥ 30), tendrá un tiempo de terminación con distribución normal.

[3] Para datos agrupados, las fórmulas son:

$$\text{Media:} \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i f_i$$

$$\text{Desviación estándar:} \qquad s_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(X_i - \bar{X})^2}$$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

La *distribución de probabilidad** describe la probabilidad para todos los eventos en un espacio muestra. La distribución puede presentarse como una tabla, una gráfica o una ecuación matemática. Si los eventos son *discretos,* como las cartas de una baraja completa, entonces la distribución de probabilidad será discreta, a veces se les llama *distribuciones de frecuencia.* Si los eventos son *continuos,* lo mismo pasa con la distribución asociada; un ejemplo podría ser el tiempo de terminación de un proyecto. Cualquier distribución puede representarse de dos maneras: (1) como una *función de densidad,* que muestra la probabilidad de los eventos o rangos individuales, y (2) como una *distribución acumulada,* que muestra la probabilidad de todos los eventos hasta un punto establecido.

Las distribuciones de probabilidad pueden tomar un número infinito de formas. Sin embargo, por fortuna en la naturaleza tienden a ocurrir unas cuantas distribuciones. Estas distribuciones pueden estudiarse y usarse cuando sea apropiado. Se revisarán algunas de estas distribuciones comunes en esta sección.

Distribución uniforme

Cuando todos los eventos en un espacio muestra son igualmente probables, la distribución de probabilidad es *uniforme.* Ésta es una de las pocas distribuciones que pueden ser continuas o discretas. En la figura A-2 se muestran ambas. En seguida se dan las ecuaciones para cada distribución junto con sus medias y desviaciones estándares:

Distribución uniforme discreta $P(x) = \frac{1}{n} \qquad x = 1,2,\ldots,n$

Media: $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Desviación estándar $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}$

Distribución uniforme continua $P(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \le x \le b$

Media: $\mu = \frac{a+b}{2}$

Desviación estándar : $\sigma = \frac{b-a}{12}$

* N. del R. T.: lo que el autor llama "función de distribución" es estrictamente (unción de probabilidad en el caso discreto, y función de densidad en el caso continuo. Lo que el autor llama "distribución exponencial negativa" es simplemente distribución exponencial.

Formalmente, no es exacto que la densidad uniforme pueda ser continua o discreta. Es continua.

Distribución binomial

Ésta es una distribución discreta que describe, entre otras cosas, las posibilidades de los eventos obtenidos al tirar un par de dados. En su aplicación típica se describe un experimento con sólo dos resultados posibles, éxito o fracaso. Si p es la probabilidad de éxito, entonces $q = 1 - p$ es la probabilidad de fracaso. El experimento se repite n veces, y la distribución binomial describe la frecuencia de ocurrencia del número de éxitos. La ecuación para la distribución es:

$$P\ (k \text{ éxitos en } n \text{ pruebas}) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^n q^{(n-k)}$$

En la figura A-3 se muestra la distribución binomial. Sus parámetros son:

Media:	$\mu = np$
Desviación estándar:	$\sigma = \sqrt{npq}$

Distribución Poisson

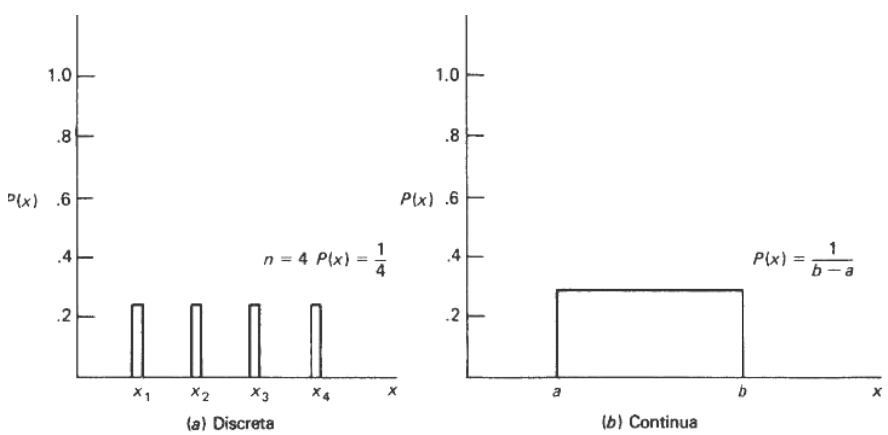
Algunos eventos ocurren en puntos aleatorios del tiempo o el espacio más que como resultados de un experimento estocástico. El número de personas que llegan a un restaurante en el lapso de una hora o el número de errores tipográficos en una página son ejemplos de este tipo de eventos. En estos casos sólo interesa el número de éxitos y no el número de fracasos. Con frecuencia puede usarse la distribución Poisson para describir su probabilidad.

La Poisson es una distribución discreta dada por:

$$P(k) = \frac{A^k e^{-A}}{k!}$$

donde A = número promedio de ocurrencias por intervalo unitario
k = número de ocurrencias por intervalo unitario
e = 2.71828 (base de los logaritmos naturales)

FIGURA A-2
Distribución uniforme.



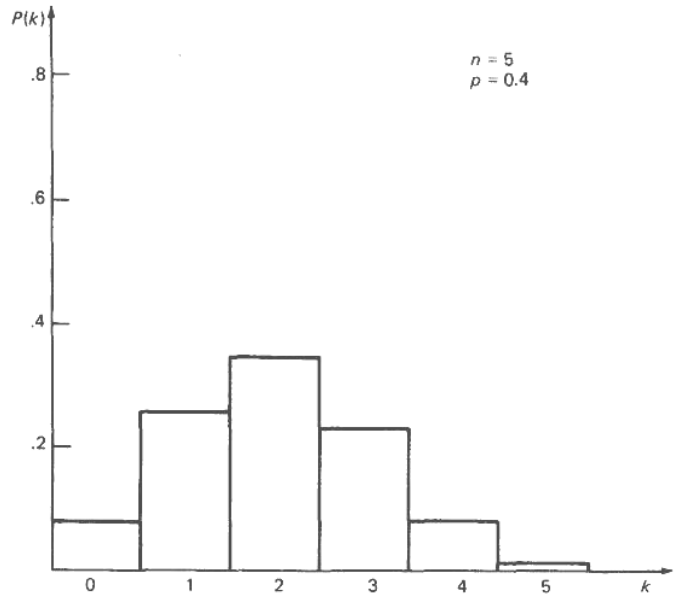


FIGURA A-3
Distribución binomial.

Se supone que cada ocurrencia es independiente de todas las demás ocurrencias y se supone que la probabilidad de ocurrencia es la misma de un intervalo a otro. Esta distribución se muestra en la figura A-4. Sus parámetros son:

Media: A
Desviación estándar: $\sqrt{A}$

Distribución exponencial negativa

Igual que la Poisson, esta distribución se ocupa de la ocurrencia aleatoria de eventos en el tiempo o en el espacio, como la llegada de autos a una caseta de pago o las salidas de una instalación de servicio. Difiere de la Poisson en que no describe el número de ocurrencias, sino el tiempo que transcurre entre una ocurrencia y otra. Como el tiempo es una varible continua, la exponencial negativa es una distribución continua. La función está dada por:

$$P(t) = se^{-st} \qquad \text{para } t \geq 0$$

donde t = tiempo
s = número promedio de ocurrencias por unidad de tiempo
e = 2.71828 (base de los logaritmos naturales)

La distribución se muestra en la figura A-5. Sus parámetros son:

Media: $\frac{1}{s}$
Desviación estándar: $\frac{1}{s}$

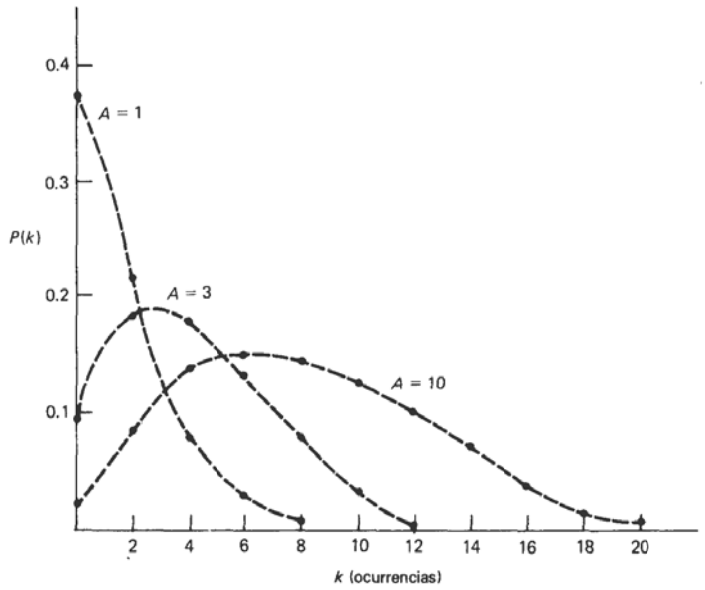


FIGURA A-4
Distribución Poisson

Distribución normal

La distribución de probabilidad que más se usa es la distribución normal. Ha resultado útil por tres razones. Primero, muchas medidas siguen una distribución normal: la altura de los adultos hombres, el coeficiente mental, la longitud de varas de medida y el peso de las latas de café de una libra. En cada uno de estos casos habrá una variación alrededor de la media que puede describirse por una distribución normal. Segundo, con frecuencia la normal se usa para aproximar las distribuciones Poisson o binomial y hacer cálculos más sencillos. Tercero, muchos problemas se pueden resolver con sólo suponer una población normal.
La típica distribución normal en forma de campana se muestra en la figura A-6. Es continua y simétrica. Su ecuación es:

$$P(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2} \quad \text{para} -\infty \leq x \leq +\infty$$

en donde: μ = media
σ = desviación estándar
e = 2.71828 (base de los logaritmos naturales)
π = 3.1416.

Es difícil trabajar con esta ecuación; así, se han desarrollado tablas, ampliamente difundidas, para lo que se conoce como *distribución normal estándar.*

Distribución normal estándar

Esta distribución normal con media 0 y desviación estándar 1 está dada por la ecuación:

$$P(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(Z^2/2)}$$

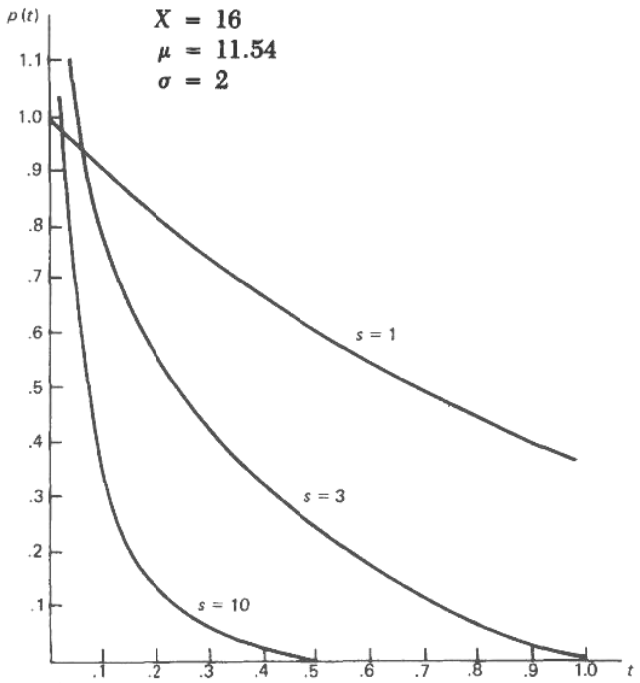
En el apéndice B se presenta una tabla para la distribución normal acumulada. En la figura A-7 se muestra la distribución.

La tabla normal estándar puede usarse en tres formas, cada una de las cuales se ilustra a continuación.

Para encontrar $P(x \leq X)$ Supóngase que se tiene una distribución normal con media de 11.54 y desviación estándar de 2. Se desea saber la probabilidad de que X sea menor o igual a 16. Para usar la tabla normal estándar primero se debe convertir la escala que se tiene en la escala normal estándar usando una *transformación* Z:

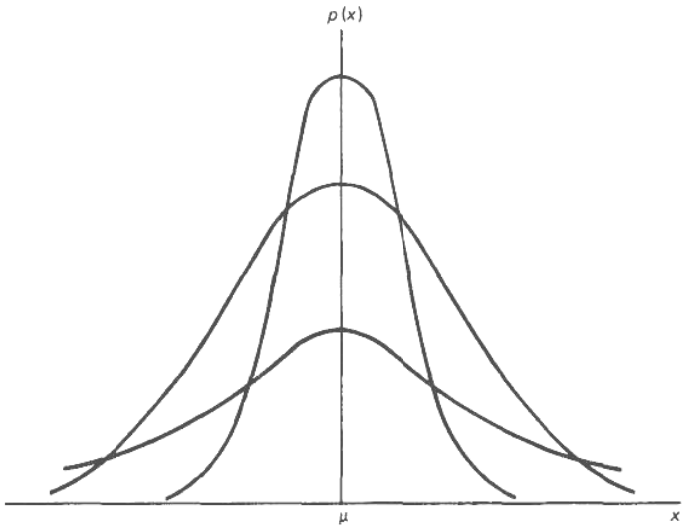
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Para este ejemplo:



GURA A-5
stribución exponencial
gativa.

FIGURA A-6
Distribución normal.



Entonces

$$Z = \frac{16 - 11.54}{2} = 2.23$$

Ahora búsquese en el apéndice B la celda correspondiente a 2.23. Primero se busca en la columna de la izquierda hacia abajo el número 2.2. Después hay que moverse hacia la derecha por ese renglón hasta encontrar la columna con encabezado 0.03. El elemento 0.98713 es la probabilidad de que X será menor o igual a 16. es decir:

$$P(x \leq 16) = 0.98713 = P(-\infty \leq x \leq x \leq 16)$$

Si se quiere que la probabilidad de x sea mayor que 16, sencillamente se resta el elemento de la tabla de 1:

$$P(x \geq 16) = 1 - P(x \leq 16) = 1 - 0.98713 = 0.01287$$

Para valores negativos de Z, se debe hacer uso de la simetría de la distribución normal. Supóngase, por ejemplo, que se quiere saber la probabilidad de que x sea menor o igual que 10 en lugar de 16. Usando la transformación Z:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{10 - 11.54}{2} = 0.77$$

Se quiere:

$$P = (x \leq -0.77)$$

Como la normal es simétrica:

$$P(x \leq -0.77) = P(x \geq +0.77)$$

y

$$P(x \geq +0.77) = 1 - P(x \leq +0.77)$$

Ahora se tiene algo que puede buscarse en la tabla. Del apéndice B:

$$P(x \leq 0.77) = 0.77935$$
$$P(x \leq 0.77) = 1 - 0.77935 = 0.22065$$

Para encontrar P(a ≤ x ≤ b) Algunas veces se quiere conocer la probabilidad de caer entre dos valores. Esto se logra en dos pasos:

$$P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) = (Px \leq a)$$

Por ejemplo encuéntrese P(12 ≤ *x* ≤ 15)

Transformando el límite superior:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{15 - 11.54}{2} = 1.73$$

Del apéndice B se encuentra:

$$P(x \leq 1.73) = 0.95818$$

De manera similar, para el límite superior:

$$Z = \frac{12 - 11.54}{2} = 0.23$$

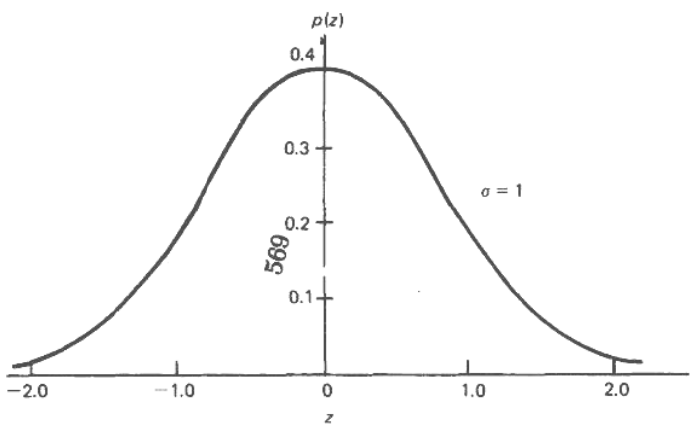


FIGURA A-7
Distribución normal estándar.

$$P(x \leq 0.23) = 0.59095$$

Entonces la respuesta es la diferencia:

$$P(12 \leq x \leq 15) = 0.95818 - 0.59095 = 0.36723$$

Para encontrar Z En algunos casos se dará una probabilidad acumulada y la tarea es encontrar el valor correspondiente de X. Por ejemplo, ¿qué valor de X tiene una probabilidad del 95% dé que no sea excedido? Es decir, encuéntrese X tal que:

$$P(X \leq X) = 0.95$$

De nuevo se supondrá $\mu = 11.54$ y $\sigma = 2$.
Para comenzar se encuentra el valor de Z que corresponde a 0.95 en el apéndice B. Se busca en el cuerpo de la tabla el 0.95. Los dos valores más cercanos son:

$$Z = 1.64 \quad P = 0.94950$$
$$Z = 1.65 \quad P = 0.95053$$

Interpolando entre estos dos valores, se usará Z = 1.645. Ahora se utiliza una transformación inversa de Z para encontrar X:

$$X = \mu + Z\sigma$$
$$= 11.54 + (1.645)(2)$$
$$X = 14.83$$

BIBLIOGRAFÍA

Chou, Ya-lun: *Statistical Analysis with Business and Economic Applications* (New York: Holt, 1969).

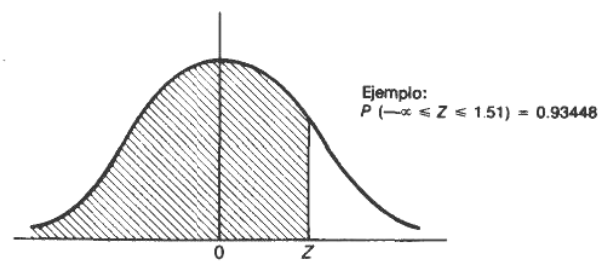
Hamburg, Morris: *Statistical Analysis for Decisión Making* (New York: Harcourt, Brace, 1970).

Spurr, William A. y Charles P. Bonini: *Statistical Analysis for Business Decisions* (Homewood, 111.: Richard D. Irwin, 1973).

Winkler, R. L. y W.L. Hays: *Statistics: Probability, Inference, and Decisión* (New York: Holt. 1971).

APÉNDICE B

ÁREA BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR



Área bajo la curva normal estándar

Z	00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60247	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73536	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77377	.77637	.77935	.78230	.78525
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89965	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.95520	.94630	.97738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97784	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98314	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.993105	.99324	.993453	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99899	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.9999[illegible]	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.9999[illegible]	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

[1] *Fuente:* Richard I. Levin and Char[illegible]s A. Kirkpatrick, *Quantitative Approaches to Management* (New York: McGraw-Hill, 1978), p. 588.

APÉNDICE C

TABLA DE NÚMEROS ALEATORIOS

Números aleatorios

49487	52802	28667	62058	87822	14704	18519	17889	45869	14454
29480	91539	46317	84803	86056	62812	33584	70391	77749	64906
25252	97738	23901	11106	86864	55808	22557	23214	15021	54268
69414	89353	70724	67893	23218	72452	03095	68333	13751	37260
77285	35179	92042	67581	67673	68374	71115	98166	43352	06414
52852	11444	71868	34534	69124	02760	06406	95234	87995	78560
98740	98054	30195	09891	18453	79464	01156	95522	06884	55073
85022	58736	12138	35146	62085	26170	25433	80787	96496	40579
17778	03840	21636	56269	08149	19001	67367	13138	02400	89515
81833	93449	57781	94621	90998	37561	59688	93299	27726	82167
63789	54958	33167	10909	40343	81023	61590	44474	39810	10305
61840	81740	60986	12498	71546	42249	13812	59902	27864	21809
42243	10153	20891	90883	15782	98167	86837	99166	92143	82441
45236	09129	53031	12260	01278	14404	40969	33419	14188	69557
40338	42477	78804	36272	72053	07958	67158	60979	79891	92409
54040	71253	88789	90203	54999	96564	00789	68879	47134	83941
49158	20908	44859	29089	76130	51442	34453	98590	37353	61137
80958	03808	83655	18415	96563	43582	82207	53322	30419	64435
07636	04876	61063	57571	69434	14965	20911	73162	33576	52839
37227	80750	08261	97048	60438	75053	05939	34414	16685	32103
99460	45915	45637	41353	35335	69087	57536	68418	10247	93253
60248	75845	37296	33783	42393	28185	31880	00241	31642	37526
95076	79089	87380	28982	97750	82221	35584	27444	85793	69755
20944	97852	26586	32796	51513	47475	48621	20067	88975	39506
30458	49207	62358	41532	30057	53017	10375	97204	98675	77634
38905	91282	79309	49022	17405	18830	09186	07629	01785	78317
96545	15638	90114	93730	13741	70177	49175	42113	21600	69625
21944	28328	00692	89164	96025	01383	50252	67044	70596	58266
36910	71928	63327	00980	32154	46006	62289	28079	03076	15619
48745	47626	28856	28382	60639	51370	70091	58261	70135	88259
32519	91993	59374	83994	59873	51217	62806	20028	26545	16820
75757	12965	29285	11481	31744	41754	24428	81819	02354	37895
07911	97756	89561	27464	25133	50026	16436	75846	83718	08533
89887	03328	76911	93168	56236	39056	67905	94933	05456	52347
30543	99488	75363	94187	32885	23887	10872	22793	26232	87356
68442	55201	33946	42495	28384	89889	50278	91985	58185	19124
22403	56698	88524	13692	55012	25343	76391	48029	72278	58586
70701	36907	51242	52083	43126	90379	60380	98513	85596	16528
69804	96122	42342	28467	79037	13218	63510	09071	52438	25840
65806	22398	19470	63653	27055	02606	43347	65384	02613	81668
43902	53070	54319	19347	59506	75440	90826	53652	92382	67623
49145	71587	14273	62440	15770	03281	58124	09533	43722	03856
47363	36295	62126	42358	20322	82000	52830	93540	13284	96496
26244	87033	90247	79131	38773	67687	45541	54976	17508	18367
72875	39496	06385	48458	30545	74383	22814	36752	10707	48774
09065	16283	61398	08288	00708	21816	39615	03102	02834	04116
68256	51225	92645	77747	33104	81206	00112	53345	04212	58476
38744	81018	41909	70458	72459	66136	97266	26490	10877	45022
44375	19619	35750	59924	82429	90288	61064	26489	87001	84273

[1] *Fuente:* The Rand Corporation, *A Million Random Digits with 100.000 Normal Deviates* (Glencoe, III.: Free Press, 1955). Con permiso.

APÉNDICE D

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA

CAPÍTULO 3

3-1 $BEP_{unidades} = \dfrac{FC}{(P - VC)} = \dfrac{500\,000}{(8.00 - 3.00)} = 100\,000$ unidades

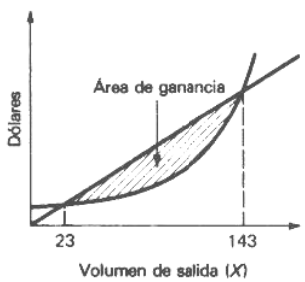
$BEP_{dólares\ de\ venta} = P \times BEP_{unidades} = 8.00(100\,000) = \$800\,000$

$BEP_{unidades} = \dfrac{FC}{(P - VC)} = \dfrac{500\,000}{(8.00 - 4.00)} = 125\,000$ unidades

3-2 $BEP_{1\ y\ 2} = \dfrac{(s - e) \pm \sqrt{(s - e)^2 - 4(-d)(-f)}}{2(-d)}$

$= \dfrac{-(300 + 200) \pm \sqrt{(300 + 200)^2 - 4(-3)(-10\,000)}}{2(-3)}$

$= 23$ y 143



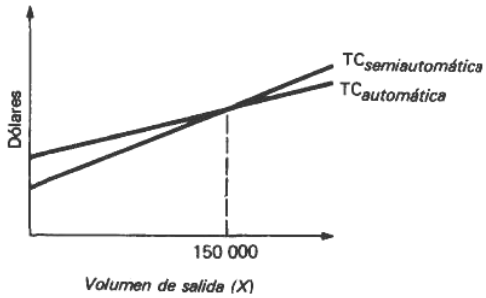
3-3

Producto	*Porcentaje promedio de contribución*	*Porcentaje ponderado de contribución*
Mesa	150/300	(150/300)(0.4) = 0.200
Silla	70/150	(70/150)(0.4) = 0.187
Escritorio	200/500	(200/500)(0.2) = 0.080
		0.467

$$\text{BEP}_{\text{dólares de venta}} = \frac{400\,000}{0.467} = \$856\,531$$

Ganancia al 60% de capacidad $= 0.6(1\,000\,000) - 400\,000 - 0.6(1 - 0.467)(1\,000\,000)$
$= (119\,800)$ pérdida

3-4



$$TC_{semiautomática} = TC_{automática}$$
$$5.000 + 0.06X = 8\,000 + 0.04X$$
$$0.02X = 3\,000$$
$$X = 150\,000 \text{ donas}$$

CAPÍTULO 4

4-1 (1) Datos históricos
(2) Distribución de probabilidad teórica
(3) Juicio subjetivo

4-2 (4) Juicio subjetivo

E(rendimientos) $= 0(0.60) + 50(0.10) + 100(0.15) + 500(0.10) + 1\,000(0.05) = \$120$

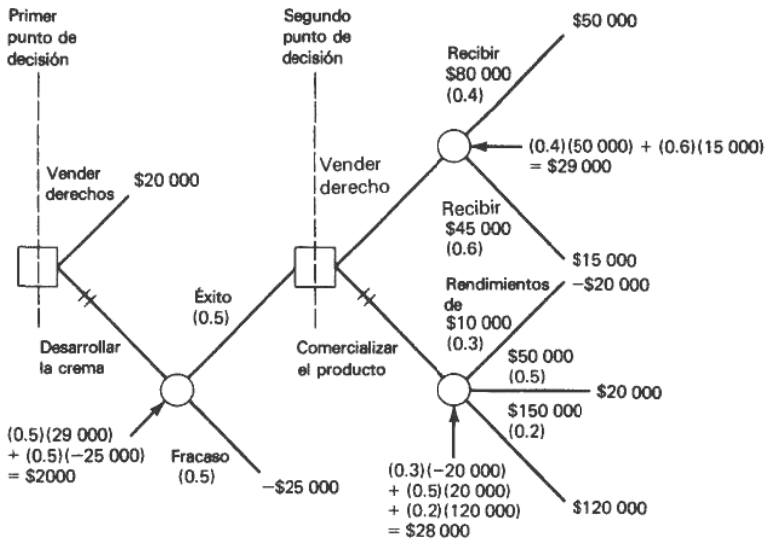
E (rendimientos netos) = \$120-\$100 = \$20

4-3

Alternativas de decisión: Orden	Eventos: Demanda de árboles 100 (0.3)	200 (0.3)	300 (0.4)
100	450	450	450
200	100	900	900
300	–250	550	1350

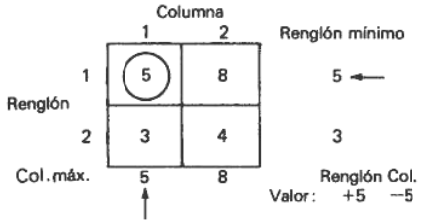
E(Ordenar 100) = 450(0.3) + 450(0.3) + 450(0.4) = \$450
E(Ordenar 200) = 100(0.3) + 900(0.3) + 900(0.4) = \$660
E(Ordenar 300) = –250(0.3) + 550(0.3) + 1350(0.4) = \$630
Ordenar 200 árboles

4-4 Whitehall debe vender sus derechos. Este curso de acción también incluye menos riesgo.

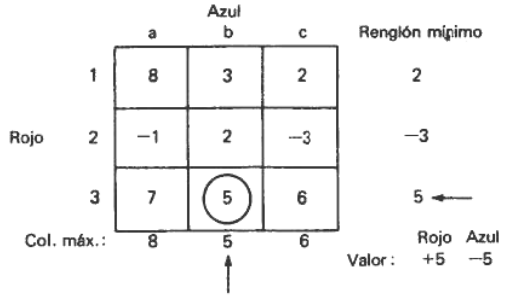


CAPÍTULO 5

5-1 (1)



(2)



5-2

		Columna x	Columna y	Dif.	Cociente	Invertido
Renglón	a	−3	4	7	7/10	3/10
	b	2	−1	3	3/10	7/10
Dif.:		5	5			
Cociente:		5/10	5/10			

Valor del juego: $\frac{3}{10}(-3) + \frac{7}{10}(2) = \frac{5}{10}$

5-3 (*a*)

		Estación 2: Alto	Estación 2: Bajo	Renglón mínimo
Est. 1	Alto	+10	+3	+3
	Bajo	+7	(+5)	+5 ← Maximin
Col. máx.:		+10	+5	

Punto de silla de montar

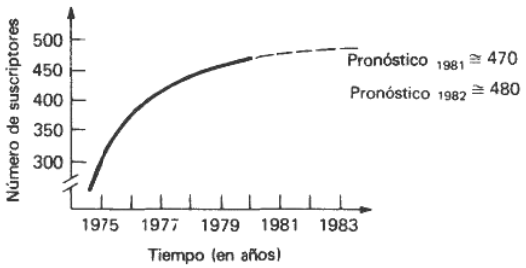
Minimax

Ambas deben cobrar precios bajos.

(b) Si ambas cambian de precios bajos a altos, cada una aumentará su pago individual de + 5 *a* + 10. Esto ciertamente es un incentivo para precios fijos. ¿Qué tan *fuerte* es el incentivo? Depende de los valores de los jugadores?

CAPÍTULO 6 Precios fijos

6-1



6-2 $\text{Pronóstico}_{\text{octubre}}(2 \text{ términos}) = \frac{5000 + 4800}{2} = 4900 \text{ metros de tabla}$

$\text{Pronóstico}_{\text{octubre}}(4 \text{ términos}) = \frac{5000 + 4800 + 4500 + 4000}{4} = 4575 \text{ metros de tabla}$

6-3 $\text{Pronóstico}_{\text{agosto 7}} = 57.68$ o 58 revistas

6-4

Periodo x	Número de subscripciones y	xy	x^2
1	310	310	1
2	390	780	4
3	420	1260	9
4	430	1720	16
5	450	2250	25
6	460	2760	36
$\Sigma x = 21$	$\Sigma y = 2460$	$\Sigma(xy) = 9080$	$\Sigma x^2 = 91$

$$b = \frac{6(9\,080) - 21(2\,460)}{6(91) - (21)^2} \cong 26.9$$

$$a = \frac{2\,460}{6} - \frac{26.9(21)}{6} \cong 316$$

Pronóstico t = 316 + 26.9t

Pronóstico$_{1981}$ = 316 + 26.9(7) = 504

Pronóstico$_{1982}$ = 316 + 26.9(8) = 531

6-5

Primera semana x	*Primer año* y	xy	x^2
3 000	18 000	54 000 000	9 000 000
1 500	6 000	9 000 000	2 250 000
14 000	64 000	896 000 000	196 000 000
5 000	30 000	150 000 000	25 000 000
2 000	9 000	18 000 000	4 000 000
2 800	14 000	39 200 000	7 840 000
2 000	8 000	16 000 000	4 000 000
3 800	22 000	83 600 000	14 440 000
$\Sigma x = 34\,100$	$\Sigma y = 171\,000$	$\Sigma(xy) = 1\,265\,800\,000$	$\Sigma x^2 = 262\,530\,000$

$$b = \frac{8(1\,265\,800\,000) - 34\,100(171\,000)}{8(262\,530\,000) - (34\,100)^2}$$

$$\cong 4.6$$

$$a = \frac{171\,000}{8} - \frac{4.6(34\,100)}{8}$$

$$\cong 1\,767$$

$$y = 1\,767 + 4.6x$$

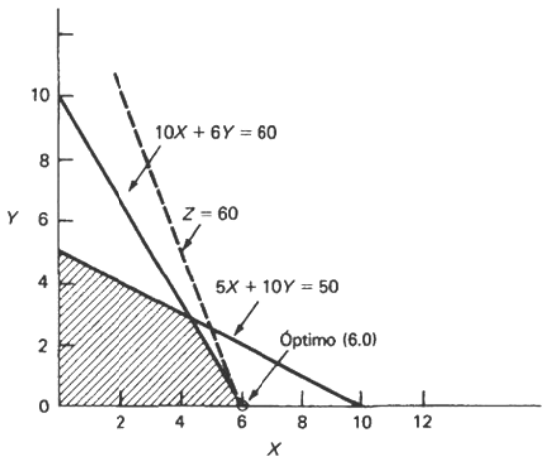
CAPÍTULO 7

7-1 Sea B = préstamos comerciales, $
M = hipotecas, $
S = préstamos personales, $
I = valores a corto plazo, $

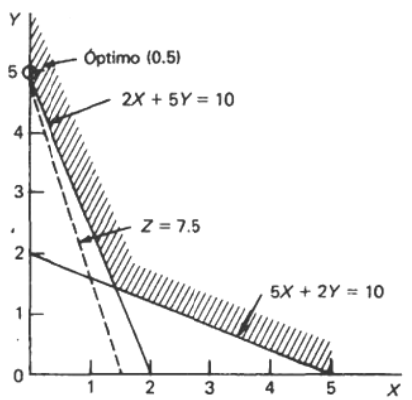
Maximizar: $Z = 0.12S + 0.1B + 0.08M + 0.05I$

Restricciones:		
	$B + M + S + I \leq 1\,000\,000$	capital
	$S \leq 0.25(B + M + S)$	personales
	$B \leq M$	comerciales
	$B \geq 1.1S$	comerciales
	$B, M, S, I, \geq 0$	

7-2



7-3



CAPÍTULO 8

8-1 (*a*) Maximizar: $Z = 7X_1 + 10X_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 - MA_6$
Restricciones: $7X_1 + 7X_2 + S_3 + 0S_4 + 0S_5 + 0A_6 = 49$
$10X_1 + 5X_2 + 0S_3 + S_4 + 0S_5 + 0A_6 = 50$
$0X_1 + X_2 + 0S_3 + 0S_4 - S_5 + A_6 = 2$

(*b*) Minimizar: $Z = 49D_1 + 50D_2 - 2D_3 + 0S_4 + MA_5 + 0S_6 + MA_7$
Restricciones: $7D_1 + 5D_2 - D_3 - S_4 + A_5 + 0S_6 + 0A_7 = 10$
$7D_1 + 10D_2 + 0D_3 + 0S_4 + 0A_5 - S_6 + A_7 = 7$

8-2 Maximizar: $Z = 10X_1 + 4X_2 + 0S_3 + 0S_4$
Restricciones: $5X_1 + 10X_2 + S_3 + 0S_4 = 50$
$10X_1 + 6X_2 + 0S_3 + S_4 = 60$

1ª tabla

C_j	Variables básicas	10 X_1	4 X_2	0 S_3	0 S_4	Valores de solución
0	S_3	5	10	1	0	$50 \quad \frac{50}{5} = 10$
0	S_4	10	6	0	1	$60 \quad \frac{60}{10} = (6)$ ←
	Z_j	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	(10) ↑	4	0	0	

2ª tabla (óptima)

C_j	Variables básicas	10 X_1	4 X_2	0 S_3	0 S_4	Valores de solución
0	S_3	0	7	1	$-\frac{1}{2}$	30
10	X_1	1	$\frac{6}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	6
	Z_j	10	6	0	1	60
	$C_j - Z_j$	0	−2	0	−1	

8-3 Minimizar: $Z = 10X_1 + 8X_2 + 0S_3 + MA_4 + 0S_5 + MA_6$

Restricciones: $5X_1 + 10X_2 - S_3 + A_4 + 0S_5 + 0A_6 = 50$

$9X_1 + 8X_2 + 0S_3 + 0A_4 - S_5 + A_6 = 72$

C_j	Variables básicas	10 X_1	8 X_2	0 S_3	M A_4	0 S_5	M A_6	Valores de solución
M	A_4	5	10	−1	1	0	0	$50\ \frac{50}{10} = (5)$ ←
M	A_6	9	8	0	0	−1	1	$72\ \frac{72}{8} = 9$
	Z_j	14M	18M	−M	M	−M	M	122M
	$C_j - Z_j$	10−14M	(8−18M) ↑	+M	0	+M	0	
8	X_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	$5\ \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$
M	A_6	5	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	−1	1	$32\ \frac{32}{5} = (6.4)$ ←
	Z_j	4+5M	8	$(-\frac{8}{10}+\frac{4M}{5})$	$(\frac{8}{10}-\frac{4M}{5})$	−M	M	40 + 32M
	$C_j - Z_j$	(6−5M) ↑	0	$(\frac{8}{10}-\frac{4M}{5})$	$(-\frac{8}{10}+\frac{9M}{5})$	M	0	
8	X_2	0	1	$-\frac{18}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$1.8\ \frac{1.8}{-.18} = -10$
10	X_1	1	0	$\frac{4}{25}$	$-\frac{4}{25}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$6.4\ \frac{6.4}{\frac{4}{25}} = (40)$ ←
	Z_j	10	8	3.04	−0.16	−1.2	1.2	69.2
	$C_j - Z_j$	0	0	(−3.04) ↑	M−0.16	1.2	M−1.2	
8	X_2	$\frac{18}{16}$	1	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	9
0	S_3	$\frac{25}{4}$	0	1	−1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	40
	Z_j	9	8	0	0	−1	1	72
	$C_j - Z_j$	1	0	0	M	1	M−1	

CAPÍTULO 9

9-1 $(a) T + D_{UT} = 84$
$(b) H + D_{UH} - D_{OH} = 40$
$(c) - D_{OW} = 6$

9-2 $(a) P_1 D_{UP} + P_2 D_{UR} + P_3(D_{OP} + D_{OR})$
$(b) P_1(D_{UP} + D_{UR}) + P_2 (D_{OP} + D_{OR})$

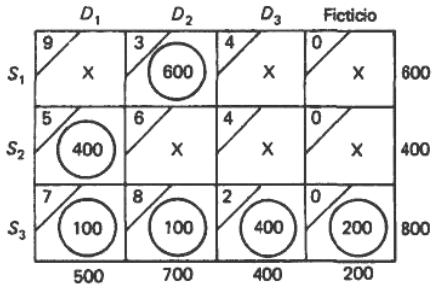
9-3 $X_1 = 6; D_{UA} = 7$ Ambos objetivos se cumplen

9-4 $X = 5; Y = 2; Z = 54$

9-5 $W - 4; X - 1; Y - 3; Z - 2; 29$

CAPITULO 10

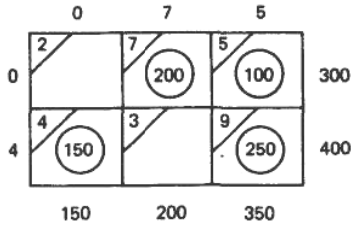
10-1 Solución LCM (también óptima):



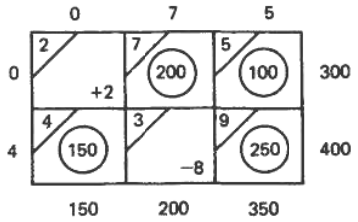
6 celdas llenas:

3 + 4 − 1 = 6

10-2 Se muestran los coeficientes de renglón y columna, suponiendo que se comienza asignando cero al renglón 1.

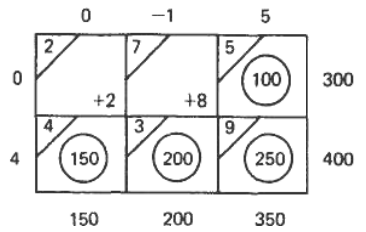


10-3



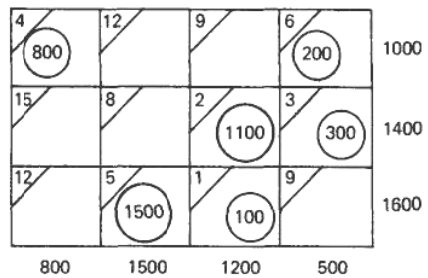
Esta solución no es óptima, ya que la celda R_2D_2 tiene un costo marginal negativo.

10-4 (a) La solución revisada es:



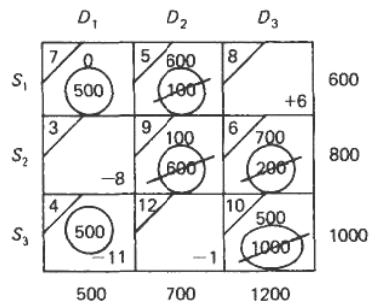
(b) Los nuevos coeficientes de renglón y columna se muestran en la tabla anterior, junto con los costos marginales de las celdas vacías. La solución ahora es óptima.

(c)

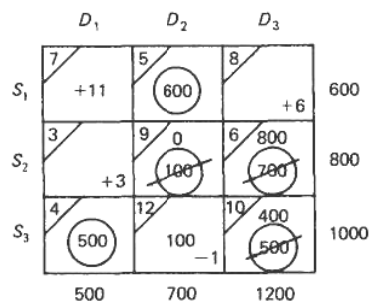


Costo total = 4(800) + 5(1 500) + 2(1 100) + 1(100) + 6(200) + 3(300) = $15 100

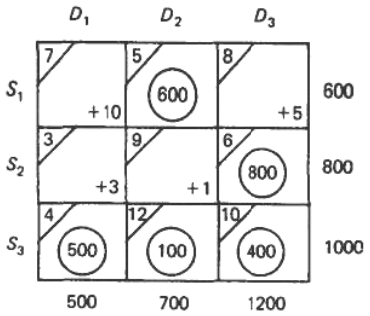
10-5 Costos marginales del método escalonado y primera revisión:



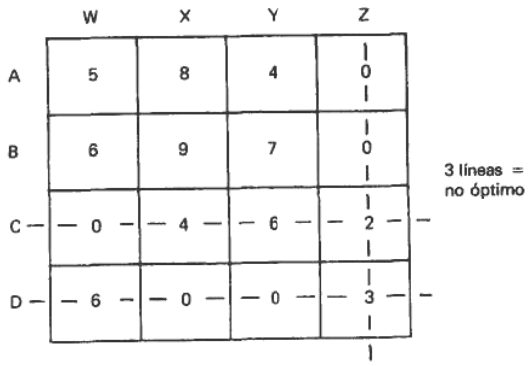
Segundo conjunto de costos marginales y revisión:



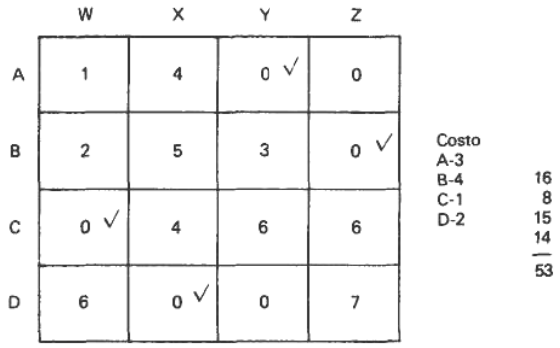
Solución óptima:



10-6 Matriz de costos de la primera oportunidad:

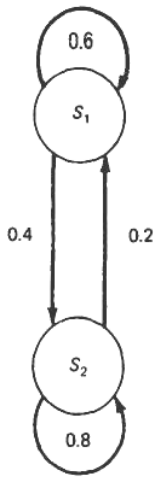


Segunda matriz:



CAPÍTULO 11

11-1 (*a*)



(b) Primera prueba: $P(S_1) = 0.6$
$P(S_2) = 0.4$
Segunda prueba: $P(S_1) = 0.6(0.6) + 0.4(0.2) = 0.44$
$P(S_2) = 0.4(0.8) + 0.6(0.4) = 0.56$
Tercera prueba: $P(S_1) = 0.44(0.6) + 0.56(0.2) = 0.38$
$P(S_2) = 1 - P(Si) = 0.62$
Cuarta prueba: $P(Si) = 0.38(0.6) + 0.62(0.2) = 0.35$
$P(S_2) = 1 - P(S_1) = 0.65$

11-2 Para S_1: $0.2P(S_2) = 0.4P(S_1)$
Para S_2: $0.4P(S_1) = 0.2P(S_2)$
$P(S_1) + P(S_2) = 1$
Sustituyendo $P(S_1) + 2P(S_1) = 1$
$P(S_1) = 0.33$
$P(S_2) = 0.67$

11-3 $P(S_1) = 0.6P(S_1) + 0.3P(S_2)$
$P(S_2) = 0.4P(S_1) + 0.8P(S_2)$
$P(S_1) + P(S_2) = 1$
Son los mismos.

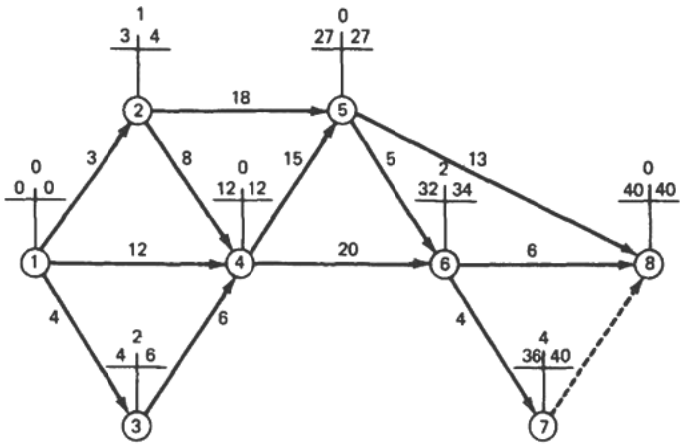
11-4 (*a*) Las cuatro ecuaciones son: Por sustitución:

$O.5P_{13} = 0.2 + 0.1P_{23}$	$P_{13} = 0.52$
$0.5P_{14} = 0.2 + 0.10_{24}$	$P_{14} = 0.48$
$0.6P_{23} = 0.2 + 0.3P_{13}$	$P_{23}=0.59$
$0.6P_{24} = 0.1 + 0.3P_{14}$	$P_{24}=0.41$

(b) Si los estados S_1 y S_2 son igualmente probables:
P(termínese en S_3) = 0.5(0.52) + 0.5(0.59) = 0.555
P(termínese en S_4) = 0.5(0.48) + 0.5(0.41) = 0.445

CAPITULO 12

12-1



Ruta crítica: 1 - 4 - 5 - 8

12-2

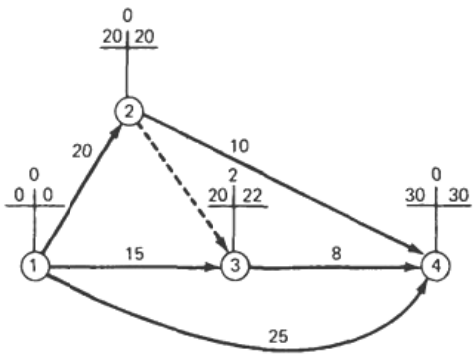
Actividad	*Duración*	*ES*	*LS*	*EF*	*LF*	*Holgura*
1,2	3	0	1	3	4	1
1,3	4	0	2	4	6	2
1,4	12	0	0	12	12	0*
2,4	8	3	4	11	12	1
2,5	18	3	9	21	27	6
3,4	6	4	6	10	12	2
4,5	15	12	12	27	27	0*
4,6	20	12	14	32	34	2
5,6	5	27	29	32	34	2
5,8	13	27	27	40	40	0*
6,7	4	32	36	36	40	4
6,8	6	32	34	38	40	2
7,8	0	36	40	36	40	4

*Sobre la ruta crítica

12-3 (*a*)

Actividad	*a*	*m*	*b*	t_e	σ_{te}
1,2	15	20	25	20	1.67
1,3	8	16	18	15	1.67
1,4	20	24	34	25	2.33
2,3	0	0	0	0	0 (Ficticio)
2,4	8	9	16	10	1.33
3,4	5	8	11	8	1.0

(*b*)



(*c*) 1 - 2 - 4

(*d*) Mostrado en (*a*)

(*e*) $T_E = 30$

$\sigma T_E = \sqrt{(1.67)^2 + (1.33)^2} = 2.13$

12-4 (*a*) $Z = \dfrac{t - T_E}{\sigma_{TE}} = \dfrac{55 - 50}{5} = 1.0$

$P(\leq 50 \text{ semanas}) = 0.5$

$Z = \dfrac{55 - 50}{5} = 1.0$

$P(\leq 55 \text{ semanas}) = 0.8413$

$Z = \dfrac{60 - 50}{5} = 2.0$

$P(\leq 60 \text{ semanas}) = 0.9772$

(*b*) $Z = \dfrac{58 - 50}{5} = 1.6$

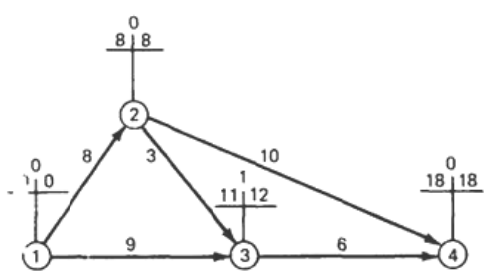
$P(\leq 58 \text{ semanas}) = 1 - 0.9452 = 0.0548$

(*c*) Para $P = 0.99$, $Z = 2.33$

$T = T_E + Z\sigma_{T_E}$

$= 50 + (2.33)(5) = 61.65$ semanas

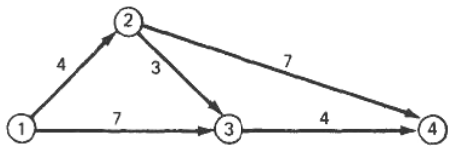
12-5 (*a*)



Ruta crítica: 1 - 2 - 4

(b)

Actividad	*Acción*	*Adicional*	*Normal, $*	*Total, $*
1,2	Redúzcanse 4 meses	$10 000	20 000	30 000
1,3	Redúzcanse 2 meses	6000	18 000	24 000
2,3	–	–	12 000	12 000
2,4	Redúzcanse 3 meses	9000	25 000	34 000
3,4	Redúzcanse 2 meses	8000	15 000	23 000
			90 000	123 000



Todas las rutas son críticas; duración del proyecto: 11 meses

12-6 (*a*) Redúzcase (1,2) en un mes de 8 a 7.

Costo normal:	$90 000
Costo agregado:	2 500
Total 17 meses	$92 500

(b) Para reducir el tiempo de 17 meses a 16

Redúzcase (1, 2) de 7 meses a 6: + $2 500

Para reducir de 16 meses a 15:

Redúzcase (1,2) de 6 meses a 5: + $2 500

Redúzcase (1,3) de 9 meses a 8: + $3 000

$5 500

Duración del proyecto	*Costo normal*	*Costo intensivo*	*Penalización*	*Total*
18	$90 000	–	$15 000	$105 000
17	90 000	$2 500	10 000	102 500
*16	90 000	5000	5000	100 000
15	90 000	10 500	–	100 500

*16 meses es la duración óptima.

CAPÍTULO 13

13-1 (*a*) $Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(9\,000)(2.50)}{2}} = \sqrt{22\,500} = 150$ unidades

(*b*) Número de órdenes $= \frac{D}{Q} = \frac{9\,000}{150} = 60$ órdenes

(*c*) por 365 días $\frac{365}{60} = 6.1$ días

(*d*) $EOQ = Q \times \text{precio} = 150 \times 7 = 1\,050$

(*e*) Costo anual de inventario $= \frac{D}{Q}C_o + \frac{Q}{2}C_h$

$= \frac{9\,000}{150}(2.50) + \frac{150}{2}(2)$

$150 + 150 = \$300$

(*f*) $R = \frac{LD}{365} = \frac{3(9\,000)}{365} = 74$ unidades

13-2 (*a*) $Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h\left(1 - \frac{D}{S}\right)}} = \sqrt{\frac{2(9\,000)(2.50)}{2\left(1 - \frac{9\,000}{12\,000}\right)}} = \sqrt{90\,000} = 300$ unidades

(*b*) Número de órdenes $= \frac{D}{Q} = \frac{9\,000}{300} = 30$ órdenes

(*c*) Por 365 días $\frac{365}{30} = 12.2$ días

(*d*) $EOQ = Q \times$ precio $= 300 \times \$7 = \$2\,100$

(*e*) Costo anual de inventarios $= \frac{D}{Q}C_o + \frac{Q}{2}C_h\left(1 - \frac{D}{S}\right)$

$= \frac{9\,000}{3\,000}(2.50) + \frac{300}{2}(2)\left(1 - \frac{9\,000}{12\,000}\right)$

$= 75 + 75 = \$150$

(*f*) $R = \frac{LD}{365} = \frac{3(9\,000)}{365} = 74$ unidades

13-3 (*a*) $k = \frac{C_s}{C_h + C_s} = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$

$Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h k}} = \sqrt{\frac{2(9\,000)(2.50)}{2(\frac{1}{3})}} = \sqrt{67\,500} \cong 260$

(*b*) Número de órdenes $= \frac{D}{Q} = \frac{9\,000}{260} = 34.6$ órdenes

(*c*) Por 365 días $\frac{365}{34.6} = 10.6$ días

(*d*) $EOQ = Q \times$ precio $= 260 \times \$7 = \$1\,820$

(*e*) Costo anual de inventario $= \frac{D}{Q}C_o + \frac{Q}{2}C_h k^2 + \frac{Q}{2}C_s(1 - k)^2$

$= \frac{9\,000}{260}(2.50) + \frac{260}{2}(2)\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{260}{2}(1)\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2$

$= 86.54 + 28.89 + 57.78$

$= 86.54 + 86.67 = \$173.21$

Desiguales debido a error de redondeo en Q ($Q = 259.8$)

(*f*) R = 74 unidades

13-4 Para el EOQ se tiene (del ejercicio de práctica 13-1)

$$Q = 150 \text{ unidades}$$

Costo anual de inventario = \$300

Costo anual de compra = 9 000 x \$7 = \$63 000

Con el 1 % de descuento:

Ahorro sobre el costo de compra: \$63 000 x 1% = \$630

Nueva Q = 300 unidades

$$\text{Nuevo costo anual de inventario} = \frac{D}{Q}C_o + \frac{Q}{2}C_h$$

$$= \frac{9\,000}{300}(2.50) + \frac{300}{2}(2)$$

$$= 75 + 300 = \$375$$

Aumento en el costo de inventario: \$375 - \$300 = \$75

Ahorros > aumento en el costo de inventario — tómese el descuento

Nota: El 1 % de descuento tendrá muy poco efecto sobre el EOQ de 150; así, no habrá ahorros en las órdenes > 300.

13-5 $$T = \sqrt{\frac{2C_o}{DC_h}} = \sqrt{\frac{2(2.50)}{9\,000(2)}} = 0.0167 \text{ años (6.1 días)}$$

$$M = D(T + L) = 9\,000(0.0167 + \frac{7}{365}) = 224 \text{ unidades}$$

CAPÍTULO 14

14-1 $$Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(10\,000)(10)}{1}} = \sqrt{200\,000} = 447 \text{ unidades}$$

$$B = Z\sigma$$

$$= (2.33)(17.3) = 40 \text{ unidades}$$

$$R = D_dL + B$$

$$= (33.3)(9) + 40 = 300 + 40 = 340 \text{ unidades}$$

14-2 $$Q = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(1\,000)(10)}{2}} = 100 \text{ unidades}$$

$$P = \frac{\frac{D}{Q}C_s}{C_h + \frac{D}{Q}C_s} = \frac{\frac{1\,000}{100}(1)}{2 + \frac{1\,000}{1\,000}(1)} = \frac{10}{2 + 10} = 0.83$$

Del apéndice C: $Z_{0.83} = 0.95$

$$R = D_dL = Z\sigma$$

$$= (4)(4) + (0.95)(4)$$

$$= 16 + 3.8 \cong 20 \text{ unidades}$$

Por lo tanto, cuando el inventario baja a 20 unidades, se ordenan 100 más.

14-3 $B = Z\sigma$

Para 98% $Z = 2.05$

$B = (2.05)(100) = 20.5$ llantas

$M = D(T + L) + B$

Usando un periodo de 1 mes:

$$M = \frac{600}{3}(3 + 1) + 20.5$$

$= 820.5$ llantas, o 821

CAPÍTULO 15

15-1 (*a*) $L_q = 0.5$; $W_q = 0.1$ horas; $L_s = 1$; $W_s = 0.2$ horas

$U = 50\%$; $P(L_s > 1) = 0.25$

(*b*) $L_q = 0.5$; $W_q = 0.05$ horas; $L_s = 1$; $W_s = 0.1$ horas

$U = 50\%$; $P(L_s > 1) = 0.25$

15-2 (*a*) $L_q = 0.25$; $W_q = 0.05$ horas; $L_s = 0.75$; $W_s = 0.15$ horas

$U = 50\%$

(*b*) $L_q = 4.05$; $W_q = 0.45$ *horas;* $L_S = 4.95$; $W_s = 0.55$ horas

$U = 90\%$

15-3 *a*) $L_q = 1.9$; $W_q = 0.32$ horas; $L_s = 3.4$; $W_s = 0.57$ horas

$U = 75\%$

(*b*) $L_q = 0.89$; $W_q = 0.09$ horas; $L_s = 2.9$; $W_s = 0.29$ horas

$U = 67\%$

(*c*) Sí

CAPÍTULO 16

16-1 (*a*)

Variable	*Probabilidad*	*Probabilidad acumulada*	*Intervalos de números aleatorios*
G	0.05	0.05	1-5
I	0.05	0.10	6-10
O	0.25	0.35	11-35
T	0.25	0.60	36-60
U	0.15	0.75	61-75
Y	0.10	0.85	76-85
Espacio	0.15	1.00	86-99, 00

(*b*) LO — LOG — RO

16-2 (*a*) [0.78 + 0.92 + 0.14 + 0.36 + 0.68 + 0.22 + 0.51 + 0.09 + 0.38 + 0.94 + 0.78 + 0.41] — 6 = + 0.21

(*b*) 0.77; 1.4; -1.08; -0.36; 0.47; -0.77; 0.02: -1.34; -0.31; 1.55; 0.77; -0.23

ÍNDICES

ÍNDICE ONOMÁSTICO

Aarvik, Oddmund, 329
Ackoff, Russell L., 541n
American Institute of Decision Sciences (AIDS), 13
Anderson, David R., 198
Anthony, Robert N., 31
Aquilano, Nicholas J., 430, 461
Axon, J. T., 80

Baecher, Joan M., 9
Balintfy, Joseph L., 191, 198
Beer, Stafford, 15
Bell, E. G., 182, 198
Bhat, U.N., 491
Bierman, Harold, Jr., 54, 238
Bleuel, W. H., 525, 535
Bonini, Charles P., 569, 88, 238, 576
Boulden, James B., 536
Boulding, Kenneth, 17, 27
Bradshaw, Francis F., 541
BrownRex V., 8, 88
Buchanjoseph, 461

Carlson, Eric, 553n
Carroll, Archie B., 561
Carroll, Lewis, 330
Chambers, John C, 122, 135 140, 154
Chames, A., 280, 328
Chase, Richard B., 430, 461
Chou, Ya-lun, 576
Cicero, 58
Clarke, Darral, 155
Cleland, D.I., 398
Cooper, L., 198, 238
Cooper, W. W., 280, 328
Courtney, J., 280
Cyert, R. M., 357

Daellenbach H. G., 182, 198
Dantzig, George, 201, 318, 328
Darnell, D., 190n, 198
Davidson, J. J., 357
Davis, Edward W., 374n, 398
Davis, M. D., 111
Davis, Otto A., 526n, 536
Desjardins, R. B., 111
Dewey, John, 156
Donnelly, James H.j Jr., 326, 329

Ehrenberg, A. S. C, 357
Einstein, Albert, 2, 281
Erikson, Warren J., 491
Ezell, D., 374n, 398

Forrester, Jay W., 27
Fourre, James P., 536
Freedman, D., 357
Frost, Robert, 2, 431

Gantt, Henry L., 360
Gattis, Daniel R., 139
Geoffrion, A. M., 280
Gibbs, G. L., 526n, 536
Ginzberg, Michael J., 562
González, R. F., 398
Goya, 494
Grayson, C. Jackson, 538, 562
Green, ThadB., 546n
Greig, I. D., 387n, 398

Hadley G., 430
Hamburg, Morris, 536, 576
Hartley, Ronald V., 14, 238, 280 281, 280

Hausman, Warren H., 238
Hays, W. L., 576
Henry, Patrick, 114
Herbert, George, 402
Hillier, F. S., 329, 470n, 477n
Hitch, Charles J., 479n, 491, 542

Hitchock, F. L., 318, 328
Holladay, J., 329
Holmes, Sherlock, 199
Horngren, Charles T., 55
Huxley, Aldous, 28
Hyckman, Thomas R., 54

Ijiri, Y., 280
Institute of Management Sciences, The (TIMS), 9, 12
Ivancevich, John M., 329

Jennings, John. B., 526n, 536
Johnson, Lyndon B., 114
Jones, S. Roland, 546n

Kahr AndrewS., 88
Kallina, Cari, 143n
Kedia, B., 374n, 398
KingW. R., 398
Kiviat, P. J., 527n, 536
Klastorian, T., 280
Kleinsock, Leonard, 491
Klekamp, Robert C, 14
Koenigsberg, Ernest, 461
Kónig, D., 318, 329
Kotak, Dilip B., 191n, 198,
Kroeber, Donald W., 549n, 553, 555
Kuhn, Alfred, 239

Lamone, R. P., 198
Lee, SangM., 253n, 280
LevinR. L., 111, 198
Levy, Ferdinand K.,, 387, 398
Lieberman, G. J., 329, 470 477n, 479n, 491
Loflin, Carolyn, 190n, 198
Lombardi, Vince, 90
Longfellow, Henry, W., 358
Loomba, N. Paul, 198 238 329, 386n, 398
Luce, R. D., 111
Luchsinger, V,, 374n, 398
Lyon, Herbert L., 329

MacArthur, Douglas, 89
McDonald, J., 111
Machol, R. E., 329
McMillan, C, 398
Makridakis, Spyros G., 139n 155, 536
Marett, Gilí, 547n
Marklund, Robert F., 329
Markowitz, H. M., 527n, 536
Marster R. E., 280
Martino, R. L., 398
Meadows, Dennis 144n
Meier, Robert C, 536
Meliha, Dileep 357
Meredith, J.R., 357
Miller, David K., 14, 27, 430, 461
Milton, 462
ModerJ. J., 386n, 398
Moore, Lawrence J., 280
Morgenstern, O., 90, 112
Mullick. Satinder K., 120, 135, 140, 154

Naylor, Thomas H., 139n, 527n, 536
Newell, William T., 536
Newsome, Walter B., 546

Operations Research Society of America (QRSA), 9, 13
Orchard Hays, Williams, 232n, 238
Owen, G., 111

Packard, Karle S., 88
Pazer, Harold L., 536
Perry, C, 287n, 398
Peterson, Cameron, R., 88
Phillips, C. R., 386n, 398
Pritsker, A. A. B., 399
Pythagoras, 156

Rader, Louis T., 543
Raiffa, H., 111
Randolph, Paul, 329
Rappaport, Alfred, 55
Reinfield, Nyles V., 329
Reuter, Frederick H., 526n, 537
Rice, Grantland, 89, 90
Ruefli, T., 280
Rutigliano, Anthony, 374

Saaty, T. L., 491 .
Salkin, Harvey, 281
Schauland, Horst, 527, 536
Schriber, Thomas J., 536
Séneca, 494
Shillinglaw, Gordon, 55
Shubik, M., 111
Shycom, Harvey N., 559
Sigal, C. E., 398
Simón, Herbert, 7, 14
Smith, Donald C, 120, 135, 140, 155
Sposito, V, A., 200, 238
Sprague, Ralph H., 550n, 553, 554
Spurr, William A., 188, 575
Starr, Martin K., 14, 27, 430, 461
Steinberg, D., 198, 238
Stevenson, Keith A., 492
Strum, J. E., 198
Sweeney, Dennis J., 198

Taylor, Frederick, 12, 14
Tersine, Richard E., 430, 461
Thieruf, Robert, J., 14
Thompson, G. L., 357
Thoreau, 462
Trueman, Richard E., 290n, 329, 357, 418n, 430, 438, 483n, 485n, 492 Turban, Efraim, 357, 399 Twain, Mark, 28

Ulvila, Jacob, 88

Vazonyl, A., 388n, 399
Veinott, A. F., 461
Villaneuva, R., 587n, 536
Vogel, William R., 329
Voltaire, 58
von, Neumann, J., 90, 112

Ward, R. A., 545n
Watson, Hugh J., 9n, 520n, 536, 547n, 549n, 553, 554, 561
Weist, Jerome D., 387, 399
Wheelwright, Steven C., 140, 155, 536
Whitehorn, J. C, 431
Whitin, T. M., 430
Williams, J. D., 112
Williams, Thomas, A., 198
Winkler, R. L., 576, 461

Zionts, Stanley, 280

ÍNDICE ANALÍTICO

Actividad, 360-364
  ficticia, 364
Alisado exponencial (*véase* Suavizamiento exponencial)
American Can Company, 142-143
Análisis
ABC, 450
  de costo, utilidad, volumen, 34-49
  de regresión, 133-137
Análisis de Markov, 327-349 330-353
  aplicaciones, 339-342, 348-352
  cadena de Markov, descripción, 331-333
  orden de, 352
  probabilidades de estado estable, 336-344
  probabilidades de transición (matriz de), 332-333
  probabilidades transitorias, 333-337
  suposiciones, 352
Análisis de sensibilidad:
  coeficientes de la función objetivo, 227-232
  lado derecho, 232
  nueva restricción, 233
  nueva variable, 232
Árbol, diagrama de *(véase* Diagrama de árbol)
Árboles de decisión, 69-77
  análisis de, 71-73
  en el análisis de Markov, 333-336
  componentes y estructura, 70-71
Aumento, 201-203, 248-249

Bayes, teorema de, 565

Cadena:
  absorbente, 344-347
  cíclica, 343-344
Calculadoras, 11-13
Camino crítico *(véase* Ruta crítica)
Capacidad de planta, exceso de, 48
Ciencias de la Administración, 12-13
Cola, 464
  disciplina de la, 464-470
Colas, teoría de, 456
  (véase también Líneas de espera, modelos de)
Columna (o renglón) clave, 210
Combinaciones, 565
Complejidad, jerarquía de, 17
Comportamiento del costo, 34-38
  fijo, 34
  semivariable, 36
  total, 34
  variable total, 34
  variable por unidad, 34
Comportamiento del ingreso, 35-36
Computadoras:
  generaciones, 542-543 548-550
  hardware y software, 549
  uso de, 11-13
Contabilidad administrativa, 33-34
Contabilidad financiera, 33
Control:
  gerencial, 31
  operacional, 31

Confianza, 19-20, 512
Costo:
comportamiento del *(véase* Comportamiento del costo)
creciente *(véase* incremental, *después)*
incremental, 46, 48
Criterio minimax, 92
Cuota de mercado *(véase* Porcentaje de mercado)
Curva de utilidad, 78-79

Datos, 28-33
externos o de medio ambiente, 30
fuentes de, 32-33
internos, 30
necesarios por niveles, 31-32
objetivo de los, 31
operativos con los, 30
subjetivos, 31
Decisiones de fabricar frente a comprar, 45-48
Decisiones, teoría de, 21-26
Degeneración, 218, 222-223, 303-306
Delphi, método, 142-147
Demanda del tiempo de entrega, 410-434
Desarrollo de modelos, proceso de, 536-539 542-546
Desviación estándar, 567
en análisis de Markov, 333-335
Diagrama:
disperso, 134
de estados, 332
de flujo, 509
Diagrama de árbol, 69-77
Diagrama de nube de puntos *(véase* Diagrama, disperso)
Diagramas de redes:
actividad en el nodo (AEN), 363
arcos, 362-364
Dilema del prisionero, 101-102
Disciplina de la cola, 464-470
Distribución:
binominal, 570
exponencial, 484, 571
normal, 573-574
tabla de, 578
Poisson, 483-484, 570
uniforme, 569, 570
Dominancia, 99
Dualidad, 181-184, 223-227
formulación del problema dual, 180-183
interpretación económica de, 182-184
precios sombra, 183-184, 223
problema primal, 181
solución por símplex, 219-222
Dumping del producto, 48

Elemento de intersección, 211
Esquina noroeste, regla de la, 190
Estadística, repaso de, 565, 568

Estado:
estable, 336
transitorio, 333
Estrategia, 90
maximax, 24, 93
maximin, 24-92
mixta *(véase* Juegos, teoría de)
pura, 92-95
Evento, 362
Exactitud, 9-12

Faltantes, 417-419
Fila *(véase* Renglón)
Función objetivo *(véanse* Programación lineal; Programación por objetivos)

Gráfica:
cruzada, 46-48 de Gantt, 360-362

Holgura, 368, 370-372

Indiferencia, líneas de, 172-174
Informe:
de demanda, 32
programado, 32
Ingreso, comportamiento del, 35-37
Instalación de servicio, 470
Inventario:
análisis de prioridad de, 449
de bienes múltiples, 449-452
cambio (rotación) de, 452
costos de, 405-410
medidas agregadas (globales) de comportamiento, 450-452
de seguridad, 435-438, 442-446
sensibilidad, 412-413
simulación, 514-519
Investigación de operaciones, 13-14

Jerarquía de complejidad, 17
Juegos, 24, 90
Juegos, teoría de, 24, 89-112
aplicaciones de, 90, 101-103
definición de, 90
dominancia, 99
estrategia, 90
de más de dos, 92, 98
mixta, 93, 95-99
pura, 93-95
juegos de suma cero (nula), 90, 91-102
juegos de suma no cero (no nula), 90, 101-103
valor del juego, 94-95, 97-98

Ley de los grandes números, 568
Límite central, teorema del, 568
Limits to Growth, The, 144
Líneas de espera, modelos de:
características de funcionamiento, 469-471
distribución exponencial, 469, 483
distribución Poisson, 469, 473, 484
modelo de un servidor, 469-472, 477-479
modelo de tiempos de servicio constantes, 477-479
modelo de varios servidores, 479-482
Líneas de espera, sistemas de:
cola, 469-470
costos de los, 464-467
estructuras, 466-469
evaluación de los, 466, 472-477, 478, 480-483
instalación de servicio, 470
llegadas, 470
simulación de, 509-514
Líneas de indiferencia, 172-174
Llegadas, 469

Margen de contribución, 39
Matriz de pagos, 65-69, 92-93
análisis de la 66-67
componentes y estructura, 66
en teoría de juegos, 92-93
Media, 566
Medias móviles *(véase* Promedios móviles)
Mercado, porcentaje de, 340-341
Método de asignación (problema), 308-316
solución de ramificación y acotamiento (separación y acotación), 268-271
Método científico, 4-5
limitaciones del, 6-7
Método gráfico, 166-169
gráfica de las restricciones, 172-174

limitaciones del, 179
líneas de indiferencia, 172-174
maximización, 166-174
minimización, 174-178
región factible, 167
resumen del, 174
Método de la ruta crítica (CPM):
red de tiempo mínimo-costo mínimo, 380-385
tiempo/costo intensivo, 380
tiempo/costo normal, 380
Método símplex, 199-238
aumento, 201-203
cálculo de $C_j - Z_j$, 207-209
casos especiales, 218-223
y las computadoras, 223-234
criterio símplex, 208, 212, 215-216
interpretación económica del, 214-217
maximización, 204-217
minimización, 217-219
panorama general del, 202-204
para programación por objetivos, 248-252
resumen de, 216
revisión del renglón pivote (de la fila clave), 211-213
revisión de renglones no pivote (de filas no claves), 211-213
solución dual, 222-227
solución inicial, 204-207
tabla para el, 203-204
variable entrante, 210
variable que sale, 211-213
Método de transporte (problema del):
aplicaciones, 306-310
balance de la matriz, 285-286
características del, 283-285
casos especiales, 302-306
matriz para el, 285-288
panorama general del, 285
solución inicial, 287-290
solución óptima, 289-302
Métodos:
de aproximación de Vogel (VAM), 289
causales de pronósticos (predicción), 116, 133-142
del costo-mínimo, 288-292
cualitativos de pronósticos, 117, 140-143
cuantitativos de pronósticos, 116-118
de la distribución modificada (MODI), 289-300
escalonado
gráfica de pronósticos, 119-123
húngaro, 310
de predicción con series temporales *(véase* de series de tiempo para pronósticos, *después)*
de pronósticos a corto plazo, 116
de pronósticos a largo plazo, 117
de pronósticos a mediano plazo, 116
de series de tiempo para pronósticos, 116-133
Métodos cuantitativos:
cuándo usarlos, 540-541
estudio sobre el uso de, 8-11
futuro de los, 556
historia de los, 12-13
impacto de los, 553-556
obstáculos para usarlos, 545-550
papel de los, 8-9
selección del método apropiado, 541
Mínimos cuadrados, 130-131, 134-137
Moda, 375, 377, 566
Modelo del lote económico (EOQ), 409-414
suposiciones, 409
Modelos
abstractos, 19-20

concretos, 19-20
definición de, 15
descriptivos, 16, 19
dimensionalidad de, 20-22
econométricos, 137-140
EOQ *(véase* Modelo del lote económico)
normativos, 16-20
prescriptivos, 19
tipos de, 15-20
Modelos de inventarios:
cantidad fija de reorden: con costo por faltantes: conocido, 437-441
con costo por faltantes desconocido, 433-438
descuentos por cantidad, 419-421
con faltantes, 417-419
lote económico, 408-413
surtido (oferta) uniforme, 414-418
comparación de, 445-449
periodo fijo de reorden:
con costo por faltantes desconocido, 441-446
intervalo económico para reordenar (IEO), 421-424
tipos de, 405-408
Monte Carlo, proceso de, 502-508
Montura, punto de *(véase* Punto, de silla de montar)
Murphy, ley de, 358

Navaja de Ocham, 20
Nivel de servicio, 435, 448
Números:
ley de los grandes, 568
pseudoaleatorios, 503
Números aleatorios:
generadores de, 503
tabla de, 580
uso de las, 506

Objetivos, programación por *(véase* Programación por objetivos)
Ocham, navaja de, 20
O'Reilly, ley de, 358

Permutaciones, 565
PERT (Técnica de revisión y evaluación de programas), 375-380
distribución beta, 375-377
estadísticas de la ruta crítica, 377-379
estadísticas de tiempos de las actividades, 376-377
estimación del tiempo de terminación del proyecto, 379-380
estimaciones de tiempo de las actividades, 375
Planeación: estratégica, 31-32
de proyectos, 359
de requerimientos de material (MRP), 404, 452
Planificación de proyectos *(véase* Planeación, de proyectos)
Planta, exceso de capacidad de, 48
Porcentaje de mercado, 340
Precios sombra, 183-184, 223-224
Precisión, 9-12
Predicción *(véase* Pronósticos)
Principio de la razón insuficiente, 25, 93
Probabilidades, 60-64, 562-565
basadas en datos históricos, 61
basadas en distribuciones teóricas, 62
basadas en el juicio subjetivo, 61
fuentes de las, 60-61
repaso de, 562-565
Proceso:

de desarrollo de modelos, 542-546
de Monte Carlo, 502-508
racional de toma de decisiones, 3-5
de solución de problemas *(véase* Toma de decisiones, proceso de)
Programación:
dinámica, 158
estocástica, 158
no lineal, 158
matemática, 158
Programación entera, 158, 179, 262-268, 272
método de ramificación y acotamiento, 262-268
Programación lineal:
aplicaciones de, 185-192
definición de, 157
función objetivo, 160
limitaciones de, 184
restricciones, 159, 160
solución por computadora, 180
suposiciones, 184-185
tabla de datos para, 162-164
variables negativas, 160n
(Véanse también Dualidad; Método de asignación Método gráfico Método símplex; Método de transporte; Programación entera; Programación por objetivos)
Programación por objetivos, 158, 239-255, 272
aplicaciones de, 253-261
aumento, 248-249
función objetivo, 245-249
restricciones, 241-244
y satisfactoria, 240
solución por computadora, 253
solución por símplex, 248-252
variables de desviación, 242-244
Promedios móviles, 122-126, 143-144
Pronósticos, 115-155
clasificación de los métodos, 116-118
selección de un método, 117
Pronósticos tecnológicos, 139
Proyecto Aware, 144-146
Punto de corte *(véase* Gráfica, cruzada)
Punto:
de equilibrio, análisis de, 37-42
lineal, 37-42
no lineal, 41-44
de productos múltiples, 43-45
de reorden, 407, 429-432, 434-435, 405, 411, 435-438, 439-441
de silla de montar, 93-95

Racionalidad acotada (limitada), 7, 14
Ramificación y acotamiento, 262-271
estrategia de, 262
para problemas de asignación, 268-271
para programación entera, 262-268
resumen de, 266-267
Razón insuficiente, principio de la, 25, 93
Redes:
actividades, 361-364
actividades ficticias, 364
aplicaciones de, 373-374, 386-388
y computadoras, 385-386
eventos, 362-364
y gráficas de Gantt, 361-362
de ruta crítica, 365-366, 369, 372
tiempos de las actividades, 370-373
tiempos de los eventos, 366-368
(véase también Método de la

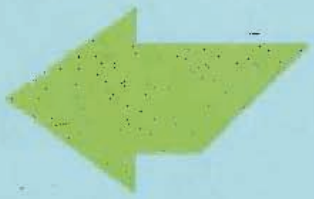
ruta crítica; PERT)
Redondeo, 10-12
regla para, 9
Región de factibilidad, 167
Regla de la esquina noroeste, 190
Renglón (o columna) ficticio, 286
Restricciones:
en programación lineal, 158-161
en programación por objetivos, 241-244
Retrasos (*véase* Faltantes)
Riesgo, 77-78
Ruta crítica, 365-366, 368, 372

Satisfactorio, 8, 240
Sensibilidad, análisis de, 39-41, 225-233
coeficientes de las restricciones, 232
Separación y acotación *(véase* Ramificación y acotamien-to)
Simplicidad, 20-21
Simulación:
aplicaciones de, 525-527
determinística, 495
ejemplos, 496-498, 510-525
fiabilidad, 509
pasos en, 500-502
proceso de Monte Carlo, 502-507
validación, 509
Sistemas:
abierto, 18
de apoyo para decisiones (DSS), 550, 551-555
cerrado, 18
dinámicos, 17
de dos secciones, 246-247
estáticos, 17
de información basados en computadoras, 32, 549-555
de información para ejecutivos (EIS), 553-554
de información para la gerencia (MIS), 550, 551-553, 555
de inventarios, 404-405, 452-453
de procesamiento de datos básicos, 550, 555
de procesamiento integrado de datos, 549, 550, 555
Stock *(véase* Inventario de seguridad) Suavizamiento exponencial, 126-129
Suma cero (nula), juego de, 90, 101
Suma no cero, juego de, 90, 101-103

Tendencia:
análisis de, 128-133
variación de, 118, 128-133
Teoría:
estadística de decisión, 79-82
general de sistemas, 17
de juegos (*véase* Juegos, teoría de)
Tiempo de entrega, demanda de, 411, 434
Toma de decisiones:
bajo certidumbre, 21
bajo conflicto, 25-26, 89-112
bajo incertidumbre, 24-25
bajo riesgo, 23-24 Toma de decisiones, estrategias de la:
maximax, 24, 93
maximin, 24, 92
principio de la razón insuficiente, 25, 93
valor esperado, 24
Toma de decisiones, proceso de:
modelo de Simón, 7
racional, 4-5
satisfactoria, 7

Utilidad: 65, 78-80
curva de, 78-80

Validación, 20-509
Valor esperado:
criterio del, 24
definición del, 63-66, 567
del dinero, 78-80
en inventarios, 434
en teoría de juegos, 96
Valor del juego, 94-95, 97-99
Variables:
artificiales, 244, 202-203, 249
de holgura, 201
de superávit, 202
Variación:
aleatoria, 118
cíclica, 118
estacional, 118, 131-133
de tendencia, 119, 128-133
Variancia, 78, 566



OTROS LIBROS McGRAW-HILL EN ESPAÑOL CON TEMAS AFINES:

Shamblin: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Ullman: MÉTODOS CUANTITATIVOS EN ADMINISTRACIÓN

ISBN 968-451-342-7